

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

A C T A

ANNVS XII
VOLUMEN XII



EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MDCCCXXXVIII

INDEX

1. <i>Resoconto della Solenne Tornata inaugurale del XII anno accademico all' augusta presenza di S. S. Pio XII (8 febbraio 1948) (cum 2 tab.)</i>	I-XXIV
<i>Resoconto della prima Tornata ordinaria del XII anno accademico (8 febbraio 1948)</i>	XXV-XXXII
2. P. RONDONI, <i>Gruppi sulfidrilici nella funzione degli idrocarburi cancerogeni</i>	1-8
3. C. HEYMANS, <i>Sur la survie et la reviviscence de différents centres nerveux après la mort apparente</i>	9-12
4. W. SCHMIDT, <i>L'importanza del cavallo per l'origine e le immigrazioni degli Indo-Europei in Europa</i>	13-16
5. G. ARRIGHI, <i>Su un principio fondamentale della statica</i>	17-24
6. G. LEMAITRE, <i>L'ipothèse de l'atome primitif</i>	25-40
7. E. GHIRARDELLI e L. CRICCA-GORDINI, <i>Raccolte faunistiche compiute nel Gargano da A. Ghigi e F. P. Pomini: I. Molluschi (cum 13 fig. et 1 tab.)</i>	41-56
8. G. LEMAITRE, <i>Quaternions et espace elliptique</i>	57-80
9. M. VACCARO, <i>Sulla permutabilità dei frazionamenti elementari di un complesso topologico qualsiasi</i>	81-92
10. A. ARCANGELI, <i>Raccolte faunistiche compiute nel Gargano da A. Ghigi e F. P. Pomini: II. Isopodi terrestri</i>	93-116
11. U. BULLI, <i>Cicli merismatici e radiazioni solari nella pineta di Ravenna (cum 6 tab.)</i>	117-128
12. T. PERRI, <i>Azione dei raggi Röntgen su embrioni e larve di anfi: III. Trapianto di complessi di abbozzi da embrioni irradiati su normali</i>	129-136
13. F. GAETA, <i>Una caratterizzazione geometrica delle varietà aritmeticamente normali</i>	137-140
14. DE LA VALLÉE POUSSIN, <i>Sur les extrémales d'une certaine intégrale I et l'appoint qu'elles apportent à un théorème général d'unicité concernant l'intégrale d'une équation différentielle linéaire</i>	141-160

15. P. MANFREDI, <i>Raccolte faunistiche compiute nel Gargano da A. Ghigi e F. P. Pomini: III. Miriapodi</i> (cum 12 fig.)	161-176
16. M. VACCARO, <i>Laterità e orientabilità delle varietà topologiche immerse in una varietà</i>	177-182
17. G. PERRI, <i>Considerazioni sull'ovaia di Cavia Cobaja trattata con colchicina</i> (cum 3 tab.)	183-198
18. A. CHIELLINI, <i>La teoria invariantiva del sistema differenziale formato da due equazioni lineari di ordine qualunque</i> (Nota prima)	199-214
19. G. LANZI, <i>Contributo alla conoscenza della fauna del lago di Scanno</i> (Abruzzo)	215-228
20. L. DI CAPORIACCO, <i>Raccolte faunistiche compiute nel Gargano da A. Ghigi e F. P. Pomini: IV. Aracnidi</i> (cum 3 fig.)	229-240
21. V. ZANON, <i>Diatomee del deposito quaternario di Crisostomataceae alle Tre Fontane presso Roma</i> (cum 3 fig.)	241-254
22. I. SCHIACCHITANO, <i>Raccolte faunistiche compiute nel Gargano da A. Ghigi e F. P. Pomini: V. Anellidi</i> . . .	255-258
23. A. W. CONWAY, <i>Quaternions ad quantum mechanics</i> .	259-278
24. A. CHIELLINI, <i>La teoria invariantiva del sistema differenziale formato da due equazioni lineari di ordine qualunque: I sistemi riducibili a coefficienti costanti.</i> (Nota seconda)	279-294
25. S. RUFFO, <i>Raccolte faunistiche compiute nel Gargano da A. Ghigi e F. P. Pomini: VI. Anfipodi</i> (cum 1 tab.)	295-310
26. D. GIGANTE, <i>Ricerche polarografiche sui tumori.</i> (Nota preventiva)	311-314
27. V. BACCARI e G. AURICCHIO, <i>Le fosfatasi nel metabolismo glicidico</i> (cum 1 fig.)	315-330
28. A. DE TOGNI, <i>Raccolte faunistiche compiute nel Gargano da A. Ghigi e F. P. Pomini: VII. Ropaloceri</i> . . .	331-346
29. P. DRUMAU, <i>Sur la récession des nébuleuses extra-galactiques</i>	347-350

RESOCONTO
DELLA SOLENNE TORNATA INAUGURALE
DEL XII ANNO ACCADEMICO
ALL'AUGUSTA PRESENZA DI S. S. PIO XII

(8 febbraio 1948)

Domenica 8 febbraio 1948 all'Augusta presenza del Santo Padre, si è tenuta la solenne Tornata Inaugurale del dodicesimo Anno Accademico della Pontificia Accademia delle Scienze.

In precedenza gli Accademici Pontifici, a norma dello Statuto, avevano ascoltato la Santa Messa, che Sua Eminenza Reverendissima il Signor Cardinale Giuseppe Pizzardo, Prefetto della Sacra Congregazione dei Seminari e della Università degli Studi ed Accademico Pontificio Onorario, assistito dal cloro degli Agostiniani, aveva celebrato nella Cappella Paolina, alle ore 9, per ottenere la benedizione di Dio sui lavori dell'Accademia, per ringraziarLo, per invocare la protezione divina sulla Chiesa e sul Sommo Pontefice e per suffragare gli Accademici defunti.

La solenne Tornata Inaugurale si è svolta nella Sala del Concistoro nel Palazzo Apostolico del Vaticano.

Alla solenne Tornata hanno assistito le loro Eminenze Reverendissime i Signori Cardinali: Pizzardo, Accademico Onorario; Tisserant, Micara, Verde, Lavitrano, Fumasoni Biondi, Tedeschini, Jorio, Aloisi Masella e Canali.

Erano presenti altresì Sua Altezza E.ma il Principe Ludovico Chigi Albani della Rovere, Gran Maestro del Sovrano Militare Ordine di Malta, Accademico Onorario; le LL. EE. Rev.me i Monsignori Domenico Tardini, Segretario della Sacra Congregazione degli Affari Ecclesiastici Straordinari, e Giovanni Battista Montini, Sostituto della Segreteria di Stato di Sua Santità; Arcivescovi e Vescovi, Segretari delle Sacre Congregazioni Romane, tra i quali gli Ecc.mi Monsignori Costantini Colso, Carinci, Nigris, Gillet e Urbani; le LL. EE. i Principi Pacelli; il Rev.mo Padre Cordovani, Maestro del Sacro Palazzo; il Delegato Speciale della

Pontificia Commissione per lo Stato della Città del Vaticano, Conte Galeazzi; i Monsignori Bacci, Dante, Sericano, Sessolo, Valentini, Raffa; l'Accademico Pontificio Onorario Pietro De Sanctis; i Rev.mi Padri Suarez e Perantoni; i Comandanti della Guardia Nobile di Sua Santità, S. E. Principe D. Francesco Chigi della Rovere; della Guardia Svizzera, Barone de Pfyster d'Altishofen; della Guardia Palatina d'Onore, Conte Cantuti Castelvetri; della Gendarmeria Pontificia nob. Mario Pericoli; il Prof. Galeazzi-Lisi; l'Avv. Veronese, vice Presidente di « Pax Romana » per l'« Union Internationale Intellectuelle Catholique »; il Principe D. Enzo di Napoli Rampolla; il Gr. Uff. Cidonio; il Gr. Uff. Manzia, Gr. Uff. Seganti, il Gr. Uff. Belardo, il Prof. Carrara; l'Avv. Angelini Rota; il Comm. Soleti; l'Ing. Rebecchini; il Comm. Bonomelli, il Comm. Caiola; il Prof. Mistruzzi; il Gr. Uff. De Mori e numerose altre distinte personalità.

Dell'Ecc.mo Corpo Diplomatico erano intervenuti: le LL. EE. gli Ambasciatori di Colombia, Brasile, Equatore, Francia, Cile, Perù, Italia, Belgio, Spagna, Portogallo, Irlanda, Venezuela, Bolivia e Repubblica Dominicana; le LL. EE. i Ministri di Olanda, Cecoslovacchia, Austria, Libano, Uruguay, Gran Bretagna, Egitto e Salvador; gli Ill.mi Signori incaricati d'Affari della Repubblica Argentina, di Finlandia e Liberia; il Primo Segretario Assistente di S. E. Myron Taylor; il Consigliere della Legazione del S. O. M. di Malta e molti altri Consiglieri e Segretari con le rispettive famiglie.

Era rappresentata la Pontificia Università Gregoriana, l'Accademia Nazionale dei Lincei, il Consiglio Nazionale delle Ricerche, l'Università ed altri Enti culturali e scientifici di Roma, oltre a numerose personalità italiane ed estere.

Della Pontificia Accademia delle Scienze hanno partecipato alla solenne Tornata, nelle poltrone loro riservate, oltre al Presidente S. E. il Rev.mo Padre Agostino Gemelli O. F. M., le LL. EE. gli Accademici, qui appresso notati in ordine di decananza: Amaldi, Armellini, Boldrini, Castellani, Colonnetti, Crocco, de la Vallée Poussin, Ghigi, Giordani, Giorgi, Lemaitre, Lepri, Lombardi, Michotte van der Berck, Petritsch, Pistolesi, Rondoni, Vercelli, Conway, Dainelli, Pierantoni, Severi, Bonino, Quagliariello, Heymans, De Blasi, García-Siñeriz, gli Accademici soprannumerari, nello stesso ordine, Stein, Gatterer, Albareda, Schmidt, ed il Cancelliere dell'Accademia Dott. Pietro Salvincci.

Con gli Accademici era pure il Prof. Earl Alison Evans, dell'Università di Chicago, Addetto Scientifico degli Stati Uniti presso la Gran Bretagna, giunto appositamente da Londra per rappresentare gli Accademici Pontifici degli U. S. A.

Alle ore 10,30 precise l'Augusto Pontefice, preceduto dalla Sua Nobile Corte, è entrato nella Sala, e, gradito l'omaggio del distinto consesso, si è assiso in trono avendo ai lati S. E. Rev.ma Monsignor Giuseppe Migone, Arcivescovo tit.



di Nicomedia, Suo Elemosiniere Segreto ; S. E. Rev.ma Mons. Camillo De Romanis, Vescovo tit. di Porfiroreone, Suo Sacrista e Vicario Generale per la Città del Vaticano ; gli Ill.mi e Rev.mi Monsignori Callori di Vignale, Venini, Toraldo e Nasalli Rocca di Corneliano e l'Esente di servizio delle Guardie Nobili Conte Salimei.

L'AUGUSTA PAROLA DEL SANTO PADRE

L'Augusto Pontefice, ricevuto il devoto omaggio di tutti gli intervenuti, ha subito proceduto all'Inaugurazione del dodicesimo Anno Accademico tenendo all'illustre uditorio il seguente discorso :

L'IMMUTABILITÀ DELLE LEGGI NATURALI E IL GOVERNO SUPREMO DI DIO NEL MONDO

SCIENZE SPECULATIVE E SCIENZE PRATICHE

Nel ritrovarCi qui in mezzo a voi, illustri Accademici, per l'inaugurazione del nuovo anno di questa Pontificia Accademia delle Scienze, il Nostro pensiero non può insieme non tornare ancora una volta al Nostro indimenticabile e incomparabile Predecessore, fondatore di questo nobilissimo Istituto scientifico, e rappresentarcelo in quelle bianche vesti, di cui parvero un preludio e un augurio di altezza paterna le candide nevi delle Alpi, da lui un dì calcate con ardimentoso e franco piede, vincendo pericoli, abissi e bufere, avido com'era di raggiungere non solo le cime dei monti della natura, ma anche le vette della verità speculativa e pratica. Salendo gli pareva di vedere con sè ergersi i monti e avvallarsi i campi: ascenderunt montes, descenderunt valles (Ps. 103,8), e, quando discendeva, rimirava nel candore del Duomo della sua Milano quasi un'alpe fulgida di meravigliose guglie, sorgente in mezzo alle pianure lombarde. Anche voi avete salito le Alpi del sapere, i monti delle scienze speculative, del calcolo, dell'astronomia, dei vortici delle stelle e delle nebulose; e siete scesi nei piani delle scienze pratiche dalle mille forme di arte, di tecnica, di esperimento; perchè è gran potenza dell'umano intelletto speculativo di estendere la mano all'operazione e divenire intelletto pratico, facendo delle leggi immutabili e delle materie della natura una guida e un sostegno nella sua azione sempre regolata e sorretta dal governo e dalla provvidenza di Dio.

CONCEZIONE E VALORE OGGETTIVO DELLE LEGGI NATURALI

Ma nel nostro globo, agli occhi nostri, appare signore e potente sopra tutti i viventi naturali l'uomo, al quale Iddio assegnava di moltiplicarsi e popolare la terra e col suo lavoro procurarsi il pane di cui vivere: sicchè non fa meraviglia che il gran Filosofo di Stagira Aristotele paragonasse l'anima dell'uomo alla mano, organo degli organi (ἡσπὶ ψυχῆς l. 3 c. 8). Tutto è infatti dovuto alla mano; le città e le fortezze, i monumenti, i codici della sapienza, della scienza, dell'arte e della poesia, l'eredità e il patrimonio delle biblioteche e della civiltà umana. Similmente l'anima è data all'uomo, per così dire, in luogo di tutte le nature delle cose per farsi in certo modo tutte le cose, in quanto l'anima nostra col suo senso e col suo intelletto riceve tutte le forme o immagini delle cose stesse. Lasciate pertanto che Noi ammiriamo la vostra mano e il vostro intelletto di discepoli della natura, quali voi siete, nelle vostre scuole, nei vostri laboratori, nelle vostre officine, nei vostri cantieri, nei vostri arsenali. Ma voi siete in un medesimo tempo maestri, e insegnate e proiettate fuori di voi non le forme sensibili e intellettive dell'anima vostra, ma per mezzo di quelle ciò che la natura ha causato e proiettato nelle vostre facoltà conoscitive. Voi nella vostra fantasia e nella vostra mente formate e inventate e architettate mirabili immagini e progetti di apparecchi, di strumenti, di telescopi e microscopi e spettroscopi e di mille altri mezzi d'ogni sorta per domare, incatenare e dirigere le forze naturali; tuttavia la vostra arte non crea la materia che sta nelle vostre mani; ma con l'artificio sapiente solo la modifica, ne regge l'azione secondo le leggi che vi avete scoperte, combinando e accordando la vostra conoscenza pratica e tecnica della realtà delle cose con la vostra conoscenza speculativa delle medesime cose reali.

In tal modo la genuina legge di natura, che lo scienziato formula con paziente osservazione e diligenza nel suo laboratorio, è assai più e meglio che una pura descrizione o calcolo intellettuale, che bada solamente a fenomeni e non a sostanze reali con le loro proprietà. Essa non si ferma nè si appaga dell'apparenza e dell'immagine dei sensi, ma penetra nella profondità della realtà, ricerca e scopre le intime occulte forze dei fenomeni, ne manifesta l'attività e i rapporti. È quindi

facile di comprendere che la conoscenza delle leggi di natura rende all'uomo possibile il dominio delle forze naturali e il porle a proprio servizio nella tanto progredita tecnica moderna. Solo in tal guisa il pensiero umano può elevarsi a intendere come l'ordine regolare delle linee spettrali, che il fisico osserva e distingue oggi nel suo laboratorio, schiuderà forse domani all'astrofisico una più profonda visione e conoscenza dei misteri della costituzione e dello sviluppo dei corpi celesti.

Così dal fondamento della legge di natura, dal sussidio operoso della tecnica moderna, dalla positiva e vera conoscenza delle interne tendenze degli elementi e dei loro effetti nei fenomeni naturali lo scienziato procede, contro tutte le difficoltà e gli ostacoli, a ulteriori scoperte, insistendo con costanza e perseveranza nelle sue indagini.

L'ERA ATOMICA

Il più grandioso esempio dei risultati di così intensa attività sembra doversi ritrovare nel fatto che agl'indefessi sforzi dell'uomo è finalmente riuscito di giungere ad una conoscenza più profonda delle leggi che riguardano la formazione e la disintegrazione dell'atomo, e in tal guisa di dominare sperimentalmente, fino ad un certo grado, lo sprigionarsi della potente energia, che emana in molti di tali processi, e tutto ciò non già in quantità submicroscopica, ma in misura veramente gigantesca. L'uso di una gran parte dell'energia interna del nucleo di uranio, della quale parlammo nel Nostro discorso in questa Accademia del 21 Febbraio 1943, riferendoCi ad uno scritto del grande fisico Max Planck (recentemente mancato ai vivi), è divenuto realtà ed ha avuto la sua applicazione nella costruzione della « bomba atomica » o « bomba a energia nucleare », la più terribile arma, che la mente umana abbia, fino ad oggi, ideata.

In questa congiuntura non possiamo astenerCi dall'esprimere un pensiero che costantemente grava sull'animo Nostro, come su quello di quanti hanno un vero senso di umanità; e a tale proposito Ci sovengono le parole di S. Agostino nella sua opera *De civitate Dei* (l. 19 c. 7), ove egli discorre degli orrori della guerra, anche giusta: « Dei quali mali — egli scrive — se io volessi narrare, come si conviene, le molte e molteplici devastazioni, le dure e crudeli angustie, benchè ciò mi sarebbe

impossibile come richiederebbe l'argomento, quando, si giungerebbe alla fine della lunga disputa? Chiunque considera con dolore questi mali così orribili e così funesti, deve confessarne la miseria: ma chi li sopporta e li pensa senza angoscia dell'animo, assai più miseramente si crede felice, perchè ha perduto anche il sentimento umano». Che se le guerre di allora giustificavano già una così severa sentenza del grande Dottore, con quali voci dovremmo noi al presente giudicare quelle, che hanno percosso le nostre generazioni e piegato al servizio della loro opera di distruzione e di sterminio una tecnica incomparabilmente più progredita? Quali sciagure la umanità dovrebbe attendere da un futuro conflitto, qualora avesse a dimostrarsi impossibile di arrestare o frenare l'impiego delle sempre più nuove e sempre più sorprendenti invenzioni scientifiche?

Ma prescindendo per il momento dall'uso bellico della energia atomica, e nella fiduciosa speranza che essa sia volta invece unicamente ad opere di pace, si deve ben riguardarla come una investigazione ed applicazione veramente geniale di quelle leggi della natura, che regolano l'intima essenza ed attività della materia inorganica.

Invero, a propriamente parlare, si tratta qui soltanto di un'unica grande legge di natura, che si manifesta soprattutto nel cosiddetto « Sistema periodico degli elementi ». Lothar Meyer e Demetrio Mendelejew nel 1869, sulla base degli scarsi dati chimici allora conosciuti, genialmente lo intravidero e diedero a quel sistema la prima forma provvisoria. Esso aveva però molte lacune e incoerenze; il suo senso profondo era ancora oscuro; faceva tuttavia congetturare una intima affinità degli elementi chimici e una uniforme struttura dei loro atomi da uguali particelle subatomiche. In appresso il quadro si schiarì di anno in anno, i difetti e le imperfezioni svanirono e il senso più profondo si rivelò. Ci restringeremo qui a ricordare brevemente alcune delle tappe più importanti in questo cammino: la scoperta degli elementi radioattivi dovuta ai coniugi Curie; il modello atomico del Rutheford, e le leggi che lo regolano proposte per la prima volta dal Bohr; la scoperta della isotopia per opera di Francis William Aston; le prime frantumazioni del nucleo per mezzo di raggi alfa naturali, e poco tempo dopo la sintesi di nuovi nuclei pesanti mediante il bombardamento con neutroni lenti; la scoperta dei transuranici intravisti dal Fermi, e la produzione degli elementi transuranici in quantità ponderabile, e fra

questi in primo luogo del Plutonio, che costituisce la parte attiva della bomba, e viene ottenuto nelle gigantesche « Pile di Uranio »; in una parola, un coerente sviluppo e perfezionamento del Sistema naturale degli elementi chimici in ampiezza e in profondità!

Se quindi abbracciamo con un solo sguardo il risultato di queste meravigliose indagini, vediamo che esso rappresenta non tanto una conclusione, quanto piuttosto l'adito a nuove conoscenze e il principio di quella che è stata chiamata l'« Era Atomica ». Fino a poco tempo fa la scienza e la tecnica chimica si erano occupate quasi esclusivamente dei problemi riguardanti la sintesi e l'analisi delle molecole e dei composti chimici; ora invece l'interesse si concentra nell'analisi e nella sintesi dell'atomo e del suo nucleo. Soprattutto poi il lavoro degli scienziati non si darà tregua, finchè non avrà trovato un facile e sicuro modo di governare il processo di scissione del nucleo atomico, in guisa da far servire le sue così ricche fonti di energia ai progressi della civiltà.

Mirabili conquiste dell'intelletto umano, che scruta ed investiga le leggi della natura, trascinando seco l'umanità per nuove vie! Potrebbe darsi concezione più nobile?

LA LEGGE DI NATURA

PARTECIPAZIONE DELLA LEGGE ETERNA IN DIO

Ma legge dice ordine; e legge universale dice ordine nelle cose grandi come nelle piccole. È un ordine che il vostro intelletto e la vostra mano rinvencono derivante immediatamente dalle intime tendenze insite nelle cose naturali; ordine che nessuna cosa può crearsi o darsi da sè, come non può darsi l'essere; ordine che dice Ragione Ordinatrice in uno Spirito, che ha creato l'universo, e da cui « dipende il cielo e tutta la natura » (Par. 28, 42); ordine che hanno ricevuto con l'essere quelle tendenze ed energie, e con cui le une e le altre collaborano a un mondo ben ordinato. Questa meravigliosa compagine delle leggi naturali, che lo spirito umano con instancabile osservazione e accurato studio ha scoperte e che voi sempre più andate investigando, aggiungendo vittorie a vittorie sulle occulte resistenze delle forze della natura, che è mai se non un'immagine, pur pallida e imperfetta, della grande idea e del gran disegno divino, che nella mente di Dio creatore è concepito quale legge di questo universo

fin dai giorni della sua eternità? Allora nell'inesauribile pensiero della sua sapienza preparava i cieli e la terra, e poi, creando la luce sugli abissi del caos, culla dell'universo pure da Lui creato, dava inizio al moto e al volo del tempo e dei secoli, e chiamava all'essere, al vivere e all'operare tutte le cose secondo la loro specie e il loro genere fino al più imponderabile atomo. Quanto a ragione ogni intelletto, che come il vostro, contempla e penetra i cieli e pesa gli astri e la terra, deve esclamare, rivolgendosi a Dio: Omnia in mensura et numero et pondere disposuisti! (Sap. 11, 21). Non sentite voi, entro l'animo vostro, che il firmamento che ci avvolge e il globo che calchiamo, narrano insieme coi vostri telescopi, coi vostri microscopi, con le vostre bilance, coi vostri metri, coi vostri multiformi apparecchi la gloria di Dio e riflettono al vostro sguardo un raggio di quella sapienza increata che attingit a fine usque ad finem fortiter, et disponit omnia suaviter? (Sap. 8, 1).

DA CIÒ L'UNITÀ CHIUSA DELLE LEGGI NATURALI

Lo scienziato sente quasi il palpito di questa sapienza eterna, allorchè le sue indagini gli rivelano che l'universo è formato come d'un getto nella sterminata fucina del tempo e dello spazio. Non solo dei medesimi elementi splendono composti i cieli stellari; ma anche alle medesime grandi e fondamentali leggi cosmiche essi obbediscono, sempre e dovunque appaiono, nella loro interna ed esterna azione. Gli atomi del ferro, eccitati nell'arco o nella scintilla elettrica, emettono migliaia di righe ben definite; esse sono identiche a quelle che l'astrofisico scorge nel cosiddetto flash spectrum alcuni momenti prima della totalità dell'eclissi solare. Le stesse leggi della gravitazione e della pressione di radiazione determinano la quantità della massa per la formazione dei corpi solari nella immensità dell'universo fino alle più lontane nebulose spirali, le stesse misteriose leggi del nucleo atomico regolano per mezzo della composizione e della disintegrazione atomica, l'economia dell'energia di tutte le stelle fisse.

Tale assoluta unità di disegno e di reggimento, che si manifesta nel mondo inorganico, voi la riscontrate non meno grandiosa negli organismi viventi. Restringete pure le vostre considerazioni alla causalità, e prescindete deliberatamente dalla finalità propriamente detta, che incontrate a ogni passo nello svolgimento della vita. Che mai vi mostra un sem-

plice sguardo alla compagine universale e comune degli organismi e alle più recenti scoperte e conclusioni dell'anatomia e fisiologia comparata? Ecco la costruzione dello scheletro dei viventi superiori con organi omologhi, e specialmente la disposizione e la funzione degli organi sensitivi, per esempio, dell'occhio dalle forme più semplici fino all'organo visivo perfettissimo dell'uomo; ecco in tutto l'impero dei viventi le leggi fondamentali dell'assimilazione, del ricambio e della generazione. Tutto questo non palesa forse un generale e magnifico concetto unitario, attuato e risplendente in molteplici forme e in svariatissime maniere? Non è forse questa l'unità chiusa ed assolutamente fissa delle leggi naturali?

Sì; è unita chiusa con la chiave di quell'ordine universale delle cose, contro il quale, in quanto dipende dalla prima Causa che è Dio Creatore, Dio stesso non può agire; perchè, se così facesse, opererebbe contro la sua prescienza o la sua volontà o la sua bontà; ora in Lui « non vi è mutamento nè ombra di variazione » (Iac. 1, 17). Ma se si considera quest'ordine in quanto dipende dalle cause seconde, Iddio ne possiede la chiave e può lasciarlo chiuso o aprirlo e operare di là da esso. Forse che Dio, creando l'universo, si fece soggetto all'ordine delle cause seconde inferiori? Quest'ordine non è forse a Lui soggetto, quale procedente da Lui, non per necessità di natura, ma per arbitrio di volontà? Onde può agire oltre l'ordine istituito, quando voglia; per esempio, operando effetti delle cause seconde senza di loro o producendo altri effetti, a cui esse non si estendono (cfr. S. Th. 1 p. q. 105 a. 6). Perciò già il gran Dottore S. Agostino aveva scritto: « *Contra naturam non incongrue dicimus aliquid Deum facere quod facit contra id quod novimus in natura... Contra illam vero summam naturae legem... tam Deus nullo modo facit, quam contra se ipsum non facit* » (Contra Faustum l. 26 c. 3 - Migne PL. t. 42 col. 481; cfr. S. Th. l. c.). Che opere dunque sono queste? Sono opere, di cui Dio solo tiene la chiave nel suo segreto e che si è riservate nel volgere dei tempi in mezzo all'ordine particolare delle cause inferiori; opere seguite, come cantava il divino Poeta, « a che natura - non scaldò ferro mai, nè battè ancude » (Par. 21, 101). Davanti a tali opere, insolite, o per la sostanza stessa del fatto, o per il soggetto in cui avvengono, o per il modo e l'ordine con cui si compiono (cfr. S. Th. l. c. a. 8), il popolo e lo scienziato si arrestano stupefatti, perchè la meraviglia nasce quando gli effetti sono manifesti e la causa occulta. Ma l'ignoranza della causa occulta, che stupisce l'incredulo, acuisce l'occhio del

fedele e del sapiente che, dentro certi limiti, sa e misura fin dove arrivi l'opera della natura con le sue leggi e forze, e di là da quelle scorge una mano superiore occulta e onnipotente, quella mano che creò l'ordine universale delle cose, e nel processo degli ordini particolari delle cause e degli effetti segnò il momento e la circostanza del suo mirabile intervento (cfr. S. Th. l. c. a. 7).

TALE CONCEZIONE COLMA LO SCIENZIATO DI ENTUSIASMO...

Questo governo divino dell'universo creato nel suo ordine generale e negli ordini inferiori particolari certo non può non suscitare un sentimento di ammirazione e di entusiasmo nello scienziato, che nelle sue ricerche scopre e riconosce le tracce della sapienza del Creatore e del supremo Legislatore del cielo e della terra, il quale con mano d'invisibile nocchiero guida tutte le nature « a diversi porti — per lo gran mar dell'essere, e ciascuna — con istinto a lei dato che la porti » (Par. 1, 111-114). Eppure le gigantesche leggi della natura che sono mai se non un'ombra e una pallida idea della profondità e dell'immensità del disegno divino nel grandioso tempio dell'universo? « Il sommo privilegio dello scienziato, lasciò scritto Kepler, è di riconoscere lo spirito e rintracciare il pensiero di Dio ». Spesso, — conviene confessare la umana debolezza, — davanti alla visione delle cose e delle immagini dei nostri sensi, quel pensiero si offusca e retrocede; ma se il pensiero di Dio entra nel lavoro dello scienziato, egli non lo confonde coi movimenti e con le immagini che vede o dentro o fuori di sé; e quella disposizione di animo a rintracciare e riconoscere Dio, viene a dargli nel suo laborioso studio il retto slancio e il largo compenso di tutte le fatiche sostenute per la ricerca e la scoperta, e, lungi dal renderlo orgoglioso e superbo, gl'insegna umiltà e modestia.

... MA ANCHE DI UMILTÀ

Certo, quanto più profondamente il cultore del sapere e della scienza spinge la sua indagine nelle meraviglie della natura, tanto più sperimenta la propria insufficienza a penetrare ed esaurire la ricchezza del concetto della costruzione divina e delle leggi e norme che la governano;

e voi sentite il grande Newton con incomparabile bellezza e rilievo dire: « Io non so come appaio al mondo, ma a me stesso appaio come un bambino, che giuoca sulla riva del mare e si rallegra, perchè trova di tanto in tanto un ciottolo più levigato e una conchiglia più vaga del solito, mentre il grandioso oceano della verità sta innanzi a lui inesplorato ». Queste parole di Newton, oggi, dopo tre secoli, nell'odierno fermento delle scienze fisiche e naturali, suonano più che mai vere. Di Laplace si narra che, mentre egli giaceva infermo e gli amici che gli erano d'attorno ricordavano la sua grande scoperta, rispondesse, amaramente sorridendo: « Ce que nous connaissons, est peu de chose, mais ce que nous ignorons, est immense ». Nè meno acutamente l'illustre Werner von Siemens, scopritore del principio di autoeccitazione della dinamo, attestava alla 59ª riunione degli scienziati e dei medici tedeschi: « Quanto più intimamente penetriamo nell'armonica disposizione delle forze della natura, regolata da eterne immutabili leggi, e nondimeno così profondamente velata alla nostra piena conoscenza, altrettanto ci sentiamo più spronati a un'umile modestia, tanto più ci appare ristretto l'ambito delle nostre cognizioni, più vivo diventa il nostro sforzo per attingere più e più da questa inesauribile fonte della conoscenza e della potenza, e più alta cresce la nostra meraviglia alla infinita saggezza ordinatrice, la quale permea tutta la creazione ».

In verità le nostre conoscenze della natura sono modeste di estensione e spesso imperfette di contenuto. Su una trattazione della teoria elettromagnetica della luce si potevano leggere le parole: « È un Dio che scrisse queste formule?. Geniali certamente sono le equazioni di Maxwell; eppure esse, al pari di ogni simile avanzamento della fisica teorica, suppongono e implicano una, per così dire, semplificazione e idealizzazione della realtà concreta, senza cui è impossibile una fruttuosa trattazione matematica. Quanto spesso oggi possono proporsi non altro che regole in cambio di leggi esatte, o soltanto soluzioni parziali invece di soluzioni generali! Dove appare un comportamento regolare per la cooperazione, a primo aspetto senza regola, d'innumerabili fenomeni particolari, lo scienziato deve appagarsi di segnare il carattere e la forma del contegno delle masse secondo considerazioni di probabilità, e, ignaro com'è in particolare della loro base dinamica, formulare leggi statistiche.

Incessante è il progresso della scienza. È ben vero che i successivi stadi del suo avanzamento non sempre hanno seguito il cammino che dalle

prime osservazioni e scoperte conduce direttamente alla ipotesi, dall'ipotesi alla teoria, e infine al conseguimento sicuro e indubitato della verità. Si dànno invece casi, in cui la investigazione descrive piuttosto una curva; casi, cioè, in cui teorie, — che sembravano aver già conquistato il mondo e raggiunto l'alto vertice di dottrine indiscusse, l'aderire alle quali conciliava stima in mezzo al ceto scientifico, — ricadono nel grado di ipotesi, per poi, forse, rimanere del tutto abbandonate.

Nonostante però le inevitabili incertezze e deviazioni che ogni umano sforzo porta con sè, il progresso delle scienze non conosce soste nè salti, mentre i ricercatori del vero l'uno all'altro si trasmettono la fiaccola investigatrice, a illuminare e svolgere le pagine del libro della natura, dense di enigmi. Come — nota l'Angelico Dottore S. Tommaso — nelle cose, che naturalmente si generano, a poco a poco dall'imperfetto si giunge al perfetto, così accade agli uomini circa la cognizione della verità. Infatti essi da principio conquistarono un poco della verità, e poi di passo in passo ne pervennero a più piena misura, non attribuendo al caso o alla fortuna l'origine del mondo e delle cose generabili; ma, intuendo la verità con più diligente perspicacia, da evidenti indizi e ragioni dedussero che le cose naturali sono rette da una provvidenza. Come invero si troverebbe l'invariato e certo corso nel moto del cielo e delle stelle e negli altri effetti della natura, se tutto questo non fosse governato da un intelletto sovremenente? (S. Thom. in Lib. Job. Prolog.).

Per nuove e più ampie vie l'umanità si avvanza, ma sempre pellegrina, verso più profonde conoscenze delle leggi dell'universo esplorato e inesplorato, come la sospinge la sete naturale del vero; però anche dopo millenni le cognizioni umane delle norme interne e delle forze motrici del divenire e procedere del mondo, e più ancora del disegno e dell'impulso divino che tutto penetra, muove e dirige, saranno e resteranno un'imperfetta e pallida immagine delle idee divine. Di fronte ai prodigi della sapienza eterna, che nel mar dell'essere con ordine indeclinabile tutto governa e indirizza ogni cosa a porti nascosti, sono ciechi e muti i pensieri indagatori dello scienziato, e sottentra quell'umile ammirante adorazione, che sente in faccia a sè il portento della creazione, cui non fu presente e che non può imitare la mano dell'uomo, ma nella quale l'occhio di lui può ravvisare un improvviso lampo della potenza di Dio. Innanzi ai molti imperscrutabili enigmi dell'ordine e del concatenamento delle leggi del cosmo immensamente grande e immensamente piccolo, bisogna che

l'ingegno umano ripeta l'esclamazione: O altitudo divitiarum sapientiae et scientiae Dei: quam incomprehensibilia sunt iudicia eius et investigabiles viae eius! (Rom. 11, 33). Fortunato lo scienziato se, nel percorrere i vasti campi celesti e terrestri, sa leggere nel gran libro della natura e ascoltare il grido della sua parola, manifestante agli uomini l'orma lasciata dal passo divino nella creazione e nella storia dell'universo! Le orme del piede e le sillabe vergate dal dito di Dio sono indelebili: nessuna mano d'uomo vale a cancellarle; orme e sillabe sono i fatti, donde si sprigiona il divino a tutte le menti; e proprio per i saggi intelletti investigatori sembrano scritte le parole del Dottore delle genti: Quod notum est Dei, manifestum est in illis; Deus enim illis manifestavit. Invisibilia enim ipsius a creatura mundi, per ea quae facta sunt, intellecta conspiciuntur, sempiterna quoque eius virtus et divinitas (Rom. 1, 19-20). In una delle iscrizioni che ornavano il tumulo del grande astronomo Angelo Secchi nel giorno dei suoi funerali si leggeva: A caeli conspectu ad Deum via brevis.

Guardando da questa più alta specola il mondo universo, che sta ai piedi di Dio, non è malagevole comprendere come le cose naturali agiscano imprevedibilmente e senza eccezione conforme alle tendenze della loro varia natura, ma che al supremo Creatore, Conservatore e Governatore, che sta sopra le cose e le leggi da Lui sancite e date alle creature, nessuna tendenza naturale può opporsi, mentre Egli rimane libero per sapienti motivi d'impedire o volgere verso altra direzione in casi particolari gli effetti e le attività di tali tendenze. In presenza della meravigliosa realtà del cosmo, che lo scienziato contempla, studia e scruta, lo spirito universale escogitato da Laplace, con la sua formula che, almeno secondo il concetto dei materialisti, dovrebbe abbracciare anche gli avvenimenti dipendenti dal pensiero e dalla libera volontà, appare una finzione utopistica; verità infinitamente reale è invece quella sapienza divina, che conosce e misura ogni più piccolo atomo con le sue energie e gli assegna il suo posto nella compagine del mondo creato, quella somma sapienza, la cui gloria penetra da per tutto nell'universo e splende di maggior luce nel cielo (cfr. Par. 1, 1.e segg.).

LA RELAZIONE DEL PRESIDENTE

Quindi il Presidente della Pontificia Accademia delle Scienze S. E. il Rev.mo Padre AGOSTINO GEMELLI O.F.M., ottenuto l'Augusto assenso del Santo Padre ha letto la seguente relazione dell'undicesimo anno di vita dell'Accademia.

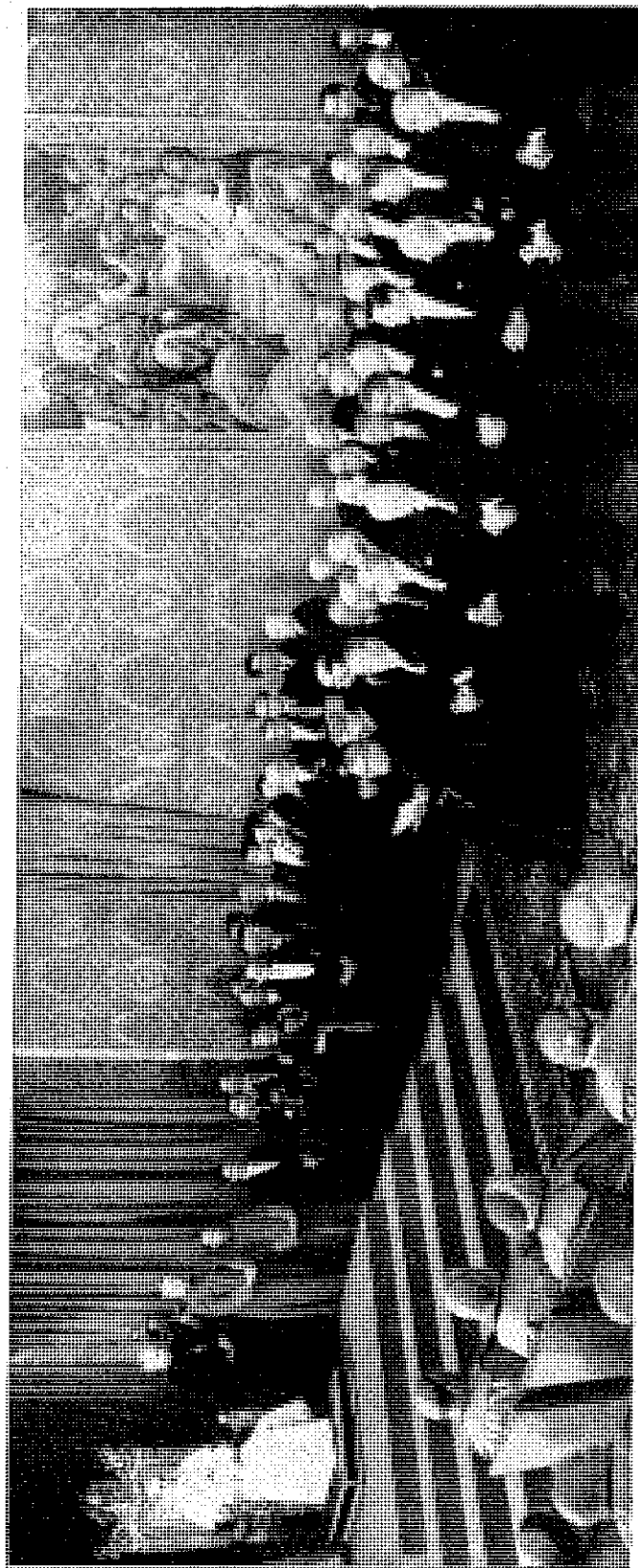
Beatissimo Padre,

Grande è la gioia, o Padre Santo, che avete recato ai Vostri Accademici Pontifici e grande la consolazione data loro con l'esservi degnato di aprire solennemente questa tornata inaugurale dell'Accademia delle Scienze che oggi riprende la sua attività con il discorso del quale ci avete fatto dono.

Le vicende dolorose della guerra, le agitazioni degli anni del primo dopoguerra avevano interrotto la vita ufficiale della nostra Accademia; noi oggi possiamo riprenderla con la benedizione di Vostra Santità e riprenderla a vantaggio degli studi che la Santa Sede sempre ha incoraggiato, promosso, benedetto, inculcato; riprendiamo la nostra attività a gloria di Dio, della Chiesa, per illuminare e confortare gli uomini proponendoci di apportare ciascuno di noi il nostro pur modesto contributo alle Scienze che coltiviamo.

Sono questi titoli varî della gratitudine che abbiamo per Vostra Santità e che io ho l'onore di esprimere a nome di tutti gli Accademici, e quelli presenti, e coloro che a causa di viaggi disagiati o lunghi o per malattia non hanno potuto intervenire. Li presentiamo a Voi Padre Santo al quale i numerosi membri del Sacro Collegio e i Prelati, e i membri del Corpo diplomatico, ed illustri scienziati e uomini di lettere fanno una corona che ci dice quanto Pio XII è amato e ammirato.

S. E. l'Ambasciatore Myron Taylor, animato da ammirevole sollecitudine, poichè non potevano gli Accademici Pontifici Statunitensi o per ragioni di salute o per imprescindibili obblighi di lavoro, intervenire a questa solenne Tornata, ha incaricato il Dr. Prof. Evans, Addetto scientifico degli Stati Uniti presso la Gran Bretagna, di venire



appositamente a Roma per rappresentare la scienza americana ed i nostri Accademici americani forzatamente assenti. Di questo atto di collaborazione dobbiamo essere molto grati a S. E. Myron Taylor.

* * *

Mi consenta, Padre Santo, di dare una breve e sommaria relazione dell'attività dell'Accademia durante questi anni che ci separano dall'altra solenne Tornata del 21 febbraio 1943 tenuta all'Augusta presenza di Vostra Santità.

Se l'Accademia non ha avuto un'attività pubblica, essa ha però continuato silenziosa il suo lavoro; forse è la sola grande Accademia che lo ha potuto fare grazie alla munificenza e alla protezione del Vicario di Cristo che in ogni modo ha confortato e sorretto quanti Accademici hanno avuto bisogno della sua Augusta parola e del suo aiuto.

Testimonianza di questa attività sono i volumi degli « Acta » e delle « Commentationes » per gli anni 1943, 1944, 1945, 1946. I dati numerici che indicano la massa del lavoro compiuto sono i seguenti: negli « Acta » sono state pubblicate 103 note originali per pagine 795; nelle « Commentationes » sono state pubblicate 78 memorie originali per pagine 2676. Nel complesso 3471 pagine. Alla quantità non è corto seconda la qualità; alcune memorie sono di grande importanza ed hanno avuto festosa accoglienza nel mondo scientifico.

È da ricordare che è in corso di stampa il volume XI per il 1947; esso comprende già 19 lavori scientifici originali per un totale di pagine 428. A questi lavori sono da aggiungere gli « Scripta varia » che comprendono poche memorie di più vasta mole per un complesso di pagine 570.

A questo punto il Cancelliere dell'Accademia ha umiliato al Santo Padre i volumi degli « Acta », delle « Commentationes » e le « Relationes » finora stampate, che il Santo Padre Si è benignamente degnato di gradire.

Il Presidente ha quindi proseguito :

Se noi confrontiamo la nostra attività con quella di altre Accademie, possiamo affermare con quella gioia che dà il lavoro compiuto

per un alto ideale, che forse nessun'altra Accademia ha avuto, in un periodo nel quale gli studi sono stati impediti, così vasta attività; ciò si deve ad una particolare protezione di Dio e, (lo si deve proclamare alto) agli aiuti della Santa Sede sempre sollecita degli interessi spirituali nonchè al carattere internazionale della nostra Accademia, e allo zelo per il quale ciascun Accademico sa che è impegnato il suo onore di studioso nella attività collettiva.

L'Accademia nostra ha svolto inoltre, in questo periodo di tempo, un'attività particolare della quale debbo dare pure breve cenno.

Essa, in ossequio all'alto desiderio del Santo Padre per una pronta e larga restaurazione dei rapporti scientifici internazionali, donde si attendono una valida cooperazione alla pacifica distensione delle relazioni fra i popoli e nuovi ed utili apporti all'umano scibile; e interprete di quello spirito di cristiana carità che vuole essere esteso anche ai beni spirituali occorrenti alla più vasta efficacia dell'opera scientifica, dei quali gli scienziati sono restati tanto a lungo privi, senza mutui rapporti e senza conoscenza delle reciproche attività, ha preso l'iniziativa di organizzare un consuntivo del lavoro di ricerca scientifica compiutosi nel mondo civile dal 1939 al 1945.

L'Accademia si è rivolta per questo fine ai propri membri e ad altri scienziati particolarmente qualificati. Grazie a questa collaborazione internazionale l'Accademia ha potuto pubblicare diciotto «*Relationes de auctis scientiis tempore belli A.D. 1939-1945*»; altre quattro sono in corso di stampa.

Si tratta di rapporti che riguardano quasi tutte le varie scienze sperimentali e che si riferiscono ad uno o a più Paesi concernenti i vari rami della scienza, secondo una ripartizione suggerita dalle consuetudini bibliografiche. Ogni rapporto dà conto delle pubblicazioni dal 1° gennaio 1939 fino alla fine del 1945; è preceduto da tratti sintetici sulle condizioni del ramo di scienza considerato nel Paese o nei Paesi contemplati e dei problemi che al principio del 1939 si presentavano di maggiore attualità; ogni rapporto riferisce soltanto sui risultati fondamentali conseguiti nel periodo sopra indicato; contiene inoltre una bibliografia di lavori opportunamente classificati.

* * *

Numerosi sono stati i vuoti che « sorella morte » ha determinato nelle nostre file. Mi sia consentito un breve cenno di ciascuno dei nostri colleghi passati a miglior vita; l'Accademia poi ne onorerà la memoria con comunicazioni tenute da colleghi particolarmente competenti.

Prima però debbo ricordare la dolorosa morte di un Accademico onorario: l'eminentissimo signor Cardinale LUIGI MAGLIONE, Segretario di Stato di Sua Santità. Non mi è possibile dare anche una pallida idea della vasta attività del compianto Cardinale; non sarei poi io qualificato a farlo; non posso però non ricordare da quale stima era circondato il compianto Cardinale perchè pio, umile, caritatevole; egli era circondato di alta stima anche perchè dotto cultore di discipline storiche e diplomatiche insigne; l'altezza dell'animo e dell'ingegno, la gentilezza dei sentimenti, la vasta visione dei tempi, il lungimirante giudizio dei fatti l'avevano reso degno di essere prezioso collaboratore, durante i tragici cinque anni di guerra, di Pio XII. È difficile enumerare adeguatamente i preziosi servizi resi dal compianto Cardinale alla Santa Sede nella sua vita così intensa di lavoro; è doveroso però ricordare con quale devozione egli ha servito il Vicario di Cristo, insegnando come, pur nello splendore della porpora, si possa umilmente, e quindi efficacemente, lavorare per la salute delle anime, per il bene delle nazioni, per il trionfo della Chiesa.

Degli Accademici effettivi passati a miglior vita ricordo innanzitutto ANTONIO CARDOSO FONTES, direttore dell'Istituto Oswaldo Cruz di Rio de Janeiro, accademico dal 1943. Di Cardoso Fontes sono particolarmente da ricordare gli studi sulla funzione esercitata dalle granulazioni che costituiscono il bacillo della tubercolosi. Di particolare interesse le prove di citologia sulla funzione esercitata dai corpuscoli di Ernst non solo nello sviluppo del bastoncino ma anche nella sua riproduzione. Cardoso Fontes li ha considerati unità riproduttrici ed elemento vivente infettante. Inoltre ha provato sperimentalmente la natura del *virus* dell'agente della tubercolosi, dimostrandone la filtrabilità, aprendo con ciò nuove strade alla ricerca dei problemi che si riferiscono alla patogenesi e forse alla profilassi e alla terapeutica del-

l'infezione tubercolosa. Infine ha determinato l'esistenza di una fase ultravisibile nel ciclo di sviluppo dei batteri, esprimendo l'opinione che nel ciclo di vita dei batteri si abbia una fase ultramicroscopica che gli attuali metodi di indagine non permettono ancora di rilevare.

Una grande perdita fu quella di PIETER ZEEMAN, dei Paesi Bassi, accademico dal 1936. Di lui basti il dire che nel 1896 fece la scoperta della separazione magnetica delle linee spettrali (ordinariamente chiamata effetto Zeeman). Premio Nobel per la Fisica nel 1902, ottenne numerosi riconoscimenti della sua attività scientifica e la nomina come membro delle principali Accademie del mondo.

Ricordo ora la morte di ALEXIS CARREL, francese, professore di Biologia alla Rockefeller Institution for Medical Research di Nuova York. Era Accademico Pontificio dal 1936. Legato al Carrel da profonda amicizia fino dal 1903, conosciuta la incomprensione con la quale alla Università di Lione male si giudicavano i primi timidi suoi risultati sulla coltivazione dei tessuti, lo sospinsi a recarsi nel Canada; di là il Carrel passò agli istituti della Rockefeller ove ebbe i mezzi imponenti per svolgere le sue ricerche sulla coltivazione dei tessuti prima, poscia sulla esplantazione degli organi mantenuti viventi, sul trapianto degli organi, dando un nuovo orientamento alla sperimentazione biologica. A riconoscimento di tanti meriti divenne nel 1912 Premio Nobel. Di lui anche il grande pubblico ricorda il volume *L'homme cet inconnu* che nel programma dell'autore volle essere la dimostrazione dell'armonia di scienza e fede nel riconoscimento che le scienze biologiche hanno limiti per i quali non ci possono dire tutto ciò che è l'uomo.

Un altro insigne Accademico è venuto a mancare il 12 ottobre 1944: GEORGE D. BIRKHOFF, professore di Matematica alla Harvard Università di Cambridge, Mass. (U. S. A.), Accademico Pontificio dal 1936. Egli perfezionò in punti essenziali la teoria delle equazioni lineari differenziali e delle differenze finite e la teoria delle funzioni. Nella dinamica dei sistemi introdusse la nozione di moto ricorrente, estensione qualitativa della periodicità. Col sussidio del famoso teorema del Poincaré (da lui per primo dimostrato) sull'esistenza di un punto unito per un certo tipo di trasformazioni biunivoche, stabili importanti risultati sulla esistenza e la distribuzione delle soluzioni perio-

diche sia per il problema ristretto dei tre corpi, sia, più in generale, per i problemi con due gradi di libertà. È da ricordare che il Birkhoff vinse nel 1933 il premio del concorso bandito dalla Pontificia Accademia delle Scienze « I Nuovi Lincei » per ricerche sui sistemi di equazioni differenziali.

Nel 1945 ci ha lasciati GUSTAVO GILSON, belga, professore di Zoologia all'Università cattolica di Lovanio. Accademico Pontificio dal 1936. Il Gilson fu uno dei più insigni biologi del nostro tempo; specie la biologia del mare ebbe in lui un meraviglioso ricercatore in quanto apportò preziosi contributi alla conoscenza della struttura e della vita degli animali inferiori marini; il suo nome poi è legato anche a tecniche biologiche e a conoscenze importanti nella embriologia e nella anatomia comparata.

Il venerando THOMAS H. MORGAN, l'iniziatore dei moderni metodi per lo studio della genetica, ci ha lasciato nel 1945. Il Morgan fu Direttore del reparto biologico del Laboratorio William G. Kerckhoff per le Scienze Biologiche. Era Accademico Pontificio dal 1936. Le sue ricerche sulla « *Drosophila* », il moscerino dell'aceto, non solo hanno dato modo di formulare le leggi fondamentali dei fenomeni che sono a base della trasmissione dei caratteri ereditari, ma hanno dato in mano ai cultori di genetica un prezioso mezzo di indicazione che ogni giorno si arricchisce di nuovi risultati. È da aggiungere che il complesso così vario delle attività scientifiche fa del Morgan una personalità che forse non ha riscontro in nessun altro dei biologi del nostro tempo. Si può dire che almeno in cinque campi del sapere biologico egli ha profuso la sua attività, e precisamente negli studi di embriologia sperimentale, della rigenerazione, del sesso, dell'eredità e dell'evoluzione. Gli studi del Morgan sulla struttura dell'uovo, sulla polarità e simmetria degli organismi; sui fenomeni e cause della regolazione e della rigenerazione; sulla partenogenesi sperimentale e fecondazione artificiale; sulla determinazione dei geni e loro distribuzione nei cromosomi; sulle cause della differenza sessuale; sui caratteri legati al sesso; sul meccanismo della trasmissione dei caratteri ereditari; sulla genetica ed evoluzione costituiscono altrettanti preziosi contributi per la scienza biologica. Questi suoi meriti furono riconosciuti con il conferimento del Premio Nobel e con la nomina a membro delle principali Accademie.

Agli 11 di marzo del 1946 tornò a Dio l'anima di LEONIDA TONELLI, Professore ordinario di Analisi matematica dell'Università di Pisa. Era Accademico Pontificio dal 1942. Il Tonelli ha conseguito importanti risultati nello studio di tipi speciali di serie di funzioni analitiche; è il fondatore della teoria dei polinomi del Tchebyceff nel campo complesso. Notevoli contributi, in varie direzioni, furono da lui portati alla teoria degli insiemi; al perfezionamento e completamento del così detto teorema di Pincherle-Borel che venne con ciò ad acquistare un campo di applicazione assai più largo; ad un lemma del Darboux per la teoria dell'integrazione, il quale, nell'estensione datagli dal Tonelli, ha assunto un'importanza fondamentale in molti campi dell'analisi; il problema della ricerca delle funzioni primitive, risolto da lui nel caso più generale, allo studio di certi funzionali, con i quali il Tonelli ha aperto un nuovo e fecondo campo di ricerche, ecc.

Ricordo la morte di PAUL GUTHNICK, direttore dell'Osservatorio astronomico di Berlin-Basbelsberg, Accademico Pontificio dal 1936, avvenuta il 6 settembre 1947. Il suo lavoro scientifico si è svolto particolarmente nel campo fotometrico e spettrografico. Nel 1912-1913 introdusse nella astrofotometria, il metodo fotoelettrico che viene particolarmente usato nella ricerca sopra le stelle doppie spettroscopiche ed anche sui pianeti. La sua fama mondiale è soprattutto dovuta alla invenzione del fotometro, all'ottimo uso che seppe fare di questo delicatissimo strumento, che successivamente migliorato, servì da modello ad apparecchi consimili in altri Osservatori d'Europa e d'America, permettendo di raggiungere nelle misure fotometriche delle stelle una esattezza dieci volte maggiore. In questa maniera dal Guthnick furono scoperte un gran numero di stelle con deboli variazioni di luce che prima sfuggivano alla osservazione; oltre ad un numero di variabili regolari a eclisse e variabili a periodo corto, egli trovò casi assai curiosi di variazioni intermittenti o irregolari. Diceva il P. Hagen che il fotometro foto-elettrico del Guthnick sembra confermare il pensiero dell'Argelander, che cioè nessuna stella è proprio invariabile. Il Guthnick per il crollo del Reich lasciò la specola del Babelsberg dopo venticinque anni di continuo e glorioso lavoro; egli vide i più preziosi strumenti, tra i quali il magnifico riflettore di 125 cm. portati in Russia quali riparazioni di guerra. Nato da genitori schiettamente

cattolici, il Guthnick rimase sempre figlio fedele della Santa Chiesa Romana.

Gravissima perdita ha subito l'Accademia con la morte di Max PLANCK, Professore di Fisica teorica nella Università di Berlino. Era Accademico Pontificio dal 1936. Il nome del Planck è legato alla teoria dei quanta; si può dire che la fisica moderna deve a lui molti dei suoi progressi grazie a questa sua teoria. Premio Nobel nel 1916, divenne Presidente della Kaiser Wilhelm Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaft, posto che dovette lasciare perchè non si piegò alle imposizioni del nazismo. Ebbi occasione di conoscerlo e di intrattenermi a lungo con lui nei miei viaggi a Berlino; mi piace dire che le preoccupazioni principali della sua tarda età erano i problemi religiosi e i problemi filosofici. Non cattolico aveva una grande venerazione per la Chiesa cattolica e per il regnante Pontefice; fui presente a conversazioni da lui tenute a giovani scienziati, nelle quali, partendo dalla constatazione delle limitazioni della scienza, li conduceva a riconoscere il valore della religione. Queste sue preziose conversazioni davano luogo a cortesi dibattiti nei quali dominava l'alto senso religioso del Planck.

Dunque nove sono stati gli Accademici che ci hanno lasciato in questi anni; dolorosi vuoti che l'Accademia già studia di riempire per ristabilire sia il prescritto numero di settanta, sia l'equilibrata distribuzione tra le varie scienze e le varie Nazioni.

* * *

Nel 1946 il Santo Padre si è degnato nominare Accademico Pontificio Sir ALEXANDER FLEMING, il noto scopritore della penicillina. Il Fleming con lo studiare la influenza del *penicillium notatum* sulle culture batteriche ha, se non aperto, certo dato un nuovo e grande sviluppo ad un ramo delle scienze biologiche: la conoscenza delle sostanze antibiotiche; queste sostanze sono oggi un potente mezzo per combattere i microrganismi patogeni. Il numero di coloro che furono salvati in questi primi anni dagli antibiotici dimostra la importanza della scoperta. Ma il Fleming ci rivela nei suoi scritti la sua modestia quando ci dice che quanti abbiamo maneggiato culture di microrga-

nismi, abbiamo veduto l'azione distruttiva della muffa. Se non che, possiamo aggiungere noi, è merito del genio lo scorgere rapporti che altri non coglie. Con la sua scoperta il Fleming è diventato uno dei benefattori dell'umanità, continuando la preziosa opera di Pasteur, di Koch, di Behring, dei grandi cioè ai quali si debbono la batteriologia, l'immunologia e le altre discipline affini.

* * *

Debbo da ultimo ricordare che l'Accademia ha partecipato a numerose riunioni accademiche; tra le principali ricorderò: La celebrazione del terzo centenario della nascita di Isacco Newton alla Royal Society di London nel 30 luglio 1946 ove rappresentò l'Accademia Edmond Whittaker: è da ricordare il secondo centenario della « Naturforschende Gesellschaft » di Zurigo, nel settembre 1946; rappresentarono l'Accademia Erwin Schrödinger ed Alfred Ursprung; il primo Centenario della fondazione della « Oesterreichischer Akademie der Wissenschaften » di Vienna nel maggio 1947; rappresentò l'Accademia Ernst Felix Petritsch.

Partecipò l'Accademia alla celebrazione commemorativa del Cinquantenario della Radio, promossa dalla Università di Bologna nel giugno 1947. Questa partecipazione era particolarmente doverosa perchè vi venne onorato Guglielmo Marconi che fu nostro Accademico; rappresentò l'Accademia Giambattista Bonino.

Al Convegno di Cartografia ed Ottica in occasione del settantacinquesimo anniversario della fondazione dell'Istituto Geografico Militare nell'ottobre 1947, fu rappresentata l'Accademia da Renato Toniolo.

Debbo ricordare che nei mesi scorsi è stato festeggiato a Lovanio il 40° di insegnamento del nostro Accademico A. Michotte van der Berck, Professore di Psicologia dell'Università Cattolica di Lovanio e uno degli psicologi più eminenti del momento presente. Convennero in quella occasione a Lovanio numerosi psicologi, tra essi il rappresentante dell'Accademia, F. J. J. Buytendijk.

Da questa rapida e sommaria rassegna si dimostra che la nostra Accademia non cessò la sua attività durante questi tristi e tormentati anni; ora però, o illustri e cari Colleghi, è necessario riprendere il nostro lavoro con più intenso ritmo.

Per continuare in questo lavoro a servizio della Scienza, a onore della Chiesa, nostra Madre, a vantaggio della Patria nella quale siamo nati e nella quale siamo stati educati, noi abbiamo bisogno di uno speciale aiuto. Quale sia questo aiuto lo ha indicato Pio XII in uno dei Suoi memorabili discorsi.

Rivolgendo la Sua parola a un gruppo di professori francesi, Pio XII si è degnato illustrare con la sua caratteristica eloquenza la « *joie de connaitre* » prendendo questa espressione da un Accademico dell'Istituto di Francia, il geologo Termier. Il Santo Padre in questa occasione disse (permettetemi di tradurre): « più felice, infinitamente più felice dello scienziato privo di religione, che, mentre con occhi penetranti scruta i fenomeni e indaga le leggi dei fatti particolari, adopera tutte le forze, per scoprire, nelle sue inquietudini irrimediabili, le cause ultime, è lo scienziato credente; questi si avvantaggia della sintesi magnifica il cui sostegno è dato da Dio; egli può cantare i versi immortali: " O abbondante grazia, ond'io presunsi — ficcar lo viso per la Luce eterna — tanto, che la veduta vi consunsi — Nel suo profondo vidi che s'interna, — legato con amore in un volume, — ciò che per l'universo si squaderna " (DANTE, *Par.* XXXIII, 82-87) ». Padre Santo! noi vogliamo essere di costoro ai quali voi avete indicato che per avere la « *joie de connaitre* » è necessario illuminare l'anima con quella luce che solo può dare Chi è l'Eterna Verità.

Noi siamo animati da un altro prezioso insegnamento da voi, Padre Santo, impartito. Ai partecipanti a un Congresso internazionale di filosofia tenuto in Roma nel decorso anno, Voi avete detto parole che possono essere applicate anche a noi, Padre Santo, Voi avete detto ai filosofi: « Dopo gli immensi orrori che questa gioventù ha dovuto subire negli ultimi anni, essa prova l'intenso bisogno di una concezione e di una dottrina chiara, forte e saldamente radicata nello spirito se non deve cadere in un gretto materialismo o nella ricerca di un successo puramente meccanico ovvero nell'abbattimento o nella inazione ». Ma avete aggiunto, Padre Santo, un avvertimento che ha particolare valore per noi cultori di scienze sperimentali in questo momento in cui in alcuni paesi, biologi e fisici, che non nascondono di essere propagandisti della interpretazione marxista della vita dell'uomo, rimettono in onore il più gretto materialismo. Ognuno di noi ha letto con grave pena dell'anima le pagine scritte di recente dal

fisico Langevin, testè defunto, dal biologo Haldane, da Huxley, pure lui biologo, da Tromp e da molti altri più o meno insigni colleghi nostri, che vorrebbero stabilire sulle basi della scienza sperimentale il neo materialismo ossia determinismo che ritenevamo passato di moda. Ora contro le affermazioni di costoro vale ciò che Pio XII ha detto ai filosofi convenuti a Roma: « Una spiegazione meramente deterministica e materialistica dell'essere e della storia, inconciliabile con le più elementari verità psicologiche, morali e storiche, non potrebbe soddisfare l'uomo, nè dargli la felicità e la pace ».

Grazie, Padre Santo, di questi insegnamenti e di questi ammonimenti; se come cultori di scienze sperimentali non vogliamo violare i confini delle nostre discipline, come uomini di cultura potremmo facilmente essere indotti a correre le avventure del pensiero e forse ci chiuderemmo anche noi in uno sterile materialismo o in un getto determinismo. Ce ne guarderemo bene; e conserviamo il vostro ammonimento come una preziosa indicazione metodologica.

Lo stesso quotidiano lottare di ogni giorno per arrivare a circoscrivere un fatto, per determinarne le condizioni, per interpretarne il significato ci obbliga a essere diffidenti di noi stessi; perciò ci inchiniamo innanzi a Voi, Maestro di Vita e di Pensiero, perchè Vicario di Cristo e Vi chiediamo di corroborare i Vostri santi insegnamenti con la Vostra Apostolica Benedizione su noi, sul nostro lavoro, sulle nostre fatiche, sulle nostre speranze, su quanto abbiamo nella mente e nel cuore.

Alla fine della relazione, il Santo Padre, compiaciuto si esprimere al Presidente le Sue paterne congratulazioni e i sensi del Suo Sovrano gradimento per le attività accademiche, impartiva la Benedizione Apostolica.

Quindi si degnava ammettere al bacio della mano i singoli Accademici ed il Cancelliere dell'Accademia intrattenendosi amabilmente con ciascuno. Infine, ricevuto l'omaggio degli Eminentissimi Cardinali, dell'Ecc.mo Corpo Diplomatico, degli Ecc.mi Accademici e delle altre personalità lasciava la sala,

RESOCONTO

DELLA PRIMA TORNATA ORDINARIA DEL XII ANNO ACCADEMICO

(Domenica 8 febbraio 1949)

Presiede S. E. il Rev.mo P. AGOSTINO GEMELLI, O. F. M.

Sono presenti le LL. EE. gli Accademici Pontifici: AMALDI, ARMELLINI, CASTELLANI, COLONNETTI, CROCCO, DE LA VALLEE POUSSIN, GHIGI, GIORDANI, GIORGI, LEMAITRE, LOMBARDI, MICHOTTE VAN DEN BERCK, PETRITSCHI, PISTOLESI, RONDONI, VERCELLI, CONWAY, DAINELLI, PIERANTONI, SEVERI, BONINO, DE BLASI, GARCIA SIÑERIZ, HEYMANS, QUAGLIARIELLO; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: STEIN, GATTERER, ALBAREDA, SCHMIDT, e il Cancelliere dell'Accademia Dott. SALVIUCCI.

Partecipa alla Tornata, sedendo negli stessi banchi riservati agli Accademici il Dott. Prof. EARL ALISON EVANS, dell'Università di Chicago, Addetto Scientifico degli Stati Uniti d'America presso la Gran Bretagna, giunto appositamente da Londra per rappresentare gli Accademici Pontifici degli U. S. A.

Ordine del giorno: 1) Approvazione del Verbale della Prima Tornata del VII Anno Accademico. 2) Comunicazioni della Presidenza. 3) Comunicazioni scientifiche e presentazione di Note. 4) Varia.

La Tornata è aperta alle 17,15.

Al primo punto dell'ordine del giorno si treva l'approvazione del verbale della precedente Tornata Ordinaria. Il verbale è stato pubblicato nel fascicolo

d Acta, vol. XII.

contenente il Resoconto della Tornata stessa e si tratta quindi di approvare tale pubblicazione che ogni Accademico ha già avuto in visione.

Il Presidente GEMELLI pone ai voti l'approvazione, e, poichè nessuno presenta osservazioni, il verbale risulta approvato all'unanimità.

Si passa quindi al secondo punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GEMELLI comunica in forma ufficiale che, riprendendosi ora dopo la guerra la normale attività della Pontificia Accademia delle Scienze, il Santo Padre Si era benignamente degnato di accogliere la sua proposta di ricostituire il Consiglio Accademico tuttora vacante, senza peraltro designare i rispettivi incarichi dei singoli membri in seno al Consiglio e ciò perchè fossero facilitati i compiti del Consiglio stesso nella realizzazione delle sue diverse funzioni.

Il Cancelliere SALVIUCCI dà lettura del venerato dispaccio della Segreteria di Stato di Sua Santità in data 8 gennaio 1948 N. 163585 con il quale vengono nominati membri del Consiglio fino al 28 ottobre 1948 le LL. EE. gli Accademici Pontifici: ARMELLINI, GIORDANI, SEVERI, QUAGLIARIELLO, e l'Accademico Pontificio Soprannumerario Rev.mo P. Dom A. ALBAREDA O. S. B.

Il Presidente GEMELLI interpreta il sentimento degli Accademici presenti proponendo di iniziare i lavori con l'invio di un telegramma di filiale ringraziamento al Santo Padre per la bontà con cui aveva voluto inaugurare il XII Anno Accademico e per l'augusto ammaestramento della Sua parola.

Il Corpo Accademico plaude in piedi alla proposta incaricando il Presidente della redazione del telegramma.

Il Presidente GEMELLI esprime quindi uno speciale, fervido saluto ed un vivo ringraziamento agli Accademici Pontifici non italiani che per la prima volta ritornano dopo tanto tempo in Accademia. Di alcuni poi si sa quanto abbiano sofferto in questi anni; ma tutti sono stati seguiti con affetto e con trepida attesa dai loro colleghi italiani che sono lieti di rivederli di nuovo fra loro nella Sede Accademica a riprendere la loro attività.

Il Presidente GEMELLI ricorda quindi come S. E. MYRON C. TAYLOR, Rappresentante Personale di S. E. il Presidente degli Stati Uniti d'America, si sia premurato di facilitare in ogni modo la presenza a Roma degli Accademici Pontifici statunitensi, i quali però per ragione di salute o per imprescindibili obblighi

di lavoro si sono trovati nell'impossibilità di venire. In tali condizioni la premura di S. E. MYRON TAYLOR per la Pontificia Accademia delle Scienze è arrivata al punto di incaricare il Dr. Prof. EARL ALISON EVANS, Addetto scientifico degli Stati Uniti presso la Gran Bretagna, di venire appositamente a Roma per rappresentare la scienza americana e gli Accademici Pontifici nordamericani, forzatamente assenti, alla solenne inaugurazione dell'Anno Accademico ed alla prima Tornata Ordinaria.

Al Dr. Prof. EARL ALYSON EVANS che è presente nei banchi degli Accademici il Presidente esprime il ringraziamento dell'Accademia e l'augurio di ogni bene, con la preghiera di volersi rendere interprete presso S. E. MYRON C. TAYLOR dei sentimenti di gratitudine di tutto il Corpo Accademico.

Il Presidente GEMELLI proseguendo nello svolgimento del secondo punto dell'ordine del giorno comunica che è stato concluso un interessante accordo fra la Pontificia Accademia delle Scienze ed il Consejo Superior de Investigaciones Cientificas di Madrid dietro generosa iniziativa di quest'ultimo e prega il Cancelliere di riferire in proposito.

Il Cancelliere SALVIUCCI ricorda l'offerta fatta inizialmente dal Consejo Superior de Investigaciones Cientificas a mezzo di una lettera ufficiale del proprio Vicepresidente S. E. DON JOSÉ GARCIA-SIÑERIZ, Accademico Pontificio, diretta al Presidente della Pontificia Accademia delle Scienze nella quale era espresso quanto il Consejo, a testimonianza di omaggio e reverenza verso il Sommo Pontefice, offriva generosamente alla Pontificia Accademia delle Scienze allo scopo di promuovere collaborazioni e scambi scientifici fra scienziati e ricercatori di tutto il mondo, visto che la Pontificia Accademia delle Scienze è l'unica Accademia che non ha limitazioni nazionali. La Presidenza dell'Accademia accettò di buon grado ringraziando per la nobile offerta; quindi il Cancelliere si recò in Spagna dietro invito del Consejo con l'incarico di concretare un accordo non troppo lontano da un piano di doverosa reciprocità.

L'accordo, che consta di vari paragrafi, stabilisce reciprocamente: invio di tutte le pubblicazioni editate dai due enti; invio ai Membri del Consejo ed agli Accademici Pontifici delle pubblicazioni di interesse personale; borse di studio od inviti particolari per la collaborazione del personale scientifico appartenente ai due enti; servizi bibliografici realizzabili nelle diverse biblioteche dipendenti dai due enti, come schedari, fotocopie, ecc.;

Il Presidente GEMELLI esprime la sua gratitudine all'Accademico Pontificio S. E. DON JOSÉ GARCIA SIÑERIZ ed i ringraziamenti di tutto il Corpo Accademico al Consejo Superior de Investigaciones Cientificas che egli presiede con tanto amore. Gli Accademici applaudono.

Si passa quindi al terzo punto dell'ordine del giorno per le comunicazioni scientifiche e la presentazione di lavori originali.

L'Accademico ARMELLINI presenta la seguente Nota:

E. MAGENES - *Una questione di stabilità relativa ad un problema di moto centrale a massa variabile.*

L'Autore, riprendendo le ricerche di G. ARMELLINI, studia l'equazione del moto centrale a massa variabile e dimostra, in condizioni assai ampie, che l'integrale generale dell'equazione suddetta tende a zero al tendere all'infinito del tempo.

L'Accademico BOLDRINI presenta la seguente Nota:

T. SALVEMINI - *Influenza della guerra del 1915-18 e degli avvenimenti del dopo guerra sugli addetti al culto in Italia.*

L'Autore, prendendo i dati dai censimenti generali della popolazione italiana del 1911 e del 1931, mette a confronto: 1) le curve di distribuzione per età del clero secolare, dei religiosi, del complesso del clero e religiosi, e, infine delle religiose; 2) l'età media del complesso degli addetti al culto nelle regioni e nel territorio nazionale con quella della popolazione con più di 15 anni; 3) il numero di addetti al culto per ogni 1000 abitanti dello stesso gruppo di età, nelle regioni e nel territorio nazionale. I risultati conseguiti mostrano le profonde ripercussioni provocate dalla grande guerra del 1915-18 e dagli avvenimenti politici, sociali ed economici del dopo guerra sul clero secolare, sui religiosi, sulle religiose e sul complesso degli addetti al culto.

L'Accademico CASTELLANI presenta in omaggio un suo volume da titolo: *Le malattie dell'Africa.* - Ministero dell'Africa Italiana, Roma, 1947.

Per Malattie dell'Africa non devono intendersi le malattie proprie di quel continente, quali la malattia del sonno, la bilharziosi vescicale ed alcune altre meno importanti, ma le malattie tropicali ed alcune cosmopolite di importanza che si riscontrano comunemente in Africa.

Particolare rilievo è stato dato alle malattie cutanee, perchè comunissimo nella pratica giornaliera in Africa ed in genere nei tropici, benchè siano scarsamente trattate negli usuali libri di medicina tropicale.

L'Accademico COLONNETTI presenta la seguente Nota:

P. G. BORDONI e F. GATTO - *Isteresi apparente delle macchine per la prova dei materiali.*

Nelle macchine per la prova dei materiali, l'attrito fra le parti mobili produce errori di misura che simulano l'esistenza di un ciclo di isteresi, proprio delle macchine stesse.

Numerose misure eseguite su macchine di tipo diverso, mediante il dinamometro a capacità recentemente attuato presso l'Istituto Nazionale di Ellettroacustica, hanno permesso di accertare l'esistenza di tali *cicli di isteresi apparente*, e di precisarne l'ordine di grandezza ed il segno.

Dividendo le macchine in categorie diverse a seconda del tipo e della disposizione dei loro organi di misura e di comando, è stato inoltre possibile indicare in maniera sistematica le cause che danno luogo, nei diversi casi, a cicli apparenti di segno positivo o negativo, oppure a cicli intrecciati.

I risultati ottenuti con il dinamometro a capacità sembrano consigliarne l'uso come strumento di controllo per le macchine destinate alla prova dei materiali, o addirittura come strumento di misura, in sostituzione dei dinamometri ordinari, nel caso di macchine destinate a ricerche particolarmente delicate.

L'Accademico DE LA VALLÉE POUSSIN presenta la seguente Nota:

DE LA VALLÉE POUSSIN - *Sur les extrémales d'une certaine intégrale I et l'appoint qu'elles apportent à un théorème général d'unicité concernant l'intégrale d'une équation différentielle linéaire.*

Si r est le rayon vecteur par rapport à un pôle P d'un point qui décrit une ligne plane AB , les extrémales de l'intégrale $\int r ds$ sont des hyperboles équilatères de centre P . Calcul de l'intégrale sur une extrémale AB . Maximum de cette intégrale quand les points PAB sont astreints à se trouver dans un domaine convexe de diamètre h (en particulier dans un cercle). Bornes dans un tel domaine D des modules d'une fonction holomorphe et de ses $n-1$ dérivées ces premières quand chacune de ces fonctions s'annule dans D et que la dérivée $n^{\text{ème}}$ admet une borne assignée. Borne qu'il faut assigner au diamètre h d'un domaine D pour que l'intégrale d'une équation linéaire à coefficients holomorphes soit déterminée par sa valeur et celles de ses $n-1$ premières dérivées en des points correspondants d'un domaine D . Précision d'un théorème récent de M. Bollian

L'Accademico GEMELLI presenta la seguente Nota:

A. GEMELLI, P. S. Y. HSIAO e B. RADUSCEV, *Contributo all'analisi dei movimenti della scrittura.*

Presenta inoltre un volume dal titolo «*Le Reliquie di San Domenico*». - *Storia e leggenda, Ricerche scientifiche, Ricostruzione fisica.* - Tipografia Luigi Parma, Bologna, 1946.

È questo un volume di notevole interesse edito a cura dell'Ordine Domenicano e pubblicato sotto gli auspici della Pontificia Accademia delle Scienze, la cui seconda parte dal titolo «*Ricerche Scientifiche*» è costituita da una serie di lavori originali.

1) *Studio radiografico dei resti di San Domenico* (G. G. PALMIERI), lavoro già pubblicato dalla Pont. Accademia delle Scienze nelle «*Commentationes*».

2) *Esame antropologico del cranio di S. Domenico* (E. GRAFFI-BENASSI).

3) *Studio stomatologico dei resti di S. Domenico* (A. BRANZI).

4) *Ricognizione dei presunti capelli di S. Domenico* (M. OLIVO).

L'Accademico GHIGI presenta le seguenti Note:

G. LIANZI - *Contributo alla conoscenza della fauna del lago di Scanno (Abruzzo).*

L. DI CAPORIACCO - *Raccolte faunistiche compiute nel Gargano da A. Ghigi e F. P. Pomini: IV. Aracnidi.*

I. SCIACCHITANO - *Raccolte faunistiche compiute nel Gargano da Ghigi e F. P. Pomini: V. Anellidi.*

S. RUFFO - *Raccolte faunistiche compiute nel Gargano da A. Ghigi e F. P. Pomini: VI. Anfipodi.*

A. DE TOGNI - *Raccolte faunistiche compiute nel Gargano da A. Ghigi e F. P. Pomini: VII. Ropaloceri.*

L'Accademico GIORGI presenta la seguente Nota:

G. ARRIGHI - *Su un principio fondamentale della statica.*

Si espone una nuova trattazione del principio del «parallelogrammo delle forze» inserendola nel quadro generale di una esposizione più ristretta dei postulati della statica. Tale ordinamento consente la dimostrazione di alcuni enunciati che talvolta vengono presentati come postulati.

L'Accademico LEMAITRE presenta le seguenti Note:

G. LEMAITRE - *L'Hypothèse de l'atome primitif.*

On propose l'hypothèse suivant laquelle le Monde actuel résulte de la désintégration d'un atome unique. On montre comment les objections que soulèvent cette hypothèse peuvent être écartées.

G. LEMAITRE - *Quaternions et espace elliptique.*

Les quaternions sont utilisés pour obtenir les propriétés principales de l'espace elliptique en se mettant au point de vue de Kleins dans le programme d'Erlangen.

Il Cancelliere SALVIUCCI dà lettura del titolo e riassunto della seguente Nota presentata dall'Accademico PENSA:

G. PERRI - *Considerazioni sull'ovaia di Cavia Cobaja trattata con colchicina.*

L'Autore espone il risultato di sue ricerche su cavie trattate con colchicina per molti giorni, a diluizioni 1/50.000 1/100.000, alla dose di 1 cc per volta.

Gli effetti di questo trattamento possono essere così riassunti:

- 1) distruzione delle cellule del follicolo di Graaf;
- 2) alterazioni sull'ovocita che portano a forme di proliferazione anormale con figure simili a morule: effetto di una disordinata, anormale stimolazione sull'ovocita non più protetto dalle cellule del follicolo.

L'Autore pensa si tratti di una duplice azione della colchicina che agisce indirettamente distruggendo le cellule della granulosa del follicolo; ed in secondo tempo di una azione diretta sull'ovocita spingendolo ad una specie di partenogenesi.

L'Accademico PETRITSCH presenta per la iscrizione nelle « Relations de auctis scientiis tempore belli 1939-1947 » i seguenti manoscritti:

PETRITSCH und SKUDRZYT. - *Die Akustik und Elektroakustik in Deutschland und Oesterreich während der Jahre 1939 bis 1947.*

PETRITSCH und NOWOTNY. - *Funknavigation. - Zusammenstellung der wichtigsten fachtechnischen Veröffentlichungen von 1939 bis 1947.*

Presenta inoltre in omaggio un volume dal titolo: *Richard Meister. Geschichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. 1847-1947. Verlag Adolf Holzhausen. Wien 1947.*

L'Accademico RONDONI presenta la seguente Nota:

P. RONDONI - *Gruppi sulfidrilici nella funzione degli idrocarburi cancerogeni.*

È stato dimostrato nel nostro Laboratorio (POZZI, RONDONI e BELTRAMI) che il 3,4-benzopirene ha un'azione parzialmente inibitrice sulle catepsine; e (GABTANI) che quell'idrocarburo e l'altro pure cancerogeno, il metilcolantrene, inibiscono la digestione di gelatina ad opera di papaina, mentre tale azione *non* hanno alcuni idrocarburi *non* cancerogeni. Siccome si tratta di enzimi attivati da gruppi sulfidrilici, si è supposto che gli idrocarburi cancerogeni interferissero appunto con detti gruppi dell'enzima. Si sono pertanto fatte ricerche in vivo, iniettando endovena 3,4-benzopirene a ratti eppoi a varia distanza di tempo determinando il contenuto in gruppi sulfidrilici nelle proteine di vari organi; si è trovata una diminuzione di circa 22 % nelle proteine del fegato, minima o dubbia nel rene ed altri organi. Siccome si sa che il benzopirene si fissa largamente nel fegato, si pensa che si abbia a fare anche qui con un blocco parziale di gruppi sulfidrilici delle proteine. Infine si è cercato di precisare il meccanismo della inibizione parziale della digestione papainica da benzopirene: tale inibizione è soppressa dall'aggiunta di cisteina: essa si ha modesta anche se il benzopirene è sciolto — molecolarmente disperso — mediante caffeina; non dunque solo per idrocarburo in sospensione: il che fa pensare che si tratti non di un semplice fenomeno di adsorbimento ma di azione veramente chimica e rende più probabile l'ipotesi di una interferenza con gruppi specifici dell'enzima.

Il Cancelliere SALVIUCCI dà lettura del titolo e riassunto della seguente Nota presentata dall'Accademico SILVESTRI:

T. PERRI - *Azione dei Raggi Roentgen su embrioni e larve di anfib. III. Trapianti di complessi di abbozzi da embrioni irradiati su normali.*

Complessi di abbozzi cefalici e del dorso di embrioni di *Rana esculenta* trattati con dosi letali di raggi X vengono trapiantati su embrioni normali, seguendone il destino oltre la morte dei donatori.

L'Autore esamina così la suscettibilità differenziale di vari abbozzi e ne considera le conseguenze ch'egli pone in raffronto con quanto è già noto per il LiCl.

Il Cancelliere SALVIUCCI dà lettura del titolo e riassunto della seguente Nota presentata dall'Accademico TONIOLO:

U. BULI - *Cicli meristematici e radiazioni solari nella pineta di Ravenna.*

L'Autore sulla scorta di osservazioni eseguito sulle sequenze meristematiche dei tronchi di *Pinus pinca* delle pinete ravennati, riguardante una possibile periodicità nello spessore dei singoli meristemi legnosi, ha esteso su numerosi esemplari di piante l'esame comparativo, giungendo al risultato della sua effettiva esistenza. Tale periodicità ripete, con molta approssimazione, le fluttuazioni dell'attività solare, pur restando subordinata alle vicende del clima regionale, soprattutto per quanto si riferisce alle temperature estreme.

In questa nota preventiva egli cerca di dimostrare la corrispondenza dei cicli meristematici con l'andamento delle radiazioni solari, meno che negli inverni particolarmente rigidi; nonchè pone in evidenza lo sviluppo maggiore dei cicli meristematici nel lato orientale della pianta in confronto dei lati opposti.

In altro più completo studio, egli farà confronti con altri alberi della pineta di S. Rossore, sempre al limite settentrionale di questa pianta mediterranea e cercherà di illustrare le variazioni dello spessore meristematico con quelle climatiche delle stagioni meteorologiche salvate dalla guerra.

L'Accademico CONWAY presenta la seguente Nota:

A. W. CONWAY - *Quaternions ad quantum Mechanics.*

In modern theories such as the Relativistic Equation of DIRAC and the various types of meson fields the use of matrices is universal. Of course matrices are isomorphic with any algebra, but the quaternion has some advantage in ease of manipulation. There are two other advantages. Matrices often contain imaginaries which have no physical meaning. For example, one of the three PAULI matrices is imaginary. Another reason is that quaternions give a definite relation to space. The fifteen EDDINGTON matrices can be written down at once in quaternion form and their quality of commuting or anti-commuting is at once apparent. The meaning of the concomitants of the DIRAC equation and their construction become of trivial difficulty.

The quaternion can be interpreted as a vector in flat space of four dimensions. The rotation in four dimensional space has a simple monomial form. In the transfer to hyperbolic space we have a generalized LORENTZ transformation. In physical applications this transformation must transform a quaternion whose scalar is imaginary and vector real, into a quaternion of the same type. It thus

in general breaks down into a real conical rotation and the usual hyperbolic type. The spinor transformation follows easily. The meson field has been put into a general matrix form of 15 rows and columns. It can be greatly simplified in quaternion form. The vector meson field assumes an interesting « particle » form. The resulting flux-density becomes identical in appearance with the Poynting Vector of a MAXWELL field.

L'Accademico DAINELLI presenta la seguente Nota:

M. BERTOLANI - *La Datolite nella formazione ofiolitica appenninica.*

L'Accademico PIERANTONI presenta la seguente Nota:

L. MIRAGLIA - *Marmitte marine e bradisismi di Capo Vaticano.*

L'Autore studia dapprima il moto ondoso del mare con un nuovo metodo di osservazione, descrive quindi le marmitte di origine marina sulla cui genesi espone una nuova teoria; infine, avendo mostrato che le marmitte possono essere generate esclusivamente nella zona della battigia (nel linguaggio dei marinai la zona estrema della riva dove si rompe il flutto), arriva alla conclusione che quelle situate al disopra o al disotto di tale zona indicano un sollevamento o un abbassamento della costa, deducendo che la costa tirrenica della Calabria è attualmente in fase di abbassamento.

L'Accademico SEVERI presenta le seguenti Note:

M. VACCARO - *Sulla permutabilità dei frazionamenti elementari di un complesso topologico qualsiasi.*

Si studiano i frazionamenti elementari (nel senso ben conosciuto) dei complessi topologici e si stabiliscono tutti i casi possibili di permutabilità di due qualsiasi distinti di essi.

M. VACCARO - *Laterità e orientabilità delle varianti topologiche immerse in una varietà.*

Definita la laterità di una varietà (o, più in generale, di una pseudovarietà, in senso topologico) rispetto a una data varietà (o pseudovarietà) che la contenga, e ciò qualunque sia la differenza fra le loro dimensioni, si collega la detta laterità con l'orientabilità della varietà ambiente lungo la varietà subordinata considerata.

Il Cancelliere SALVIUCCI dà lettura del titolo e riassunto della seguente Nota presentata dall'Accademico URSPRUNG:

A. URSPRUNG und G. BLUM - *Zum Nachweis einer nichtosmotischen Saugkraft in lebenden Pflanzenzellen.*

SYMMARIVM. — LYON bestimmte die Saugkraft de Kartoffelknolle mit zwei verschiedenen Methoden, mit der Streifenmethode und mit der Saugkraftgleichung. Aus der häufigen Diskrepanz der beiden Werte wurde auf das Vorhandensein einer nicht-osmotischen Kraft geschlossen. Die Nachprüfung zeigte, dass die Resultate mit grossen Fehlern behaftet sind, sodass der Schlusss auf eine nicht-osmotische Kraft nicht berechtigt erscheint.

L'Accademico GARCIA SIÑERIZ presenta la seguente Nota:

J. GARCIA SIÑERIZ, *Investigacion sismica en Noreña (Asturias).*

Este trabajo tiene por objeto determinar la profundidad á que se encuentra la formación hullera asturiana, en la región de Noreña, para saber si es explo-table ó nó, desde el punte de vista económico. En sus conclusiones se establece que la cuenca carbonifera buscada se encuentra á profundidades variables, comprendidas dentro de los limites de explotabilidad y que con un solo sondeo mecánico de 600 metros de profundidad practicado en las cercanias del rio Nora, quedaria completamente reconocida.

L'Accademico HEYMANS presenta la seguente Nota:

C. HEYMANS - *Sur la réviviscence des centres nerveux après la mort apparente.*

C'est un fait bien connu que les différents centres nerveux, particulièrement les centres psycho-moteurs et respiratoire, sont rapidement paralysés lorsque la circulation sanguine est interrompue. Nous avons recherché, dans une série d'expériences, quelle est la possibilité et la capacité de réviviscence de différents centres nerveux après leur paralysie et leur mort apparente provoquées par l'arrêt complet de la circulation sanguine. Ces expériences ont démontré que les centres respiratoire, vasomoteur et cardio-régulateurs sont encore capables de récupérer leurs activités lorsque la circulation sanguine a été rétablie après une interruption complète atteignant une durée de 30 minutes. Ces centres nerveux sont, en effet, capables de récupérer leurs fonctions après une paralysie et une mort apparente provoquées par un arrêt du coeur et une interruption de la circulation sanguine d'une durée de 30 minutes. Cette durée peut être prolongée jusque 90 minutes sous l'influence d'une substance pharmacologique: le di-isopropylfluo-

rophosphonate. Certains centres nerveux, localisés dans la zone cérébrale corticale et hypothalamique, et indispensables à la survie normale et prolongée de l'organisme, sont toutefois déjà éliminés fonctionnellement d'une manière définitive et irréversible, après une interruption de la circulation sanguine et une mort apparente dépassant une durée de 5 à 10 minutes.

L'Accademico Soprannumerario STEIN presenta la seguente Nota:

P. DRUMAU - *Sur la récession des nébuleuses extra-galactiques.*

L'Accademico Soprannumerario GATTERER fa la seguente Comunicazione:

Ich beehre mich, der hohen Akademie das 1. Heft des 3. Bandes der *Spectrochimica Acta* vorzulegen. Es handelt sich um das einzige internationale Fachblatt für Spektrochemie, eine Wissenschaft, die besonders während der letzten zwei Dezennien ungeahnte Fortschritte gemacht hat und in immer steigendem Masse bei wissenschaftlichen und technischen Untersuchungen benutzt wird.

Die ersten zwei Bände der *Spectrochimica Acta* kamen bei Springer (Berlin) heraus. Nach dem Kriege teilte die Zeitschrift das Los so vieler anderer wissenschaftlichen Blätter, die ihr Erscheinen einstellen mussten. Allmählich mehrten sich aber die Stimmen aus allen Ländern, die die Wiederaufnahme der Zeitschrift dringend wünschten. Da die Schwierigkeiten für den Springer-Verlag unüberwindlich waren, legte Referent, der schon seit der Gründung des Blattes Mitherausgeber war, die Angelegenheit dem Heiligen Vater vor mit dem Vorschlage, das Blatt mit Zustimmung der Springer-Verlags im Verlag der Specola Vaticana herauszugeben, bis Springer wieder in der Lage wäre, es zu übernehmen. Der Heilige Vater gab in grosszügiger Weise seine Zustimmung und Referent benützte besonders die Studienreise nach den Vereinigten Staaten während des letzten Sommers, um allerorts einen Stab von geeigneten Herausgebern und Mitarbeitern zu werben. Nach Ueberwindung nicht geringer Schwierigkeiten liegt nunmehr das 1. Heft des Bandes 3 vor. Es enthält gediegene Originalarbeiten und Beiträge in den drei Kongresssprachen: 3 in englischer, 2 in französischer und 2 in deutscher Sprache. Auch die buchtechnische Ausführung macht der Poliglotta Vaticana alle Ehre.

Ohne Zweifel ist es ein grosses Verdienst, das sich der Heilige Stuhl durch die Wiederherausgabe der Zeitschrift um die Wissenschaft erwirbt, wie auch die vielen anerkennenden Stimmen von Spektroskopikern aus aller Herren Länder bekunden, ganz gleich welcher weltanschaulichen Richtung sie angehören. Ich möchte daher als Hauptherausgeber der Zeitschrift ersuchen, das Heft genauer

durchzusehen und Kollegen und Interessenten der Spektrochemie darauf aufmerksam zu machen, damit auf diese Weise die internationale Zusammenarbeit gefördert werde, die dem Heiligen Vater so sehr am Herzen liegt.

L'Accademico Soprannumerario ALBARINDA presenta in omaggio il volume dal titolo: *I libri editi dalla Biblioteca Vaticana. 1885-1947. Catalogo ragionato e illustrato.* — Città del Vaticano 1947.

L'opera contiene la descrizione bibliografica delle opere a stampa pubblicate dalla Biblioteca a partire dal pontificato di Leone XIII ai nostri giorni: in totale 250 opere, delle quali si riportano le esatte indicazioni tipografiche e bibliografiche, una sintesi del contenuto, gli indici contenuti in ogni volume. Un'ampia introduzione di carattere storico illustra l'opera complessiva della Biblioteca Vaticana nel campo editoriale, attraverso i secoli. Nel primo secolo della tipografia è da segnalare la collaborazione data dal suo Bibliotecario, Giovanni Andrea dei Bussi, all'edizione dei primi incunabili romani tra i quali la « Geografia » di Strabone e la « Storia naturale » di Plinio. Nella posteriore attività, promossa tra altri dal Bibliotecario Marcello Cervini, poi Marcello II, si incontrano altre opere di scienze come la « Aquatiliū animalium historiae (1557) di Ippolito Salviani. Tuttavia fino a Leone XIII l'attività editoriale della Biblioteca Vaticana restò alquanto dispersa; fu questo Pontefice a deliberare, per impulso del grande Bibliotecario Francesco Ehrle, l'inizio di serie regolari, che da allora sono state ininterrottamente proseguite. Esse si raccolgono in tre gruppi principali: Cataloghi dei manoscritti, collezione « Studi e testi », edizioni illustrate (includenti le riproduzioni fototipiche dei maggiori e più famosi manoscritti). L'opera editoriale è continuata anche durante le due grandi guerre che pur hanno tanto danneggiato la cultura di molti paesi; e si attende ora con ogni sforzo a intensificare il ritmo delle pubblicazioni, che sono note e apprezzate in ogni parte del mondo. Appare significativo che anche negli anni oscuri quando il mondo sembrava intento ad un'opera di distruzione, la Biblioteca Vaticana dimostrava praticamente con questa sua opera l'importanza che la cultura serba per la vita civile e la vita spirituale dei popoli.

L'Accademico Soprannumerario SCHMIDT presenta la seguente Nota:

W. SCHMIDT - *L'importanza del cavallo per l'origine e le immigrazioni degli Indo-Europei in Europa.*

La Tornata si chiude alle 19.30.

GRUPPI SULFIDRILICI NELLA FUNZIONE DEGLI IDROCARBURI CANCEROGENI(*)

PIETRO RONDONI

Accademico Pontificio

SVMMARIVM. — Hydrocarbura cancerogena quamdam vim inhibentem habent in papainam. Benzopyrenes, iniectus in murium venas, deminuit numerum complexuum -SH in iecinoris proteinis. Inhibens vis in papainam permanet etiam si benzopyrenes per caffeinam solvatur, vel si papaina per cisteinam (BAL) vivescat.

Probabile Auctori videtur mutuan actionem fieri inter complexus -SH et cancerogenum hydrocarburum.

Ricerche eseguite nel nostro laboratorio hanno dimostrato che il ben noto idrocarburo cancerogeno 3,4-benzopirene ha una azione parzialmente inibitrice sulle catepsine (POZZI, RONDONI e BELTRAMI); e che esso e l'altro idrocarburo potentemente cancerogeno, il metilcolantrene, inibiscono pure parzialmente la digestione della gelatina ad opera della papaina, mentre altri idrocarburi *non* cancerogeni non presentano questa proprietà (GAETANI). Siccome si tratta nelle catepsine di organi animali come nella papaina di proteasi attivate da gruppi sulfidrilici (-SH), così si è supposto che la inibizione da idrocarburi cancerogeni fosse riconducibile ad una qualche interferenza con questi gruppi degli enzimi. Che la funzione cancerogena possa in qualche modo estrinsecarsi mediante un qualche influenzamento delle proteine cellulari attraverso ad una interferenza coi loro gruppi -SH o comunque una modificazione del metabolismo del S è ammesso anche da CRABTREE in base ai due seguenti fatti: il bromobenzolo, che nell'organismo si combina con gruppi sulfidrilici ed è eliminato

(*) Nota presentata nella Tornata Ordinaria dell'8 febbraio 1948.

appunto come mercapturato inibisce, applicato sulla pelle, l'azione cancerogena del benzopirene (1944); anche l'aldeide maleica e citraconica hanno azione inibente o ritardante sulla funzione cancerogena di idrocarburi, probabilmente in quanto si combinano (acidi bibasici insaturi) con costituenti cellulari contenenti gruppi $-SH$ e così bloccano l'accesso all'idrocarburo che agirebbe appunto su enzimi cellulari attraverso a gruppi sulfidrilati.

Si è voluto vedere come si comportassero i gruppi $-SH$ di proteine di organi in animali previamente iniettati endovena col benzopirene. A tale scopo dei ratti sono stati da noi (RONDONI e BORETTI) iniettati endovena con sospensioni acquose dell'idrocarburo ed uccisi poi a varia distanza di tempo (fino a 21 giorni dopo). Furono determinati i gruppi in parola in estratti acquosi di fegato, rene, polmoni, muscoli, con un metodo corrispondente a quello di MIRSKY e ANSON, modificato (le proteine precipitate con acido tricloroacetico; al precipitato aggiunta cistina per ossidare i gruppi $-SH$, con riduzione a cisteina, la quale è determinata mediante riduzione di ferricianuro, il cui eccesso è titolato iodometricamente. Una determinazione parallela senza addizione di cistina permette di calcolare per differenza la sola cisteina derivata dalla riduzione della cistina ad opera di $-SH$).

Si riportano in una tabella i risultati per ratti trattati con benzopirene e ratti controllo.

TABELLA I.

Gruppi $-SH$ espressi in mgr cisteina per mgr N precipitabile con ac. tricloroacetico.

	Fegato	Rene	Muscoli	Polmone
Valori medi per 5 ratti non trattati	0,045 (0,052-0,035)	0,038 (0,045-0,029)	0,043 (0,052-0,035)	0,025 (0,029-0,021)
Valori medi per 6 ratti iniettati endovena con bzp. 1-21 giorni prima	0,035 (0,042-0,032)	0,030 (0,039-0,023)	0,041 (0,049-0,036)	0,021 (0,029-0,019)

(Le cifre fra parentesi esprimono l'ampiezza delle variazioni).

Si vede come le cifre nella serie trattata col bzp. siano generalmente più basse in confronto alla serie controllo, pur con molte sovrapposizioni. Non sapremmo dare importanza alle piccole differenze inerenti al muscolo ed al polmone: anche per il rene le differenze sono piccole e di incerto significato. Per il fegato l'abbassamento dei valori riportati merita considerazione, trattandosi di una diminuzione media di 22-23% circa dei gruppi tiolici chimicamente dimostrabili nelle proteine idrosolubili dell'organo. La diminuzione in parola corrisponde alle osservazioni di BOYLAND e WEIGERT secondo cui il bzp. iniettato endovena va a localizzarsi più largamente nel fegato, poi nel rene e meno ancora negli altri organi.

È stato determinato anche il contenuto in gruppi —SH di proteine (estratti c. s.) in tumori: tumori da bzp. di ratti, cancro Ehrlich di topo, carcinoma Walker di ratto: si sono trovati sempre valori molto bassi, inferiori a quelli del fegato e del rene normali, più bassi ancora nei tumori largamente necrosati. Così nei sarconi da bzp. del ratto si hanno valori come 0,031-0,020 (in mgr cisteina per mgr N precip. c. s.), mentre zone necrotiche dello stesso tumore danno 0,015; il cancro di Ehrlich presenta valori circa 0,030, lo stesso largamente necrotico 0,019. Probabilmente la necrosi implica demolizione di proteine ed asportazione di prodotti sulfidrilati di disintegrazione.

Infine abbiamo ripreso a studiare il fenomeno della inibizione della papaina da bzp. Lo abbiamo potuto confermare anche usando invece che sospensioni acquose dell'idrocarburo come nelle più vecchie ricerche anche soluzioni ottenute mediante caffeina. È noto infatti che il bzp. può essere tenuto in soluzione acquosa mediante caffeina: secondo BROCK, DRUCKREY e HAMPERL 10 ml di una soluzione 3% di caffeina tengono in soluzione 2 mgr di bzp. Un largo e più preciso studio sull'azione stabilizzante di purine rispetto ad idrocarburi policiclici si deve a WEIL-MALHERBE. Ora un certo grado di inibizione rispetto alla digestione papainica (gelatina come substrato) è dimostrato anche dall'idrocarburo in soluzione caffeinica, come mostra ad esempio l'esperimento seguente, tolto da uno dei nostri protocolli (RONDONI e BASSI).

TABELLA II.

Si apprestano 4 miscele con 5 ml soluzione papaina (pap. Merck sospens. 2%) e 2 ml puffer acetici pH 4,7, più le seguenti aggiunte:

miscela a) ml 7 acqua dist.

» b) ml 7 soluz. 3% caffeina

» c) ml 2 soluz. 3% caffeina + ml 5 soluz. bzp. 0,02% in soluz. caffeina 3%

» d) ml 7 soluz. bzp 0,02% in soluz. caffeina 3%

Dopo 1 h a 37° addizione di 10 ml gelatina 8% ovunque.

Titolazione al formolo con sol. NaOH $\frac{n}{20}$ dopo 2 e 4 ore

Risultati (incrementi acidità-formolo in ml):

	a	b	c	d
2 h	0,80	0,70	0,65	0,55
4 h	0,95	0,90	0,80	0,65

Qui ed in tutti gli esperimenti si è notata una leggera inibizione da caffeina sola. Ma l'inibizione ad opera della soluzione con la dose più alta di benzopirene è di gran lunga superiore: resta pur sempre un 25-28% di inibizione dovuta all'idrocarburo. Pare che essa sia più netta, se, come nell'esperimento surriportato, si lascia agire per un po' la soluzione bzp. sul sistema enzimatico prima di aggiungere il substrato. La dose di bzp. che opera il suddetto grado di inibizione è di mgr 1,4; ma anche la dose minore di bzp. (1 mgr) ha dato una inibizione di quasi 10%. Si può concludere che l'idrocarburo agisce non solo in sospensione e con meccanismo che potrebbe ritenersi piuttosto un meccanismo fisico (adsorbimento), ma anche in soluzione, allo stato di dispersione molecolare, in quella specie di combinazione molecolare (WEIL MALHERBE) che si ha colla caffeina.

Abbiamo voluto anche vedere se la inibizione è più o meno abolita dalla potente attivazione ottenibile mediante corpi sulfidrilati; ed anzitutto abbiamo usato cisteina (cloridato); e quindi, in esperimenti ancora in corso il BAL (British antilewisite), ossia dimercaptopropanol (preparato dall'Istituto Sieroterapico Milanese, che deve essere ringraziato).

Sia riportato un esperimento con cisteina:

TABELLA III.

Misccele enzimatiche:

- a) sol. papaina ml 5; puffer acet. pH. 4,7 ml 2; acqua ml 7,2; sol. 8% gelatina ml 10
 b) papaina c. s.; puffer c. s.; soluz. bzp. 0,02% in sol. caffeina 8% ml 7; acqua ml 0,2; gelatina c. s.
 c) papaina c. s.; puffer c. s.; acqua ml 7; sol. cloridr. cisteina $\frac{m}{10}$ ml 0,2; gelatina c. s.
 d) papaina c. s.; puffer c. s.; sol. caffeina 8% ml 7; cloridr. cisteina $\frac{m}{10}$ ml 0,2; gelatina c. s.
 e) papaina c. s.; puffer c. s.; sol. bzp. 0,02% in sol. caffeina 8% ml 7; cloridr. cisteina $\frac{m}{10}$ ml 0,2; gelatina c. s.

(Incrementi acidità-formolo in ml NaOH $\frac{n}{20}$ dopo 3 e 6 h)

	a	b	c	d	e
3 h	0,45	0,80	1,60	1,35	1,80
6 h	0,85	0,65	1,85	1,55	1,40

Si ricava da questi e simili esperimenti che la potente attivazione della proteolisi ad opera della cisteina sovrappiù la inibizione da benzopirene, ma non del tutto. Il bzp. (in soluzione caffeinica) attua una sia pure modesta inibizione del sistema enzimatico attivato, la quale va oltre quella dovuta alla sola caffeina (inibizione da caffeina + bzp. 24,4%; da caffeina sola 16,3%; onde circa 9% di inibizione è riferita al solo benzopirene).

Si riporta anche un esperimento col BAL.

TABELLA IV.

Miscela enzimatiche:

- a) Sol. papaina 2% ml 5; puffer acetici pH 4,7 ml. 2; acqua ml. 7; BAL ml 0,1; sol. gelatina 8% ml 10
- b) papaina c. s.; puffer c. s.; sol. caffeina 3% ml 7; BAL c. s.; gelatina c. s.
- c) papaina c. s.; puffer c. s.; sol. bzp. 0,02% in sol. caffeina 3% ml 7; BAL c. s.; gelatina c. s.
- d) papaina c. s.; puffer c. s.; acqua ml. 7,1; gelatina c. s.

Incremento acidità-formolo in ml. NaOH $\frac{n}{10}$:

	a	b	c	d
3 h	1,60	1,20	1,10	0,50
6 h	2,75	2,20	2,05	0,90

N. B. La concentrazione del BAL nella miscela totale (volume 24,1 ml) è circa $\frac{m}{90}$.

Si osserva una forte attivazione, la quale tuttavia, tenendo conto delle molarità, è piuttosto inferiore a quella da cisteina (nell'esperimento della tab. III la cisteina, messa in quantità di 0,2 di sol. $\frac{m}{10}$ nel volume totale viene ad essere in concentrazione $\frac{m}{1000}$ circa).

È questo un punto su cui occorrerebbe tornare per meglio appurare i rapporti fra gruppi —SH ed attivazione enzimatica. L'azione attivante del BAL sulla papaina è pure registrata da WEBB e HEYNINGEN. Qui vogliamo fare soltanto rilevare che una azione inibente si verifica pure ad opera della caffeina sola, ma è più spiccata colla presenza anche dell'idrocarburo in soluzione.

Si può concludere che il benzopirene in parte inibisce il sistema enzimatico proteolitico attivato da certi corpi sulfidrilati come la cisteina ed il BAL, se anche la inibizione è di grado modesto. Per confronto si può ricordare che secondo CALCUTT e NEWHOUSE l'azione fotodina-

mica del bzp. (su parameci) è parzialmente inibita dalla cisteina; che quindi intanto due azioni dell'idrocarburo, quella modificante un enzima proteolitico e quella tossica in presenza di radiazioni luminose su protozoi, sono dalla cisteina più o meno, ma non del tutto ostacolate. Per stare all'azione del benzopirene sulla funzione proteolitica della papaina, si può supporre, come già fu detto altrove, che l'idrocarburo interferisca con gruppi sulfidrilici della proteina-enzima; che l'addizione di gruppi sulfidrilici in eccesso sopraffaccia largamente tale parziale interferenza, onde non manca una buona attivazione da SH-gruppi; ma che tuttavia la interferenza si mantenga parzialmente, riportandosi anche sul complesso enzimatico attivato più o meno fortemente.

Queste osservazioni *in vitro* possono raccordarsi colle riportate ricerche *in vivo*, concordando nel farci ammettere come probabile un ingranaggio del benzopirene nel metabolismo dell'S e in particolare un'azione su costituenti cellulari sulfidrilati. Non è tuttavia detto che tutto il meccanismo d'azione del cancerogeno si riduca ad una reazione con gruppi sulfidrilici; ma questa può essere un primo e parziale attacco, che si integra con ben più estese modificazioni di costituenti cellulari, modificazioni forse più di natura chimico-fisica e interessanti la ultrastruttura del protoplasma.

BIBLIOGRAFIA

- BOYLAND E. a. WEIGERT F., (1947), « Brit. med. Bull. », 4, n. 5-6.
- BROOCK N., H. DRUCKREY u. H. HAMPERL (1938), « Arch. f. exper. Path. u. Pharm », 189, 709.
- CALCUTT G. a. NEWHOUSE I. P., (1948), « Nature », 161, 53.
- CRASTRE H. G., (1944), « Cancer research », 4, 688;
— (1945) ibid. 5, 346.
- GAETANI E., (1946), « Tumori », 32, 165.
- MIRSKY A. E. a. ANSON M. L., (1935), « Journ. gen. Physiol. » 18, 307.
- POZZI L., (1935), « Memorie R. Accad. d'Italia », Cl. Sci. fis. 6, 193.
- RONDONI P. e BELTRAMI W., (1937), « Enzymologia », 3, 251.
- WEBB E. C. a. v. HEYNINGEN R., (1947), « Biochem. Journ. », 41, 74.
- WEIL-MALHERBE H., (1946), « Biochem. Journ. », 40, 351.

SUR LA SURVIE ET LA REVIVISCENCE DE DIFFERENTS CENTRES NERVEUX APRES LA MORT APPARENTE(*)

CORNEILLE HEYMANS

Académicien Pontifical

SVMMARIVM. — Centra respiratoria, vasomotoria et cardiomoderatoria reviviscere possunt post apparentem hominis mortem, etiam diuturnam, quae ex intermisso sanguinis cursu effecta sit. Quaedam vero nervosa centra, quae sunt in regionibus corticalibus et hypothalamicis centralis systematis nervi, cito inhibentur ita ut reviviscere non possint.

De nombreux expérimentateurs se sont déjà préoccupés du problème de la survie et de la capacité de réviviscence de différents centres nerveux après la paralysie de leurs fonctions et leur mort apparente pendant un temps plus ou moins prolongé.

C'est un fait bien connu que différentes cellules et certains organes ne sont pas irréversiblement paralysés et privés définitivement de leurs activités physiologiques fondamentales, même après des périodes prolongées de mort apparente. C'est ainsi que le coeur peut se remettre à battre, même des jours après l'arrêt de ses contractions, et que différentes cellules peuvent à nouveau se multiplier lorsqu'on les cultive in vitro des jours après la mort de l'organisme auquel on les a prélevées. La mort des différents éléments et différents organes qui constituent un être vivant n'est donc pas un processus identique pour les différentes cellules et tissus qui le composent.

On admettait assez généralement en physiologie que les cellules du système nerveux central et plus particulièrement celles qui consti-

(*) Nota presentata nella Tornata dell' 8 settembre 1948.

tuent le centre respiratoire, sont spécialement sensibles à l'arrêt de la circulation sanguine et sont très rapidement paralysées d'une manière irréversible, donc mortes, lorsque la circulation sanguine est interrompue. L'arrêt de la respiration était ainsi considéré comme un critère de la mort réelle de l'organisme.

Nous avons effectué une série d'expériences chez le chien, afin de déterminer après combien de temps les principaux centres nerveux, à savoir le centre respiratoire, le centre vasomoteur et les centres régulateurs de la fréquence cardiaque, qui sont tous localisés dans la région bulbaire du système nerveux central, sont en fait paralysés d'une manière irréversible lorsque la circulation sanguine est interrompue.

Des expériences réalisées au moyen de différentes méthodes qui permettent d'interrompre et ensuite de rétablir la circulation sanguine, ont montré que les centres respiratoire, vasomoteurs et cardiorégulateurs, tout en étant rapidement paralysés lorsque la circulation sanguine est interrompue, sont cependant capables de revivre et de reprendre leurs fonctions physiologiques lorsque la circulation a été rétablie, même après une interruption complète atteignant une durée limite de trente minutes. Au delà de cette durée d'arrêt circulatoire, ces centres nerveux sont toutefois, en général, paralysés et lésés d'une manière irréversible; ils sont donc, dans ces conditions, réellement morts. Cette possibilité et cette durée de réviviscence de ces centres nerveux a pu être prolongée jusqu'à la limite de 90 minutes d'arrêt circulatoire, lorsque ces centres avaient été soumis au préalable à l'action d'une substance pharmacologique: le di-isopropylfluorophosphonate (DFP).

En ce qui concerne la résistance à l'arrêt circulatoire et la capacité de survie et de réviviscence de certains centres nerveux corticaux et hypothalamiques qui sont indispensables à la vie normale et prolongée de l'organisme, nos expériences ont mis en évidence que ces centres sont notablement plus sensibles à l'arrêt circulatoire que les centres bulbaires. Un arrêt complet de la circulation sanguine dépassant 5 à 10 minutes en moyenne, paralyse, en effet, ces centres corticaux et hypothalamiques d'une manière irréversible. Après une interruption de la circulation sanguine, après un arrêt du coeur dépassant cette limite, l'organisme peut récupérer une respiration, une pression sanguine et une fréquence cardiaque normales, lorsque les contractions cardiaques et la circulation ont été rétablies; mais cet

organisme succombera des heures ou des jours plus tard, en conséquence de la paralysie irréversible, de la mort, de certains centres situés dans les régions corticales et hypothalamiques du système nerveux central.

Il y a lieu, croyons nous, de tenir compte de ces faits expérimentaux lorsqu'il s'agit d'établir une distinction entre la mort apparente et la mort effective de l'organisme, et lorsqu'on se voit obligé de fixer un critère entre la mort apparente et la mort réelle. Les médecins devront également tenir compte de ces faits, lorsqu'ils se trouvent dans l'obligation d'intervenir thérapeutiquement en cas d'arrêt cardiaque et circulatoire.

L'IMPORTANZA DEL CAVALLO
PER L'ORIGINE E LE IMMIGRAZIONI
DEGLI INDO-EUROPEI IN EUROPA (*)

P. WILHELM SCHMIDT S. V. D.
Accademico Pontificio Soprannumerario

SUMMARIVM. — Demonstrantur intimae relationes domesticationis equorum cum populis indo-europaeis et tres diversae eorum immigrationes in Europam.

È noto che gli Indo-Europei primitivi più che agricoltori erano nomadi-pastori, allevatori di pecore, buoi e cavalli. Ora, dopo il quinto millennio a. Cr. non c'erano più cavalli selvaggi nell'Europa settentrionale e centrale dai quali si sarebbero potuti derivare cavalli addomesticati. Non potevano allora gli Indo-Europei avere ottenuto il loro cavallo domestico se non da fuori dell'Europa. Viene in questione solo il centro primario dell'addomesticamento del cavallo che si trova nelle steppe al Sud dell'Altai nell'Asia Centrale, dove le tribù turche erano diventate i primi domesticatori del cavallo. Siccome le loro regioni si estendevano anche fino al Turkestan occidentale, era qui dove il centro vicino della formazione degli Indo-Europei poteva apprendere l'addomesticamento del cavallo.

Nuove ricerche hanno mostrato che da questo centro si sono prodotte tre immigrazioni degli Indo-Europei in Europa.

La prima, verso il principio del secondo millennio a. Cr., era piuttosto una infiltrazione lunga e lenta; il cavallo non aveva allora ancora

(*) Nota presentata nella Tornata dell'8 febbraio 1948.

ottenuto il suo pieno sviluppo, e perciò il suo influsso economico e sociale era meno importante e il numero dei cavalli introdotti non era grande.

La seconda immigrazione era piuttosto una invasione di tribù indo-europee nell'Asia Minore e di là anche nella Grecia; si effettuava con carri armati (*Streitwagen*), ai quali erano attaccati dei cavalli militarmente disciplinati. Questa invasione nella Grecia avveniva nella prima metà del secondo millennio a. Cr. con delle tribù elleniche e alcune illiriche.

La terza, anch'essa una invasione, si compiva nella seconda metà del secondo millennio a. Cr., e si estendeva dalla Russia Meridionale e Centrale attraverso l'Ungheria e la Polonia nell'Europa Centrale, Settentrionale e Occidentale. Era un'invasione di cavalieri delle tribù degli Itali, Illirici, Germani e Celti.

Nelle due ultime invasioni l'uso militare del cavallo in grandi quantità promoveva fortemente la perfezione della briglia. Si trattava specialmente di avere un mezzo per dirigere il cavallo in modo più energico e anche elastico. Questo mezzo fu trovato introducendo nella bocca del cavallo il morso, prima in forma di corda, poi in legno o osso, più tardi in bronzo o ferro. L'ultima invasione dei popoli cavalieri perfezionava questo mezzo con stanghette (*Trense*) ai due lati del morso.

Tutte queste questioni sono trattate più in dettaglio nel vol. II del mio libro *Rassen und Volker in Vorgeschichte und Geschichte des Abendlandes* (Lucerna, I. Stocker 1946, pag. 87-208) e nella mia conferenza: *Die erste Ankunft des Pferdes im Abendlande*, letta nel 3° Congresso Internazionale delle scienze antropologiche ed etnologiche di Bruxelles, 15-22 agosto 1946.

SU UN PRINCIPIO FONDAMENTALE DELLA STATICA (*)

GINO ARRIGHI

SYMMARIVM. — Novam illius legis, quae «parallelogramma virium» vocatur, demonstrationem Auctor tradit; qua ratione id obtinetur, ut fieri possit demonstratio quorundam principiorum, quae antea saepe postulata recensebantur.

§ 1. — In questa nota ci proponiamo precipuamente una dimostrazione analitica della «legge del parallelogrammo delle forze» la quale richieda un minor numero di condizioni analitiche relativamente alla funzione d'angolo. La equazione funzionale da noi trovata e risolta nel campo delle funzioni continue ci permette di compiere un passo non breve in tal senso giacchè, a parte la continuità che è pur ora richiesta, in luogo della esistenza di tutte le derivate in un punto (zero) è ora semplicemente richiesta la esistenza della sola derivata seconda generalizzata in tal punto⁽¹⁾.

Reputiamo però che tale dimostrazione, nell'ordine di una critica ai fondamenti della statica, ha da vedersi nel quadro più ampio di una postulazione che, tenendo conto della immediatezza sperimentale o intuitiva che convengono a qualunque parte della fisica presenti un

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi nella Tornata dell' 8 febbraio 1948.

(¹) LEONIDA-TONELLI, *Serie trigonometriche*. Zanichelli, Bologna, 1928, Cap. II, pag. 87.

carattere di minimo. Pertanto in tale senso abbiamo veduto anche questo problema di notevole interesse per la meccanica la quale, d'altronde, trova già trattati e approfonditi i corrispondenti problemi per altre scienze. Si vedrà così, e ciò sarà rapidamente accennato, che non pochi enunciati talvolta presentati quali postulati risultano dimostrabili.

A base del nostro studio abbiamo assunto quale definizione di forza, quella fornita da S. E. GIOVANNI GIORGI in quanto, per la sua precisione e accuratezza è stata preferita alle altre come più immediata e idonea a fornire una opportuna schematizzazione formale delle definizioni di equivalenza e di equilibrio. Riportiamo qui di seguito tale ⁽¹⁾.

DEFINIZIONE I. — *Forza è qualunque azione fisica, applicabile o removibile a volontà, che abbia gli stessi effetti meccanici come un filo teso, paragonabile e misurabile per confronto con altro determinato filo teso, assunto come campione.*

Indicando con T, S, S', \dots i sistemi, ovverosia aggregati, di forze e con $S + S'$ l'aggregato di due sistemi S e S' ovverosia l'assieme di tutte le forze che costituiscono S e S' , rappresenteremo col simbolo (S) la totalità degli effetti meccanici che, per esservi applicato il sistema di forze S , sono determinati in un sistema materiale M il quale ad un istante t_0 ha M_0 e C_0 quali configurazione e caratteristiche meccaniche. In realtà a tale simbolo avremmo dovuto apporre le indicazioni relative agli enti predetti ma che riteniamo come sottintese: ciò per semplicità di scrittura e per il fatto che nei ragionamenti che seguono si chiede che tale scelta sia fatta con totale arbitrarietà fra le compatibili anche, naturalmente, circa le possibilità di agire dei sistemi di forze. Premesso questo si pone

DEFINIZIONE II. — *Due sistemi, di forze S e S' , sono equivalenti quando, con un altro sistema T arbitrario, si abbia l'equivalenza degli effetti meccanici, espressa col simbolismo $(T + S) = (T + S')$*

Dal carattere di equalità di tale definizione seguono le proprietà riflessive, simmetrica e transitiva della equivalenza.

DEFINIZIONE III. — *Un sistema S è in equilibrio quando, con un sistema T arbitrario, si abbia $(T + S) = (T)$.*

⁽¹⁾ GIOVANNI GIORGI, *I postulati della statica*. «Commentationes» della Pontificia Academia Scientiarum. Anno VII (1943), Vol. VII, n. 18.

ASSIOMA I. - *I caratteri di equivalenza ed equilibrio dei sistemi permangono per spostamenti rigidi dei sistemi stessi.*

A questo punto giova osservare che possono immediatamente dimostrarsi le note proprietà circa le aggregazioni di sistemi in equilibrio od equivalenti alcune delle quali sono talvolta presentate come postulati. Discende altresì che condizione necessaria e sufficiente affinché una forza sia in equilibrio è che la sua grandezza sia nulla.

§ 2. - Posti tali preliminari, dal criterio seguito per la misura della grandezza delle forze segue che la « legge del parallelogrammo » è provata nel caso particolare in cui le due forze abbiano direzione e senso, oltre che punto d'applicazione, identici, ma per procedere oltre è opportuno porre

POSTULATO I. *Condizione necessaria per l'equivalenza di due forze, entrambi non nulle, è che abbiano la stessa direzione.*

POSTULATO II. *Il sistema di due forze con grandezza e punto d'applicazione identici (non equiverse se con la stessa linea d'azione) è equivalente ad una forza con lo stesso punto d'applicazione (resultante).*

Dove la esclusione in inciso si riferisce a caso in cui la proprietà stessa è già provata. La risultante, quando non sia nulla, non può avere linea d'azione distinta dall'asse di simmetria del sistema altrimenti una rotazione di questo di ampiezza π attorno al predetto asse, rotazione che lascia inalterato il sistema, ci mostrerebbe la equivalenza di due forze con direzioni diverse e ciò contrariamente al postulato I; pertanto, detta x l'ampiezza dell'angolo (convesso o concavo) delle due linee d'azione orientate, a la grandezza comune delle due forze, \vec{i} il vettore unitario dell'asse predetto volto all'interno dell'angolo (indeterminato per $x = \pi$), il vettore rappresentativo della risultante (escluso il caso citato) è fornito dalla

$$\vec{u} = f(a, x) \vec{i}$$

essendo a e x le uniche variabili da prendersi in considerazione. Con ragionamento dimensionale e ponendo $f(1, x) = 2\varphi(x)$ si trova essere

$$[1] \quad \vec{u} = 2\varphi(x) a \vec{i}$$

dove: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(2\pi - x) = -\varphi(x)$. Poniamo adesso

ASSIOMA II. - *La grandezza della risultante è funzione continua dell'angolo delle due forze del sistema.*

Quindi, poichè dall'ultima delle precedenti si ha $\varphi(\pi) = 0$, segue che il sistema di due forze con lo stesso punto d'applicazione e vettori rappresentativi opposti è in equilibrio e che la [1] è comunque vera senza più la restrizione precedentemente fatta. Notiamo altresì che, con decomposizioni rese lecite per quanto fin qui detto, la « legge del parallelogrammo » è provata ora nel caso in cui le due forze, aventi direzione e punto d'applicazione identici, hanno senso e grandezza anche diversi. Segue pure che condizione necessaria e sufficiente per l'equivalenza di due forze con linea d'azione e punto d'applicazione identici è la eguaglianza dei loro vettori rappresentativi e che il sistema indicato nel postulato II non è in equilibrio quando le sue due forze hanno linee d'azione distinte. Ritornando alla [1] ci proponiamo adesso la determinazione della $\varphi(x)$ che ivi compare e per la quale, ricapitolando, si ha

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(\pi) = 0, \quad \varphi(2\pi) = -1$$

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{per } 0 \leq x < \pi, \quad \varphi(x) < 0 \quad \text{per } \pi < x \leq 2\pi$$

cioè la risultante è volta all'interno dell'angolo convesso delle due linee d'azione orientate.

Dette F_1 e F_2 le forze costituenti il sistema in parola, si considerino altre forze F_3 e F_4 con grandezza e punto d'applicazione identici a quelli delle precedenti e complanari con esse, essendo inoltre: $\text{ang}(F_3, F_4) = \text{ang}(F_1, F_2) = x$, $\text{ang}(F_1, F_3) = \text{ang}(F_2, F_4) = y$ con x e y non coscavi. Considerando che la risultante di F_1 e F_2 forma un angolo di ampiezza y con quella di F_3 e F_4 e la loro comune grandezza è $2\varphi(x)a$ e che la risultante di F_1 e F_4 ha la stessa linea d'azione della risultante di F_2 e F_3 , tenendo conto di quanto sopra, si ricava

$$4\varphi(x)\varphi(y)a = 2\varphi(x+y)a + 2\varphi(x-y)a$$

ovvero

$$[2] \quad 2\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y)$$

da cui discende subito: $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Dalla equazione funzionale [2] segue

$$\varphi(x) \frac{\varphi(y) - 2\varphi(0) + \varphi(-y)}{y^2} = \frac{\varphi(x+y) - 2\varphi(x) + \varphi(x-y)}{y^2}$$

quindi, quando esiste (finita) la derivata seconda generalizzata di $\varphi(x)$ nel punto $x=0$ ovverosia il

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi(y) - 2\varphi(0) + \varphi(-y)}{y^2} = k^2 \quad (\text{con } k \text{ reale o immaginario puro})$$

si avrà

$$D^2 \varphi(x) = k^2 \varphi(x)$$

essendo D^2 il simbolo di derivazione seconda generalizzata cioè

$$D^2 \varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+y) - 2\varphi(x) + \varphi(x-y)}{y^2}$$

Nel nostro caso non può aversi $k^2 = 0$ altrimenti, per un teorema di SCHWARTZ⁽¹⁾, avremmo che $\varphi(x)$ è una funzione, lineare; ma, tenendo conto delle $\varphi(0)=1$ e $\varphi(-x)=\varphi(x)$, resulterebbe sempre $\varphi(x)=1$ il che non è. Atteso il carattere di continuità di $\varphi(x)$ esiste una funzione (continua) $\psi(x)$ tale che $D^2 \psi(x) = k^2 \psi(x)$, dove D^2 è il simbolo di derivazione seconda ordinaria, d'altra parte è $D^2 \psi(x) = D^2 \varphi(x)$ e quindi

$$D^2[\varphi(x) - \psi(x)] = 0.$$

Da qui, per il precitato teorema di SCHWARTZ, discende

$$\varphi(x) = \psi(x) + px = q \quad (\text{con } p \text{ e } q \text{ costanti})$$

la quale ci assicura la esistenza della derivata seconda ordinaria di $\varphi(x)$ eguale a quella della $\psi(x)$. Avremo in definitiva la equazione differenziale ordinaria

$$D^2 \varphi(x) = k^2 \varphi(x)$$

il cui integrale generale

$$c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} \quad (\text{con } c_1 \text{ e } c_2 \text{ costanti arbitrarie}),$$

tenendo conto che $\varphi(0)=1$, $\varphi(\pi)=0$, $\varphi(-x)=\varphi(x)$, ci fornisce $\varphi(x)=\cos \frac{x}{2}$.

⁽¹⁾ Opera citata in nota ⁽¹⁾ - Cap. II, pag. 96.

Pertanto, tenendo conto della [1], la «legge del parallelogramma», è provata nel caso particolare in cui le due forze abbiano eguale grandezza e, con facili successive generalizzazioni che si valgono volta a volta dei risultati precedentemente ottenuti⁽¹⁾, risulta infine completamente dimostrata nel caso più generale.

§ 3. - Prima di concludere queste note osserviamo che, subito dopo la constatazione dell'equilibrio di un sistema costituito da due forze con vettori opposti rappresentativi e lo stesso punto d'applicazione fatto nel precedente paragrafo, possono immediatamente dimostrarsi le note proprietà circa le forze opposte ed i sistemi opposti agenti sopra i corpi rigidi quando si ponga l'ulteriore

POSTULATO III. - *Nell'agire sopra un corpo rigido, due forze con linea d'azione, senso e grandezza identici sono equivalenti.*

Ancora relativamente alle forze agenti sopra un corpo rigido siamo adesso in grado di risolvere i noti problemi di composizione e decomposizione. Il carattere di tipo, cioè la non equivalenza fra due qualunque di essi, per i sistemi ridotti (due forze sghembe, forza non nulla, coppia, equilibrio) ai quali ci si può sempre ridurre coi metodi testè accennati, può provarsi immediatamente con la introduzione di un nuovo postulato che potremmo, ad esempio, scegliere nella forma

POSTULATO IV. - *Esiste una coppia che non è in equilibrio.*

⁽¹⁾ VINCENZO AMICI, *Corso elementare di meccanica ed idraulica*. Ricordi, Firenze, 1840, Vol. I, Nota II, pag. 336, penultimo capoverso sino alla fine. Tale dimostrazione può evidentemente semplificarsi ancora.

L'HYPOTHÈSE DE L'ATOME PRIMITIF (*)

GEORGES LEMAITRE

Académicien Pontifical

SVMMARIVM. — Auctor hypothesim proponit qua mundus ortum habeat ex unius atomi disintegratione, ostenditque qua ratione superentur ea quae contra obici possint.

Un des portraits qui nous est parvenu, du philosophe et mathématicien RENÉ DESCARTES est accompagné d'une devise qu'il paraît convenable de rappeler au début de cet exposé: *Mundus est fabula*. Le monde est une belle histoire que chaque génération s'efforce d'améliorer. Les tourbillons de DESCARTES n'ont pas survécu aux progrès des sciences; peut-être pourtant reste-il quelque chose de l'attitude mentale qui faisait dire à DESCARTES *Mundus est fabula* dans ce que POINCARÉ appelait plus tard les hypothèses cosmogoniques par lesquelles l'homme ne peut s'empêcher d'essayer de se raconter l'histoire de l'univers et de reconstituer son évolution passée.

Le problème cosmogonique a commencé à se poser d'une manière précise, lorsque, à la suite des recherches de GALILÉE puis de NEWTON, les lois de la mécanique ont été découvertes. L'existence de ces lois a enlevé, dans une certaine mesure, l'arbitraire qui avait jusque là régné dans les conceptions cosmogoniques. Pour la mécanique, l'évolution d'un système matériel est entièrement déterminée, et peut se calculer, lorsqu'on connaît ce que les mathématiciens appellent les conditions initiales et le but de la cosmogonie est de trouver des conditions

(*) Nota presentata nella Tornata Ordinaria dell'8 febbraio 1948 ed oggetto della Conferenza tenuta dall'Autore alla Accademia Belgica il 10 febbraio 1948.

initiales présentant quelque caractère de simplicité et telles que l'univers actuel a pu en résulter par le jeu des lois connues.

Assurément on peut se demander si les lois, qui sont valables à l'endroit où nous sommes et à l'époque où nous vivons, sont encore valables au loin, là où nous ne pouvons penser en entreprendre la vérification et si elles ont eu cours dans le lointain passé. Le problème cosmogonique peut être abordé dans des dispositions d'esprit les plus diverses. Ceux dont la disposition d'esprit est surtout de ne jamais rien admettre qui ne soit absolument certain, feront sans doute mieux d'y renoncer. Aborder le problème cosmogonique comporte nécessairement un certain risque. Ce n'est pas seulement le risque de perdre son temps à essayer de résoudre un problème qui pourrait être insoluble, c'est aussi le danger de s'égarer. Mais ce risque n'est-il pas compensé par l'espoir d'arriver à une solution, à une conception du monde dans toute son étendue actuelle et dans toute la durée de son évolution passée, conception dont la validité pourrait s'étayer sur sur quelque confirmation expérimentale?

En essayant de vous expliquer l'hypothèse de l'atome primitif, je chercherai à vous faire comprendre en quoi elle consiste, plutôt que de discuter la portée exacte des arguments qui l'étaient. Je pense d'ailleurs qu'une conclusion définitive ne peut être apportée à l'heure actuelle et qu'une telle conclusion dépendra du résultat de calculs difficiles qui n'ont pas encore pu être effectués et dont dépend la confrontation de l'hypothèse avec les faits expérimentaux. Ceux-ci la confirmeront peut-être, ou peut-être aussi lui feront-ils partager le sort des tourbillons de DESCARTES et de beaucoup d'autres hypothèses oubliées.

Après la mécanique, c'est naturellement l'astronomie qui apporte à notre problème la contribution la plus essentielle en nous décrivant quel est l'état présent du monde autour de nous.

De même que COPERNIC, lançant la terre dans l'espace, nous avait appris que le lieu de l'intelligence n'était qu'un gros caillou tournant avec quelques autres autour de l'astre incomparable, au centre de notre système, le soleil; d'une façon semblable les progrès ultérieurs nous ont appris que le soleil, n'est qu'une étoile parmi beaucoup d'autres. C'est même une étoile classée parmi les naines une dizaine

de fois moins massive et des milliers de fois moins brillante que certaines autres étoiles, dites géantes.

L'étoile la plus proche est située à quatre années de lumière, distance bien grande si on pense que la lumière ne met que huit minutes, pour parcourir les cent cinquante millions de kilomètres qui nous séparent du soleil.

Le nombre d'étoiles qui peuvent être aperçues dans les grands télescopes est d'un milliard environ et leur répartition entre les diverses magnitudes par lesquelles on mesure leur éclat permet d'estimer leur nombre total à près de cent milliards avec une masse totale de cent milliards de fois celle du soleil.

Ces étoiles forment avec des nébuleuses qui leur sont associées ce qu'on appelle la galaxie et ces nébuleuses sont dites des nébuleuses galactiques, c'est à dire faisant partie de la galaxie.

La galaxie est un système aplati et la voie lactée, d'où lui vient son nom, est formée des régions les plus lointaines vues de l'intérieur, suivant le plan de symétrie du système. Il s'y présente une grande accumulation d'étoiles et de nébuleuses galactiques qui fait tout le tour du ciel.

La galaxie est animée d'un mouvement de rotation autour d'un centre situé à trente mille années environ. La vitesse du soleil autour de ce centre est de trois cent kilomètres par seconde, vitesse grande, au point de vue astronomique, puisqu'elle est dix fois celle de la terre autour du soleil ou quinze fois celle du soleil par rapport aux étoiles qui l'entourent.

En dehors de la galaxie, il existe des galaxies. Le mot galaxie est donc employé comme un nom propre pour désigner le système d'étoiles dont nous venons de parler, il est employé comme nom commun pour désigner des systèmes semblables à celui-ci mais situé en dehors de lui. On comprend ainsi comment ces galaxies sont aussi appelées des nébuleuses extra-galactiques; de même que l'on peut dire que les étoiles sont des soleils situés en dehors du système solaire.

Les plus proches des nébuleuses extra-galactiques sont les nuées de Magellan, puis la grande nébuleuse d'Andromède, elles forment avec quelques autres ce qu'on appelle l'amas local et notre galaxie en fait partie.

Plus loin, on observe d'autres nébuleuses, réductions en petit et en moins brillant de ces grandes nébuleuses. Ce sont, en fait, des objets semblables mais situés plus loin. On en observe jusqu'à une distance estimée à près d'un milliard d'années. Ces nébuleuses sont situées à des distances mutuelles de un million et demi d'années leur distribution présente de grandes fluctuations de densité, mais sans aucune tendance à une diminution de densité dans les régions extérieures, de telle façon qu'il n'y a aucune indication que nous soyons parvenus à la limite du système des nébuleuses comme nous sommes parvenus à observer la région extérieure de la galaxie, là où les étoiles commencent à se raréfier.

En outre des simples fluctuations dans la distribution des nébuleuses extra-galactiques, il existe de véritables amas de nébuleuses où plusieurs centaines de nébuleuses sont rassemblées à des distances une dizaine de fois moins grande que leur distance normale.

Ces amas ont, d'un point de vue technique, joué un rôle essentiel pour l'étude des nébuleuses, puisqu'ils nous présentent plusieurs centaines d'objets situés à la même distance de nous. Ils ont, entre autres, montré qu'il est très rare d'observer une nébuleuse dix fois plus brillante ou dix fois moins brillante que la moyenne, tandis que cela est courant pour des étoiles. La détermination des distances relatives des nébuleuses, et surtout des amas de nébuleuses, est donc comparativement un problème facile.

A en juger par la position des raies de leur spectre, les nébuleuses sont animées de vitesses extrêmement grandes. Dans l'amas le plus proche, celui de Virgo, les vitesses observées s'échelonnent de zéro jusqu'à trois mille kilomètres par seconde. En outre de cette grande dispersion des vitesses dans un même amas, il y a un mouvement moyen d'éloignement qui est d'autant plus grand que la distance de l'amas est plus grande.

Un phénomène semblable s'observe pour les nébuleuses isolées. La vitesse d'éloignement est telle qu'elle suffirait pour parcourir la distance qui nous sépare de la nébuleuse en question en deux milliards d'années.

C'est en cela que consiste l'expansion du système des nébuleuses ou expansion de l'univers.

Si l'astronomie et la mécanique céleste ont une part essentielle pour poser le problème cosmogonique, il est une troisième science qui lui apporte une contribution importante, c'est la physique.

La matière est radioactive. La radioactivité est un phénomène de grande importance au point de vue cosmogonique, parce que c'est un phénomène qui s'épuise et donc un phénomène qui a du être plus important jadis.

Le radium disparaît de moitié en seize cent ans. Si nous pouvons encore trouver du radium sur notre vieille terre, c'est parce que il existe un corps radioactif de vie plus longue, l'ancêtre du radium, l'uranium. Celui-ci s'épuise de moitié en 4,4 milliard d'années, en donnant lieu à toute une série de produits parmi lesquels se trouve le radium.

Laisant de côtés les détails de ces transformations, on peut dire que finalement l'uranium s'est brisé en un atome de plomb et huit atomes d'hélium. Ces derniers sont éjectés avec de grandes vitesses et constituent les rayons alpha.

S'il existait un minerais d'uranium vieux de quatre milliards d'années, il devrait contenir autant de plomb que d'uranium. Un tel minerais n'existe pas. On conçoit que l'observation de la teneur en plomb des minerais d'uranium trouvés dans les diverses couches géologiques puisse fixer la durée de celles-ci; on trouve ainsi qu'il y a des roches vieilles de deux milliards d'années.

Mais l'uranium lui-même d'où vient-il? A-t-il lui-même un parent disparu? Existe-il depuis beaucoup plus que quatre milliards d'années? Mais alors qu'est devenu le plomb produit? Il n'y a pas beaucoup plus de plomb que d'uranium.

Plus récemment il est apparu que la radioactivité, loin d'être un phénomène spécial à quelques familles de corps était un phénomène tout à fait général.

Il n'y a pas que le plomb qui soit un élément stable produit par la désintégration d'un corps radioactif. A côté de la radioactivité naturelle existe la radioactivité artificielle qui montre que tous les corps stables ont pu être le produit de la désintégration de corps radioactifs qu'il est possible de produire artificiellement. Ces corps n'existent plus, sans doute parcequ'il n'y a pas dans leur ascendance un ancêtre tel que

l'uranium ayant une vie moyenne suffisante, mais on peut artificiellement leur faire reparcourir, en sens inverse, les derniers stades que parcourent encore les éléments des familles radioactives naturelles.

L'hypothèse suivant laquelle tous les corps actuels résultent de transformations radioactives a donc trouvé récemment une certaine base expérimentale.

Cette hypothèse a pourtant été proposée, alors que ces faits expérimentaux n'étaient pas encore connus, en partant de considérations d'une autre nature.

On sait que, si l'énergie se conserve en quantité totale, elle a pourtant une tendance à se dégrader, c'est à dire à se modifier d'une façon unilatérale de telle façon qu'une certaine quantité « l'entropie » augmente dans tout système fermé.

Le cas le plus simple et le plus fondamental est celui où on applique ces notions à des radiations de corps noirs accompagnés du minimum de matière nécessaire pour réaliser les équilibres thermodynamiques.

On trouve dans ce cas, que l'entropie de la radiation noire est mesurée par le nombre de photons qui la constitue et que lors des mélanges irréversibles l'énergie dont le montant total est demeuré le même s'est répartie en un nombre plus grand de paquets élémentaires, de quanta, de photons distincts.

Au point de vue quantique, le principe de dégradation de l'énergie apparaît donc comme un principe de pulvérisation de l'énergie.

Les transformations radioactives fournissent un autre exemple de transformations irréversibles où un noyau atomique se brise en neuf fragments, pulvérisation de l'énergie primitivement condensée.

Ces deux exemples extrêmes permettent d'affirmer que la transposition en langage quantique du principe de la dégradation de l'énergie, c'est que la matière existe par paquets d'énergie ou quanta distincts et que dans le jeu naturel des transformations, l'énergie totale toujours la même se trouve finalement répartie en un nombre toujours croissant de fragments.

Envisageant une origine photonique de la matière, JEANS a suggéré ainsi comme un commencement possible, de la radiation électromagnétique de très courte longueur d'onde, cela présenterait sans doute, dit-il, les possibilités nécessaires. Mais qui dit très courte longueur d'onde

dit grande fréquence, et puisque l'énergie individuelle des photons est proportionnelle à leur fréquence, photons de grande énergie individuelle et donc un petits nombre.

Ces considération conduisent à envisager comme condition initiale d'où l'univers actuel a pu évoluer par le jeu des lois physiques et mécaniques connues ce que j'ai appelé l'hypothèse de l'atome primitif.

D'après cette hypothèse, l'univers aurait commencé dans un état où l'énergie totale était concentré en un seul quantum en un seul paquet d'énergie qui ne peut guère se représenter autrement que comme un noyau atomique.

La tendance de la matière à se pulvériser ne serait ici autre chose que l'instabilité radioactive de l'atome primitif; les fragments eux-mêmes radioactifs se désintégreraient à leur tour comme le font les membres successifs des familles naturelles de corps radioactifs. La fragmentation s'est arrêté lorsqu'on en est arrivé aux éléments stables, ou à des corps de longue vie moyenne comme l'uranium.

L'atome primitif ne doit pas être considéré comme un trans-uranien. Ce peut être un isotope de masse extrêmement grande des corps actuels et même, plus probablement, du neutron.

Il existe actuellement une tendance à conférer aux noyaux atomiques une certaine structure et une certaine complexité. La physique du noyau est encore dans l'enfance et il ne semble pas établi que le noyau soit réellement un complexe de particules élémentaires. Pourtant si cette tendance devait prévaloir, il suffirait de considérer l'atome primitif comme réalisant un maximum de concentration et minimum d'entropie. On serait sans doute amené à lui donner un rayon qui ne serait pas tout à fait nul, mais qui aurait quelques minutes de lumière et donc astronomiquement parlant serait tout à fait négligeable en face des dimensions actuelles de l'univers.

Une hypothèse comme celle de l'atome primitif se heurte à des objections, qui, à première vue, paraissent devoir lui être fatales.

Tout d'abord, où était-il, cet atome, lors de sa désintégration et comment comprendre qu'ayant à l'origine un phénomène aussi strictement localisé, on puisse obtenir un univers que les observations astronomiques montrent être globalement homogène?

Une seconde difficulté est causé par le rayonnement dont sont accompagnés les transformations radioactives, rayonnement qui ne peut

manquer de s'être produit et sans doute avec une énergie bien plus grande encore pour ces transformations anciennes, qui ont du mettre en jeu des masses atomiques fort considérables. Qu'est devenu ce rayonnement, ne devrait-on pas l'observer?

Enfin, troisième difficulté, comment concevoir, que partant de la désintégration primitive, on obtienne, en un temps qui ne soit pas beaucoup plus grand que celui de la vie moyenne de l'uranium, l'univers actuel formé d'étoiles organisées en galaxies?

Nous allons essayer d'expliquer comment ces trois difficultés se résolvent.

La première s'explique par les conceptions géométriques introduites en 1854 par RIEMANN. RIEMANN a fait la remarque très simple qu'il n'existe aucune connexion logique entre les deux notions suivantes: celle d'un volume de mesure finie et celle d'une étendue limitée par une frontière qui la sépare d'une étendue extérieure. La connexion que le « bon sens » établit entre ces deux notions, logiquement indépendantes, est due uniquement à l'intuition géométrique que nous acquérons dans les expériences géométriques sur lesquelles se fonde notre bon sens. En d'autres termes nous rejetons la possibilité d'un espace sans borne qui ait pourtant un volume fini, non pas parceque ce serait absurde mais parceque nous n'avons jamais rien vu de semblable.

Comme nous n'avons aucune intuitions directe d'un espace de millions ou de milliards d'années de lumière et comme les propriétés géométriques peuvent très bien dépendre de leurs dimensions, de telle façon que la similitude géométrique ne serait qu'une approximation pour des figures très petites, les seules que nous connaissons directement, il se pourrait très bien que l'espace réel soit de volume fini et n'ait pas de frontière.

Nous pourrions ainsi concevoir, qu'en portant dans toutes directions une longueur, mettons de dix milliards d'années de lumière, nous aurions rencontré sur l'un ou l'autre de ces rayons menés en toutes directions toutes les nébuleuses qui existent. En dehors de l'espace ainsi délimité, il n'y a rien. Mais alors me direz-vous qu'arriverait-il si nous voulons prolonger un de ces rayons de dix milliards d'années-lumière. La solution des géomètres est la suivante ce rayon butte par son extrémité contre l'extrémité du rayon semblable mené dans la direction opposée. Il est impossible de s'imaginer cela avec une imagination qui n'a

pu s'entraîner que dans des volumes minuscules à l'échelle humaine. Mais il n'y a aucune difficulté à concevoir que deux émissaires parcourant dix milliards d'années lumière dans les deux directions opposées se trouvent finalement nez à nez. Si nous représentons en petit à l'échelle humaine ce que nous venons d'affirmer pour l'espace total, nous sommes conduits à représenter tout l'espace à l'intérieur d'une petite sphère, cette sphère a une frontière, mais sur cette frontière les points réels sont représentés deux fois, comme sur un planisphère les points du cent quatre-vingtième méridien sont représentés deux fois aux deux bords de la carte.

Notre carte sphérique de l'espace est limitée par une frontière, bord de la carte. Quand nous atteignons ce bord et semblons forcés de sortir de la carte si nous voulons continuer à avancer, il suffit de nous rappeler que ce point du bord que nous atteignons est aussi représenté au point opposé de la sphère, nous pouvons donc en passant à cette autre représentation du même point, continuer le voyage en cheminant vers l'intérieur.

La ligne droite formée des deux rayons opposés de dix milliards d'années lumière est donc soudée en une seule ligne fermée, ayant comme longueur totale, ou « tour de la droite » vingt milliards d'années lumière. Pour des raisons techniques on désigne sous le nom de rayon de l'espace le tiers du tour de la droite.

Il est concevable que le tour de la droite, ou ce qui revient au même le rayon de l'espace, varie avec le temps. On obtient alors ce qu'on appelle un espace de rayon variable. Supposons que le rayon augmente avec le temps. Les nébuleuses qui sont réparties dans l'espace et le remplissent uniformément vont donc se séparer les unes des autres. Si par exemple, sur le tour d'une droite, sont alignées vingt mille nébuleuses qui divisent cette droite en parties égales, alors, lorsque la longueur de la droite augmente, il faut bien que la distance des nébuleuses individuelles augmente dans le même rapport. Nous retrouvons le phénomène astronomique de la dilatation du système des nébuleuses et nous l'interprétons maintenant comme une indication de ce que le rayon fini de l'espace est en train d'augmenter.

Jadis, le rayon de l'espace a été plus petit. Rien ne nous empêche de supposer qu'au moment où l'atome primitif s'est désintégré, le rayon de l'espace était extrêmement petit de telle façon que cet atome, que nous

nous sommes représenté comme n'ayant qu'une dizaine de minutes de lumière de rayon remplissait tout l'espace, le rayon de celui-ci n'étant pas plus grand. Astronomiquement parlant, nous dirons que le rayon de l'espace part de zéro, au moment où l'atome commence à se désagréger. Les fragments résultant de cette désintégration peuvent donc remplir uniformément l'espace de rayon croissant et lorsque la désintégration progresse et que le rayon s'accroît la matière continue à remplir uniformément tout l'espace. On conçoit donc comment, de la désintégration de l'atome primitif, peut résulter un univers globalement homogène.

Telle est l'explication de la première difficulté.

La deuxième difficulté est relative à ce que est advenu du rayonnement émis lors des désintégrations successives.

Tout d'abord, on peut montrer que l'intensité de ce rayonnement est réduite, dans un rapport égal à celui du rayon de l'espace à l'instant d'émission au rayon à l'instant de l'observation.

Les tout premiers rayons sont donc perdus pour l'observation; les rayons qui nous parviennent correspondent à un compromis entre l'énergie d'émission qui a sans doute diminué à fur à mesure que s'avancait la fragmentation et le facteur de réduction qui augmentait au fur et à mesure qu'augmentait le rayon de l'espace.

Il semble que ce rayonnement puisse être identifié avec les rayons cosmiques. Ceci est en accord avec la qualité des rayons cosmiques dont une partie au moins à une intensité individuelle qui dépasse tout phénomène, même nucléaire, actuellement existant. Ceci semble indiquer qu'il correspond à des phénomènes actuellement épuisés.

Au point de vue quantitatif, on doit comparer l'intensité totale des rayons cosmiques à celle de toutes la matière, puisque c'est toute la matière qui est actuellement organisée en étoiles qui leur a donné naissance jadis.

EINSTEIN a montré que l'énergie est équivalente à la matière et a donné une formule simple qui permet de dire combien de grammes pèse l'unité d'énergie un erg. On peut donc transformer en gramme par centimètre cube les chiffres donnés par les physiciens pour l'intensité du rayonnement cosmique en ergs par centimètres carrés, (il faut diviser par c^3). On trouve 10^{-34} gramme par cm^3 . D'autre part

on trouve 10^{-30} gr./cm³ pour la matière des nébuleuses supposée répartie uniformément dans tout l'espace. Pour un facteur de réduction dû à la variation du rayon de cent ou mille, on trouve que les rayons sont un ou dix pour cent de l'énergie matérielle. C'est ce qu'il faut attendre pour le rayonnement de transformations analogues aux transformations radioactives actuelles.

La densité 10^{-30} gr./cm³ a été obtenue en se basant sur la distance moyenne des nébuleuses et sur l'observation spectroscopique de la rotation autour de leur centre de quelques-unes des plus brillantes parmi elles. La masse est alors estimée en supposant que l'attraction gravifique qu'elle exerce sur un point du bord est suffisante pour compenser la force centrifuge due à la rotation qui tendrait à la faire s'échapper dans l'espace.

Pour éclaircir le troisième point, il nous faut parler de la théorie de la relativité.

EINSTEIN a montré que la théorie de la gravitation de NEWTON est une approximation d'une théorie plus profonde, où la matière apparaît comme une manifestation du caractère non-euclidien de l'espace ou plutôt de l'espace-temps.

Cette théorie est confirmée par l'observation de petits écarts à la loi de NEWTON que prévoit la théorie et dont la plus célèbre est une petite perturbation de la planète Mercure pour laquelle LEVERRIER s'était hasardé jadis à prédire l'existence d'une planète, dont il avait calculé les éléments, et à laquelle il avait donné le nom de Vulcain mais qui ne s'est pas montrée fidèle au rendez-vous mathématique. Cette perturbation est une conséquence de la nouvelle théorie.

La théorie de la relativité fait prévoir, que, même à l'approximation newtonienne, une autre force pourrait être présente, à côté de l'attraction en raison inverse du carré de la distance; cette autre force, contrairement à la première, augmenterait avec la distance. Elle pourrait être totalement insensible dans l'observation des planètes et ne se manifester que lorsque les distances deviennent fort grandes c'est à dire à l'échelle cosmique. Cette force dépend d'une constante à laquelle on a donné le nom de constante cosmologique. La théorie n'indique ni sa grandeur ni son signe (elles n'indiquait d'ailleurs pas non plus celui de la constante d'attraction universelle). Le cas intéressant est

celui où la nouvelle force serait une répulsion, car alors elle peut contrebalancer l'attraction newtonienne et conduire à un équilibre entre les deux forces.

Il est possible de calculer la constante cosmologique, si on connaît la densité de la matière. Pour la valeur 10^{-30} gr/cm³ indiquée plus haut, et pour la valeur de l'expansion en deux milliards d'années, on trouve que la répulsion cosmique l'emporte actuellement sur l'attraction gravifique et que ces deux forces se sont fait équilibre, lorsque le rayon de l'espace était une dizaine de fois plus petit qu'il ne l'est maintenant. Ces calculs donnent pour le rayon actuel la valeur d'environ dix milliards années lumière dont nous avons fait usage plus haut.

Comme dans les amas de nébuleuses, la distance des nébuleuses est environ dix fois plus petite que pour les nébuleuses isolées on est conduit à interpréter ces amas comme des régions qui sont encore partiellement en équilibre. Il y a pourtant une difficulté provenant des grandes vitesses des nébuleuses de ces amas, vitesses qui sembleraient devoir faire se disperser le système. Mais, par ailleurs, l'amas constitue un centre d'attraction pour les nébuleuses extérieures et celles-ci peuvent, dans une certaine mesure, remplacer les nébuleuses qui s'échappent.

Nous sommes ainsi conduits à admettre que le rayon de l'espace, parti pratiquement de zéro, a augmenté avec une vitesse de moins en moins grande et a atteint, et dépassé lentement, la valeur du milliard d'années où attraction et répulsion se faisaient équilibre, l'expansion a repris ensuite à un rythme accéléré.

C'est ce passage lent à travers l'équilibre qui va nous donner la solution de notre troisième difficulté. En effet cet équilibre est instable. Il suffit de petit écarts locaux des densités et des vitesses, aux conditions moyennes qui assurent cet équilibre, pour que, localement, l'expansion ralentisse, au lieu d'être suivie d'une reprise d'expansion, soit suivie par une contraction. Localement la matière retombe vers un centre accidentel de condensation, tandis que dans son ensemble le système reprend son expansion. Les condensations locales se séparent donc les unes des autres comme le font les nébuleuses extra-galactiques.

Le développement ultérieur de la théorie dépend de l'idée que l'on peut se faire de l'état de la matière au moment où se produisent

ces condensations locales qui doivent s'interpréter comme des nébuleuses extra-galactiques.

Il faut trouver pour cet état intermédiaire des conditions qui puissent résulter de la désintégration initiale et dont puisse résulter le monde actuel.

Je crois qu'on doit se représenter, dans cet état intermédiaire, la matière comme formée de nuées gazeuses animées les unes par rapport aux autres de fort grandes vitesses.

Ces nuées auraient la densité d'équilibre et n'auraient guère de tendance à se contracter. Si, au contraire, deux de ces nuées venaient à se rencontrer, elles s'aplatiraient l'une sur l'autre tandis que l'énergie cinétique se dissiperait en rayonnement; une fois la contraction amorcée, l'attraction gravifique dominant la répulsion cosmique transformerait le système en une étoile, ou, si le moment angulaire est suffisant, en un système d'étoiles et de satellites.

Ces rencontres entre nuées se feront surtout dans les régions de condensation où les nuées se précipitent les unes sur les autres. Ceci aura deux conséquences. Tout d'abord une partie notable des nuées se transformera en étoiles. En second lieu, par suite de la dissipation d'énergie lors de chocs entre nuées le système pourra acquérir un haut degré de condensation centrale.

La supposition que les nuées sont animées de grandes vitesses relatives est nécessaire pour expliquer que, dans les amas de nébuleuses, les nébuleuses individuelles soient animées de grandes vitesses.

On doit en effet concevoir, qu'une nuée anormalement dense puisse servir de noyau de condensation autour duquel va se former une nébuleuse. Ce noyau ne pourra retenir, parmi les nuées qui passent près d'elle, que celles qui ont presque la même vitesse qu'elle, les autres échapperont à son attraction. La vitesses des nébuleuses est donc une manifestation de la vitesses des nuées à partir desquelles elles se sont formées.

Les idées que nous venons d'indiquer sont susceptibles d'une étude quantitative. On doit pouvoir en déduire les conditions initiales de formation d'une nébuleuse, un noyau central retenant toutes les nuées jusqu'à la vitesse d'échappement. Ce problème est facile et il est résolu. Mais il faudrait encore suivre l'effet des chocs entre nuées sur leur répartition et le degré de concentration de la nébuleuses qu'elles forment.

Cet aspect du problème est beaucoup plus difficile et la solution en est loin d'être achevée.

Si ce calcul pouvait être effectué, il fournirait une distribution théorique des densités dans une nébuleuse. Comme la distribution réelle est connue par l'observation photométrique des nébuleuses extragalactiques, la comparaison des deux résultats, astronomique d'une part, théorique d'autre part, pourrait fournir une confrontation décisive de la théorie avec les faits.

Maintenant que nous nous sommes rendu compte que l'état intermédiaire de la matière ou état pré-stellaire consistait en des nuées gazeuses animées de grandes vitesses, il nous faut examiner, si nous pouvons nous rendre compte de l'origine de ces nuées dans le cadre de notre théorie.

La question consiste à comprendre comment peut se former un gaz, en partant des produits de désintégrations successives de l'atome primitif et de ses fragments. Au début, on doit avoir des noyaux atomiques animés d'énormes vitesses comme dans les rayons alpha qui sont des noyaux d'hélium.

Mêmes les noyaux plus massifs, doivent, comme des rayons canaux, posséder de grandes vitesses de recul. Assurément ces particules doivent parfois se rencontrer; mais les chocs trop violents ne peuvent être, comme dans les gaz, des chocs élastiques, ces chocs destructeurs doivent simplement provoquer de nouvelles transformation nucléaires. Comment cette radiation a-t-elle pu se séparer en une partie qui reste de la radiation et s'observe comme rayons cosmiques, et une partie qui a formé les nuées gazeuses d'où sont nées les étoiles et les nébuleuses?

Il est un phénomène lié à l'expansion de l'espace qui fournit un élément de solution à ce problème. Ce phénomène est très analogue à l'atténuation des rayonnements par suite de l'expansion, que nous avons mentionné à plusieurs reprises dans notre exposé.

Pour nous en rendre compte reprenons notre image de points également répartis sur des droites issues d'un même centre et de longueur égale à la moitié du tour de la droite.

Tous ces points s'éloignent du centre de la représentation avec des vitesses d'autant plus grandes qu'ils en sont plus éloignés.

Ils représentent la vitesse normale dans l'univers en expansion.

Supposons maintenant qu'un atome ait une vitesse anormale. Supposons, par exemple, qu'il soit au centre, où, dans notre représentation la vitesse normale est nulle, et qu'au contraire, il soit animée d'une grande vitesse. Alors, il s'éloignera du centre suivant un des rayons, il atteindra des régions de plus en plus éloignées, où la vitesse normale n'est plus nulle, la grande vitesse avec laquelle il se déplace deviendra donc de moins en moins anormale. Pourtant, il ne sortira pas de la représentation. S'il en atteint le bord, il reviendra par la direction opposée. S'il revient au centre, il y reviendra avec une vitesse bien inférieure à celle qu'il possédait au départ.

Sa vitesse propre sera, en fait, réduite dans le rapport de l'expansion, c'est à dire le rapport des valeurs du rayon de l'espace au départ et à l'arrivée.

Dans les premiers stades de l'expansion, ce phénomène a dû réduire considérablement les vitesses propres, c'est à dire la différence entre la vitesse individuelle et la vitesse normale à l'endroit où passe la particule.

On peut donc comprendre que, par suite de cette atténuation des dispersions des vitesses, des atomes aient quelque chance de se rencontrer parfois, avec des vitesses relatives assez faibles pour que le choc soit élastique et si cela se renouvelle assez souvent et intéresse un nombre suffisant d'atomes, pour qu'il se forme localement une nuée gazeuse.

On comprend qu'il ne se forme que des nuées gazeuses, car le phénomène que nous invoquons est trop peu probable pour s'être produit partout à la fois.

On comprend aussi que ces nuées soient animées de grandes vitesses les unes par rapport aux autres, puisqu'elles proviennent de particules rapides, voyageant presque avec la même vitesse, mais pouvant avoir une grande vitesse commune.

Voilà quel est l'état présent de l'hypothèse de l'atome primitif, peut-être vous paraîtra-t-elle digne d'être prise en considération et d'être mise en oeuvre d'un point du vue technique. Sans doute aussi, jugerez-vous prudent de suspendre votre jugement en attendant qu'une confrontation cruciale puisse être faite avec les faits.

Nous ne pouvons terminer cet exposé, sans considérer un moment l'origine même que notre théorie donne à l'univers: l'instant initial,

la fragmentation initiale; l'instant où naissait l'espace avec un rayon partant de zéro, l'instant où naissait la multiplicité dans la matière.

Cette origine nous apparaît, dans l'espace temps comme un fond qui défie notre imagination et notre raison en leur opposant une barrière qu'elles ne peuvent franchir. L'espace-temps nous apparaît, semblable à une coupe conique. On progresse vers le futur en suivant les génératrices du cône vers le bord extérieur du verre. On fait le tour de l'espace en parcourant un cercle normalement aux génératrices. Lorsqu'on remonte par la pensée le cours du temps, on s'approche du fond de la coupe, on s'approche de cette instant unique, qui n'avait pas d'hier parce qu'hier, il n'y avait pas d'espace.

Commencement naturel du monde, origine pour laquelle la pensée ne peut concevoir une pré-existence, puisque c'est l'espace même qui commence et que nous ne pouvons rien concevoir sans espace. Le temps semble pouvoir être prolongé à volonté vers le passé comme vers l'avenir. Mais l'espace peut commencer, et le temps ne peut exister sans espace, on pourrait donc dire, que l'espace étrangle le temps, et empêche de l'étendre au delà du fond de l'espace-temps.

Mais cette origine est aussi le commencement de la multiplicité. C'est un instant où la matière est un seul atome, un instant où les notions statistiques qui supposent la multiplicité ne trouvent pas d'emploi. On peut se demander si dans ces conditions la notion même d'espace ne s'évanouit pas à la limite et n'acquière que progressivement un sens à fur à mesure que la fragmentation s'achève que les êtres se multiplient.

Devons-nous nous plaindre que nos notions les plus familières s'évanouissent lorsqu'elles s'approchent du terme ultime qu'elles ne doivent pas dépasser? Je ne le pense pas.

En terminant je ne puis mieux faire que de rappeler le mot de RENÉ DESCARTES par lequel je commençais et qui s'applique sans doute aussi à l'atome primitif *Mundus est fabula*.



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XII - N. 7
pag. 41-56

RACCOLTE FAUNISTICHE COMPIUTE NEL GARGANO
DA A. GHIGI E F. P. POMINI (1)

I. - MOLLUSCHI (2)

ELVEZIO GHIRARDELLI - LEA CRICCA-GORDINI

SUMMARIVM. — Recensent Auctores species molluscorum, qui collecti sunt in monte Gargano ab Academico Pontificio A. GHIGI et Doctore F. P. POMINI. Singillatim describuntur quinque nationes *Cyclostomatis elegantis*, quae in Italia inferiore, media, et superiore inveniuntur, quaeque inter se parum differunt metricis notis, sed magnas diversitates habent in periostraco.

Elenco delle specie raccolte (2).

* *Theodoxia fluviatilis* L. — Lago Varano, 1 es. (legit Ghigi);
1 es. (legit Pomini).

* *Rissoa oblonga* DESM. — Lago Varano, 3 es. (legit Ghigi).

* *Cyclostoma elegans* MÜLL. — Foresta Umbra Murgia, 297 es.
(legit Pomini); Foresta Umbra Pasqualone, 477 es. (legit Pomini);
Rodi Gargano, 215 es. (legit Pomini); Tremiti, 36 es. (legit Pomini).

* *Cyclostoma sulcatum* DRAP. — Grotta Umbra 1 es. (legit Ghigi).

* *Stagnicola palustris* MÜLL. — Lago Varano, 8 es. (legit Pomini).

* *Phytia myosotis* DRAP. — Mattinata. Grotta Campana, 15 es.
(legit Ghigi).

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi nella riunione privata del 13 gennaio 1947.

(1) A. GHIGI-F. P. POMINI, *L'importanza biografica della Regione Garganica*. « Boll. Zool. » XII, 1-2, 1941.

(2) Le specie segnate con asterisco mancano nell'elenco riportato da HOL-
DHAUS, *Über die Coleopteren und Molluskenfauna des Monte Gargano*. « Denks.
Kais. Acad. Wiss. », Wien., LXXXVII, 1912, pag. 481.

Rumina (Stenogira) decollata L. - Grotta Umbra 1 es. (legit Pomini); Cagnano Varano, 3 es. (legit Pomini); S. Nicola, 11 es. (legit Pomini); S. Domino, 22 es. (legit Pomini); S. Nicandro, 1 es. (legit Pomini).

* *Oxychilus cellarius* MÜLL. - Grotta Umbra, 2 es. (legit Ghigi).

* *Clausilia bidens* L. - Mattinata, 2 es. (legit Pomini); Cagnano Varano, 7 es. (legit Pomini); S. Egidio, 7 es. (legit Pomini); Capperia, 2 es. (legit Pomini).

* *Clausilia laminata* MÜLL. - S. Angelo, 21 es. (legit Pomini); Foresta Umbra, 2 es. (legit Pomini); S. Nicola, 7 es. (legit Ghigi).

Clausilia (Delima) gibbula ROSSM. - S. Domino, 4 es. (legit Pomini); Cagnano Varano, 4 es. (legit Pomini); S. Nicandro, 3 es. (legit Ghigi).

Goniodiscus rotundatus MÜLL. - S. Egidio, 1 es. (legit Pomini); Cagnano Varano, 4 es. (legit Pomini); S. Nicola, 4 es. (legit Pomini); Capperia, 9 es. (legit Pomini); S. Domino, 14 es. (legit Pomini); Mattinata, 6 es. (legit Pomini); S. Menaio, 2 es. (legit Pomini).

* *Helix vermiculata* MÜLL. - S. Egidio, 1 es. (legit Pomini); Cagnano Varano, 4 es. (legit Pomini); S. Nicola, 5 es. (legit Pomini); Capperia, 9 es. (legit Pomini); S. Domino, 14 es. (legit Pomini); Mattinata, 6 es. (legit Pomini); S. Menaio, 2 es. (legit Pomini).

* *Helix Pisana* MÜLL. - Gargano, località non precisata, 100 es. (legit Pomini).

Helix aperta BORN. - S. Menaio, 5 es. (legit Pomini); Cagnano Varano, 2 es. (legit Pomini); S. Domino, 14 es. (legit Pomini).

Helix (Theba) carthusiana MÜLL. - Mattinata, 2 es. (legit Pomini); Foresta Umbra, 2 es. (legit Pomini); S. Egidio, 10 es. di cui 5 giovani, (legit Pomini); S. Menaio, 4 es. giovani (legit Pomini); Cagnano Varano, 2 es. (legit Pomini).

* *Helix (Theba) carthusiana* var. *rutilabris* MÜLL. - S. Domino, 4 es. (legit Pomini); S. Nicola, 1 es. (legit Pomini).

* *Helix (Monaca) incarnata* MÜLL. - Monte S. Angelo, 2 es. (legit Ghigi).

* *Helix cinctella* DRAP. - S. Menaio, 2 es. (legit Pomini).

* *Helix corcyrensis* PARTSCH. - S. Menaio, 1 es. (legit Pomini).

Helix adspersa MÜLL. - S. Nicandro, 1 es. (legit Pomini); S. Menaio, 1 es. giovane, (legit Pomini).

* *Helix (Cernuella) variabilis* DRAP. - S. Egidio 4 es. (legit Ghigi).

* *Helix planospira* PAYRANDEAU. - Foresta Umbra, 7 es. di cui 5 giovani (legit Pomini).

* *Helix (caracollina) lenticula* DE FERGUSSAC. - S. Domino, 1 es. (legit Pomini).

Limax agrestis L. - Alveo S. Egidio, 3 es. (legit Ghigi); Foresta Umbra, 3 es. (legit Pomini); Mattinata, 1 es. (legit Pomini); S. Domino, 3 es. (legit Pomini).

Glandina algira BRUG. - Mattinata, 5 es. (legit Pomini).

Chondrula tridens MÜLL. - Mattinata, 1 es. (legit Pomini); Caperaia, 2 es. (legit Pomini).

Chondrula (Jaminia) quadridens MÜLL. - Grotta Umbra, 1 es. (legit Ghigi) ⁽¹⁾.

Studio biometrico di 5 popolazioni di *Cyclostoma elegans*.

Lo studio biometrico è stato fatto: su 1000 es. di *Cyclostoma elegans* raccolti, come si è detto, in varie località del Gargano dal Prof. GHIGI e dal Dott. POMINI, su 36 esemplari delle Is. Tremiti, raccolti dal Dott. POMINI; 300 di Bologna (Colle Osservanza), raccolti dal Dott. GHIRARDELLI, 1000 di Massalombarda raccolti dalla Dottoressa CRICCA-GORDINI e 200 di Siena raccolti e gentilmente inviati dal Prof. BENAZZI. Le difficoltà dovute allo stato di guerra hanno impedito di poter raccogliere un numero maggiore di esemplari di Bologna, Siena e Is. Tremiti.

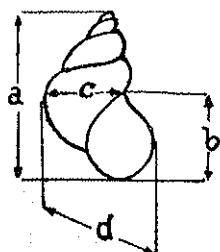
C. elegans, ha la conchiglia ovoide, ventricosa, robusta, con 5-6 giri di elica molto convessi, l'ultimo dei quali notevolmente sviluppato, suture profonde, apice ottuso. Apertura rotonda, angolosa in alto, con peristoma continuo, leggermente inspessito. Conchiglia solida di colore variabile: grigio, giallastro, bruno rossastro, talora fasciato da fiammelle e da strisce interrotte ridotte a puntini. Strie longitudinali tagliate ad angolo retto da altre spirali assai marcate conferiscono alla conchiglia aspetto reticolare. All'entrata dell'apertura affiora l'opercolo calcareo, inspessito e quasi liscio nella faccia interna con 4-5 strie spirali su quella esterna.

(1) Le determinazioni sono state confermate dal Prof. C. PIERSANTI che sentitamente ringraziamo.

Scopo del nostro lavoro era quello di rilevare i caratteri morfologici e dimensionali dai valori medi delle misure stesse nonchè le differenze riguardanti i caratteri morfologici delle conchiglie raccolte nelle varie località, con particolare riguardo all'aspetto del periostraco.

Le misure sono state prese con un comune calibro provvisto di nonio; come unità di misura si è costantemente scelto il decimo di mm. Gli eventuali errori di misurazione non possono influire sul valore delle misure e dei rapporti in quanto si sono scelti intervalli di classe abbastanza ampi. (5/10 di mm. per le misure, 1/10 di mm. per i rapporti).

Sono state prese in considerazione le seguenti misure della conchiglia: (fig. 1):



lunghezza massima della conchiglia (a);

larghezza massima dello stoma (b);

larghezza dell'ultimo anfratto (c);

diametro trasversale dal peristomio alla larghezza massima dell'ultimo anfratto (d).

Delle misure suddette sono stati calcolati i seguenti rapporti:

a/b , che esprime la larghezza dello stoma rispetto alla larghezza della conchiglia;

c/a , indice della maggiore o minore larghezza della conchiglia stessa;

c/d , che dà una idea della sporgenza dell'ultimo giro di spira rispetto alla larghezza della conchiglia⁽¹⁾.

Delle misure e dei rapporti suddetti sono stati determinati:

- 1) la media aritmetica indicata con M .
- 2) la deviazione quadratica media indicata con σ .
- 3) l'indice di variabilità indicato con V .

Sono state inoltre tracciate le relative curve di variazione tanto per i valori delle misure, quanto per quelli dei rapporti.

I risultati ottenuti sono riassunti nelle tabelle 1, 2, 3, 4, 5.

(1) I valori dei rapporti sono stati moltiplicati per 100.

TABELLA I. — *Bologna.*

	CV	M	σ	V (1)
<i>a</i>	95 { 100 195	161,98	14,45	8,92
<i>b</i>	35 { 55 90	74,64	5,41	7,24
<i>c</i>	45 { 65 110	92,72	7,42	8,00
<i>d</i>	70 { 80 150	125,58	10,97	8,73
<i>b/a</i>	16 { 41 57	46,23	2,83	5,04
<i>c/a</i>	16 { 53 69	57,45	2,68	4,66
<i>c/d</i>	17 { 69 86	73,99	2,93	3,95

TABELLA II. — *Massalombarda.*

<i>a</i>	50 { 125 175	148,72	8,50	5,71
<i>b</i>	20 { 60 80	68,15	3,66	5,37
<i>c</i>	25 { 70 95	84,94	4,22	4,96
<i>d</i>	45 { 90 135	113,96	6,48	5,68
<i>b/a</i>	15 { 40 55	45,90	1,63	3,55
<i>c/a</i>	15 { 50 65	57,17	1,81	3,16
<i>c/d</i>	17 { 69 86	74,70	2,16	2,80

TABELLA III. — *Siena.*

	CV	M	σ	V
a	45 $\left\{ \begin{array}{l} 120 \\ 165 \end{array} \right.$	145,95	8,87	6,07
b	20 $\left\{ \begin{array}{l} 55 \\ 75 \end{array} \right.$	66,72	3,96	5,93
c	20 $\left\{ \begin{array}{l} 75 \\ 95 \end{array} \right.$	84,05	4,83	5,74
d	30 $\left\{ \begin{array}{l} 95 \\ 125 \end{array} \right.$	112,05	6,31	5,63
b/a	12 $\left\{ \begin{array}{l} 40 \\ 52 \end{array} \right.$	45,81	1,59	3,47
c/a	11 $\left\{ \begin{array}{l} 51 \\ 62 \end{array} \right.$	57,64	1,79	3,10
c/d	10 $\left\{ \begin{array}{l} 71 \\ 81 \end{array} \right.$	74,98	1,61	2,14

TABELLA IV. — *Gargano.*

a	65 $\left\{ \begin{array}{l} 115 \\ 180 \end{array} \right.$	141,92	10,12	7,13
b	25 $\left\{ \begin{array}{l} 55 \\ 80 \end{array} \right.$	65,93	4,40	6,73
c	30 $\left\{ \begin{array}{l} 70 \\ 100 \end{array} \right.$	83,04	5,07	6,10
d	40 $\left\{ \begin{array}{l} 90 \\ 130 \end{array} \right.$	109,60	7,67	6,99
b/a	14 $\left\{ \begin{array}{l} 40 \\ 54 \end{array} \right.$	46,03	1,65	3,58
c/a	16 $\left\{ \begin{array}{l} 50 \\ 66 \end{array} \right.$	58,62	1,31	2,23
c/d	14 $\left\{ \begin{array}{l} 70 \\ 84 \end{array} \right.$	75,99	2,11	2,77

TABELLA V. — *Isole Tremiti.*

	CV	M	σ	V
<i>a</i>	50 { 100 150	123,25	12,48	10,08
<i>b</i>	20 { 50 70	55,14	4,77	8,65
<i>c</i>	25 { 65 90	72,50	6,07	8,87
<i>d</i>	40 { 75 115	93,20	9,59	10,28
<i>b/a</i>	9 { 41 50	44,67	2,25	5,03
<i>c/a</i>	13 { 53 66	59,00	3,04	5,15
<i>c/d</i>	20 { 68 88	77,97	4,61	5,91

(¹) CV = campo di variabilità; M = media; σ = sigma; V = indice di variabilità.

ESAMI COMPARATIVI PER LE MISURE

Tabella riassuntiva dei valori di *M* per le misure.

POPOLAZIONI	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
Bologna	161,93	74,67	92,72	125,58
Massalombarda	148,72	68,15	84,94	113,96
Siena	145,95	66,72	84,05	112,05
Gargano	141,92	65,83	83,04	109,60
Isole Tremiti	123,25	55,14	72,50	93,20

Dall'esame della tabella si rileva una graduale diminuzione dei valori medi della lunghezza della conchiglia (*a*) nelle popolazioni studiate. I valori suddetti, sono abbastanza vicini per quello che riguarda le popolazioni di Massa, Siena, Gargano; gli individui di Bologna e quelli delle Tremiti, invece, differiscono notevolmente fra di loro e da quelli delle altre tre popolazioni. I primi perchè presentano valori notevolmente superiori, i secondi perchè presentano valori molto più bassi di quelli delle altre popolazioni. Analoghe osservazioni si possono fare per quanto riguarda i valori medi delle altre misure.

Le curve che si riferiscono alle popolazioni di Massa e Siena, sono quelle che con le curve si riferiscono alla popolazione del Gargano, presentano maggiori analogie per tutte le misure considerate. Differenze sensibili e costanti rispetto alle precedenti sono presentate alle curve che si riferiscono alla popolazione di Bologna, il cui campo di variazione è sempre più ampio di quello presentato dalle curve che si riferiscono alle altre popolazioni.

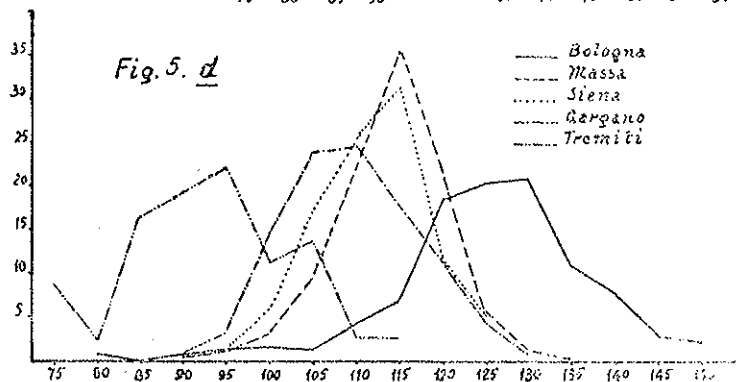
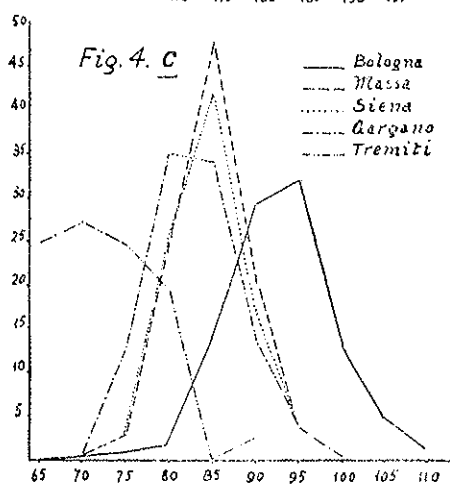
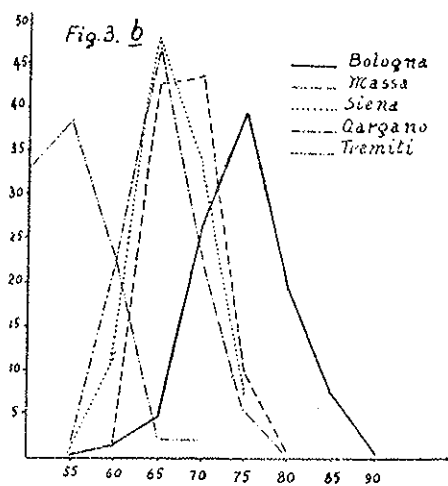
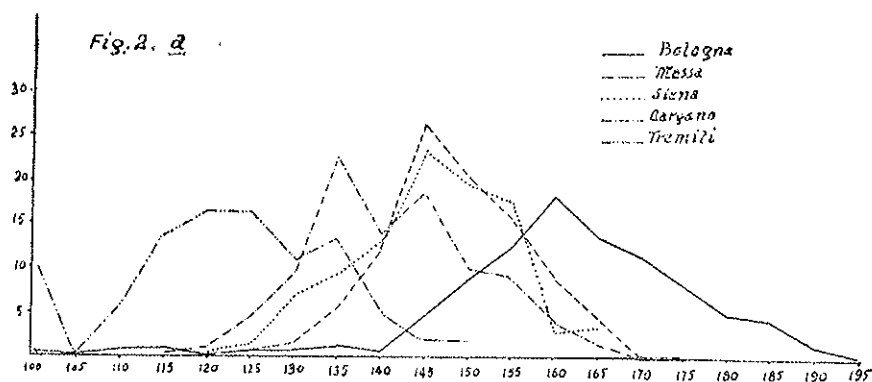
Inoltre il valore normale per le curve che si riferiscono alla popolazione di Bologna è sempre spostato verso i valori più alti, al contrario di quanto si verifica per le curve che si riferiscono alla popolazione delle Tremiti nella quale la classe modale è costantemente spostata verso i valori più bassi.

La irregolarità dell'andamento delle curve che si riferiscono a questa ultima popolazione è dovuta, quasi certamente, allo scarso numero di esemplari misurati. (Vedi figg. 2; 3, 4, 5).

ESAMI COMPARATIVI PER I RAPPORTI

Tabella riassuntiva dei valori di M per i rapporti.

POPOLAZIONI	<i>b/a</i>	<i>c/a</i>	<i>c/d</i>
Bologna	46,23	57,45	73,99
Massalombarda	45,90	57,17	74,70
Siena	45,81	57,64	74,98
Gargano	46,03	58,62	75,99
Isole Tremiti	44,67	59,00	77,97



L'andamento delle curve (vedi figg. 6, 7, 8), per i rapporti b/a e c/a è sensibilmente uguale per tutte le popolazioni considerate. Per il rapporto c/d si nota qualche differenza solo per la popolazione di Bologna che presenta la classe modale spostata verso i valori più bassi e per la popolazione delle Tremiti, nella quale, invece, la classe modale è spostata verso i valori più alti.

Dall'esame dei grafici e da quello della precedente tabella che mostra come siano di piccola entità le differenze fra i valori medi dei rapporti si può concludere che la forma della conchiglia è sensibilmente la stessa in tutte le popolazioni considerate. Soltanto gli esemplari delle Tremiti presentano uno stomio più corto ed una minore sporgenza dell'ultimo anfratto, mentre quelli di Bologna presentano una accentuazione in senso opposto dei caratteri stessi.

Quanto si è detto è reso più evidente dalla tabella seguente nella quale i valori medi delle dimensioni di ciascuno dei gruppi di individui studiati sono riferiti ad una lunghezza della conchiglia considerata uguale a 10 mm.

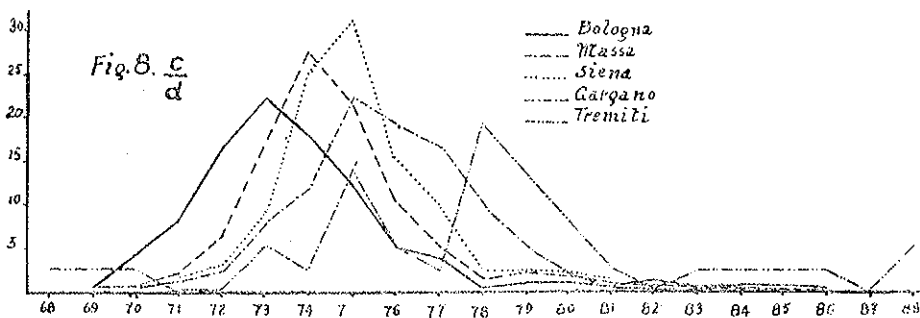
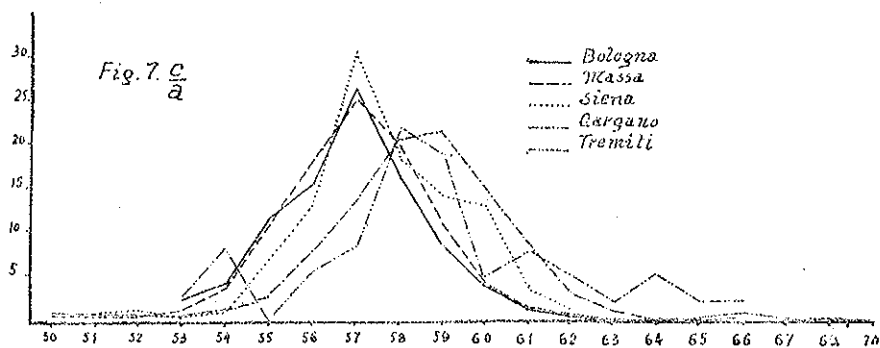
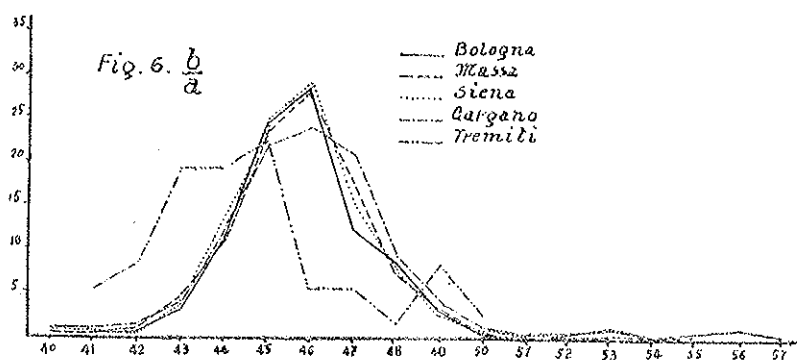
POPOLAZIONI	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
Bologna	10	4,61	5,72	7,75
Massalombarda	10	4,58	5,71	7,66
Siena	10	4,57	5,75	7,73
Gargano	10	4,60	5,85	7,72
Is. Tremiti	10	4,42	5,88	7,50

OSSERVAZIONI SULL'ASPETTO DEL PERIOSTRACO

Durante il lavoro di misurazione abbiamo notato alcune differenze nella colorazione e nelle striature delle conchiglie. Le striature sono determinate da piccoli rilievi di forma irregolarmente ovoidale, talvolta puntiformi, più o meno intensamente colorati e facilmente rilevabili anche ad un modesto ingrandimento ($\times 12$).

I suddetti rilievi sono allineati in maniera abbastanza regolare a costituire le striature che si presentano più o meno marcate, sia in

relazione al colore, che esse presentano, sia con la distanza alla quale si trovano una rispetto all'altra, sia con la loro maggiore o minore larghezza.



Nelle conchiglie di Bologna, si rileva una notevole variabilità nella colorazione: gialliccia, giallo rosata, violacea. La conchiglia è robusta (peso medio gr. 0,225) con reticolo abbastanza regolare a maglie piccole. La striatura è data da piccoli rilievi rotondeggianti col diametro

massimo di mm. 0,16-0,10 e quello minimo di mm 0,07-0,04. Mentre i rilievi di forma più allungata si trovano fittamente addossati gli uni agli altri, i rilievi più piccoli di aspetto puntiforme, sono sempre nettamente staccati fra di loro.

Inoltre mentre i rilievi del primo tipo presentano colorazione uniforme, gli altri sono di solito più intensamente colorati nella zona centrale ed hanno bordi sfumati (fig. 9).

Negli esemplari di Massalombarda il colore varia dal giallastro al bruno rossastro; in quest'ultimo caso con fiammette marcate ad apice bruno violaceo. Strie trasversali molto marcate e notevolmente distanziate fra di loro; strie longitudinali poco accentuate. L'aspetto del reticolo alquanto irregolare è dovuto al fatto che i rilievi della striatura di forma pressochè ovoidale o a bastoncino, con lunghezza media di mm. 0,20-0,25 e larghezza di mm. 0,08-0,10, molto più grossi cioè di quelli della precedente località, generalmente sono paralleli, ma talvolta sono obliqui gli uni rispetto agli altri e spesso poi confluiscono determinando piccole chiazze di colore più scuro irregolarmente sparse (fig. 10). La conchiglia è molto robusta e più pesante di quelle di Bologna (peso medio gr. 0,285).

Nelle conchiglie di Siena il colore dominante è il giallo. Il reticolo è a maglie piccole. Le strie sono costituite da rilievi di forma ovoidale o irregolarmente rettangolare, lunghi 0,15-0,18 mm. e larghi 0,07-0,10 mm. In generale i rilievi rettangolari sono fittamente addossati gli uni agli altri mentre i rilievi ovoidali sono più o meno distanziati. La pigmentazione dei primi è uniforme, i secondi presentano invece, la zona centrale più scura e la marginale a contorni sfumati. L'aspetto del reticolo è in complesso abbastanza uniforme e regolare (fig. 11). Caratteristica di queste conchiglie è la estrema fragilità, sono inoltre molto leggere (peso medio gr. 0,207).

Per quanto riguarda gli esemplari delle Is. Tremiti, il periostraco varia dal giallastro al bruno, con apice violaceo. I rilievi in generale sono puntiformi, ovoidali, o rotondegianti di aspetto variabile (lunghezza 0,16 mm. circa, larghezza 0,05-0,08 mm.) disposti abbastanza regolarmente tanto in senso trasversale che longitudinale (fig. 13), formano un reticolo a maglie più larghe di quello degli esemplari delle regioni più settentrionali.

Le conchiglie del Gargano si differenziano in modo notevole da quelle di tutte le altre popolazioni per l'aspetto del reticolo. La striatura è data da rilievi molto accentuati, fittamente allineati di forma ovoidale, rotondeggiante o a bastoncino di lunghezza pressochè uguale (mm. 0,20-0,25) e di larghezza variabile fra 0,03 e 0,25 mm., sono cioè di dimensioni maggiori di quelle delle altre popolazioni. In generale i rilievi più grossi si trovano addossati gli uni agli altri e spesso confluiscono fra di loro, mentre i rilievi più piccoli sono quasi sempre nettamente staccati e spesso riuniti in gruppi di tre o quattro. Il colore dei rilievi allungati è scuro, uniforme, mentre i rilievi rotondeggianti presentano macchie di colore irregolarmente sparse. Di conseguenza ne deriva che la striatura è notevolmente accentuata, con macchie di colore sparse molto evidenti (fig. 12). Peso medio g. 0,235.

Le differenze per quello che si riferisce all'aspetto del periostraco sono dunque abbastanza notevoli fra l'una e l'altra delle 5 popolazioni studiate; mentre nell'ambito di ogni popolazione le particolarità del periostraco sono sensibilmente costanti.

CONCLUSIONI

Da quanto si è detto in precedenza si deduce che gli esemplari di *Cyclostoma elegans* delle 5 popolazioni studiate non differiscono in modo notevole fra di loro per quanto riguarda le proporzioni della conchiglia. Meglio tali esemplari si differenziano fra di loro attraverso la distribuzione seriale dei caratteri. Infatti considerando i valori medi delle misure ed i relativi grafici si possono distinguere 4 gruppi. Il primo relativo ai valori bassi (Is. Tremiti), il secondo che comprende gli esemplari provenienti dal Gargano (valori medi), il terzo comprendente gli esemplari di Massa e di Siena (valori medi) ed infine un quarto gruppo che comprende gli esemplari a valori più alti e cioè quello di Bologna. Inoltre le popolazioni di Bologna e delle Tremiti presentano una variabilità molto più accentuata delle altre, sia per quanto riguarda i valori delle misure, sia per i valori dei rapporti.

È da notare che i valori trovati per gli esemplari del Gargano sono compresi fra quelli degli esemplari delle Is. Tremiti e quelli delle popolazioni di Siena e di Massa. Resta però dubbio che questi

gruppi istituiti considerando le sole dimensioni, abbiano valore di razze locali tanto più che i valori dei rapporti sono come si è detto quasi uguali. I caratteri che nel nostro caso meglio si presterebbero a differenziare nell'ambito dei *Cyclostoma* studiati, diverse popolazioni sono invece quelli che si riferiscono all'aspetto del periostraco che presenta differenze sensibili e costanti fra l'una e l'altra delle popolazioni considerate. Queste differenze sono tali, specialmente fra gli esemplari delle Is. Tremiti e del Gargano, che non permettono affatto di raggruppare le varie popolazioni come era stato possibile fare considerando i valori medi delle misure.

Tuttavia per attribuire ai caratteri del periostraco il valore di caratteri differenziali al fine di individualizzare le varie popolazioni, occorrerebbe sottoporli ad una accurata analisi genetica onde stabilire con sicurezza il loro comportamento ereditario. Solo così sarebbe eventualmente possibile di giungere a differenziare varie popolazioni distinte nell'ambito della specie studiata.

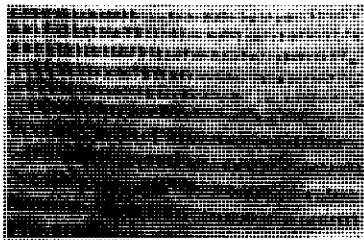


FIG. 9.



FIG. 10.

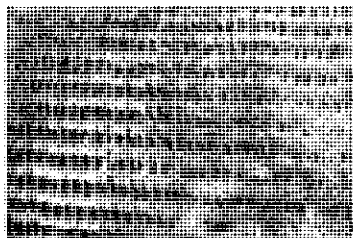


FIG. 11.

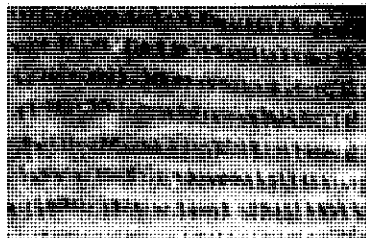


FIG. 12.

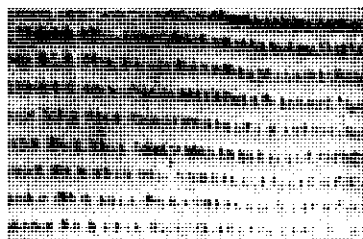


FIG. 13.

Aspetti del periostraco delle 5 popolazioni di *Cyclostoma elegans*. - Fig. 9, *C. elegans* di Bologna. - Fig. 10, *C. elegans* di Massalombarda. - Fig. 11, *C. elegans* di Siena. - Fig. 12, *C. elegans* del Gargano. - Fig. 13, *C. elegans* delle Isole Tremiti (Capperaia).

QUATERNIONS ET ESPACE ELLIPTIQUE (*)

GEORGES LEMAITRE

Académicien Pontifical

SUMMARIVM. -- Auctor quaterniones adhibet ut, rationem a Klein usurpatam in Erlangeniano programme secutus, praecipuas elliptici spatii proprietates determinet.

1. - INTRODUCTION

Les quaternions ont été inventés en 1843 par Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON. Il est difficile d'imaginer avec quel enthousiasme, mais aussi avec quelle confusion, cette idée géniale a été développée par son auteur.

Dans une « Introduction to quaternions » publiée à Londres (Mac Millan 1873) par P. KELLAND et P. G. TAIT, le premier des auteurs déclare: « The first work of Sir Wm HAMILTON *Lectures on Quaternions* (1852), was very dimly and imperfectly understood by me and I dare say by others ». Il ajoute que les *Elements of Quaternions* (1865) et même l'exposé plus clair de son co-auteur P. G. TAIT: *An elementary Treatise on Quaternions* ne peuvent être considérés comme élémentaires.

Le livre lui-même dont ces remarques sont tirées a certainement un caractère élémentaire, il exagère même dans ce sens, en présentant des démonstrations de théorèmes trop connus pour lesquels l'emploi d'un nouveau type de calcul ne semble pas se justifier.

(*) Nota presentata nella Tornata dell'8 febbraio 1948.

Pourtant l'influence de la découverte d'HAMILTON a été très grande. Non seulement, c'est d'elle que s'est dégagé le calcul vectoriel, avec ses notions si fécondes de produit scalaire et de produit vectoriel, mais aussi le développement de la géométrie elliptique par CAYLEY, CLIFFORD etc. semble avoir été fortement influencée par le nouveau calcul, ainsi qu'en témoigne le titre d'un ces travaux : « Preliminary sketch on bi-quaternions » (1873).

Je ne me propose pas de débrouiller l'histoire touffue de ces découvertes, mais, en étudiant l'espace elliptique ou sphérique, il m'est apparu que les quaternions fournissent des notations extrêmement simples et élégantes d'où les propriétés de cet espace découlent immédiatement.

Comme l'espace elliptique joue dans les théories cosmogoniques un rôle de plus en plus grand, j'ai pensé qu'un exposé qui ne suppose chez le lecteur que des connaissances élémentaires de géométrie analytique pourrait présenter quelque utilité même si les spécialistes de l'algèbre, de la géométrie et de l'histoire de la science du siècle dernier, doivent porter le jugement qu'il ne contient rien de vraiment neuf.

Pour l'historique de la question, le lecteur pourra se rapporter aux traités de géométrie et particulièrement à l'ouvrage de W. BLASCHKE *Nicht Euklidische Geometrie und Mechanik* (Teubner 1942) qui présente plus d'un point commun avec le présent exposé mais s'adresse à une tout autre catégorie de lecteurs.

2. - VECTEURS

Un vecteur peut être envisagé au point de vue géométrique et au point de vue algébrique.

Au point de vue algébrique, le vecteur s'obtient en partant du corps des nombres réels, appelés *scalaires*, en leur adjoignant des symboles nouveaux non contenus dans le corps des nombres réels, et désignés ordinairement par les lettres i, j, k .

Sauf pour ces trois lettres, dont l'emploi est consacré par l'usage, nous supposerons que toute lettre latine désigne un scalaire, c'est à dire un nombre réel.

Un vecteur sera donc représenté par

$$xi + yj + zk .$$

L'addition des vecteurs et la multiplication par un scalaire s'obtiendra en appliquant les règles ordinaires du calcul comme si i, j, k étaient des nombres. Le résultat de ces opérations sera encore un vecteur.

Géométriquement, les symboles i, j, k représentent une *base* c'est à dire trois vecteurs de longueur unité et non situés dans un même plan. Nous supposerons que cette base est orthogonale, c'est à dire que les trois vecteurs i, j, k sont deux à deux perpendiculaires.

Alors, les trois scalaires x, y, z sont les *composantes*, ou projections orthogonales du vecteur, sur les trois vecteurs de la base.

Les composantes de la somme de deux vecteurs sont les sommes des composantes de ces vecteurs.

3. — DIRECTIONS

Il est usuel de désigner les vecteurs par des lettres grecques. Nous nous écarterons pourtant quelque peu de cette notation traditionnelle en réservant les lettres grecques aux seuls vecteurs unitaires, c'est à dire aux vecteurs pour lesquels la somme des carrés des composantes est égal à un.

Il nous a paru nécessaire d'introduire une désignation plus brève pour l'expression « vecteur unitaire ». Le terme « direction » nous a paru approprié. En effet, puisqu'un vecteur est une grandeur dirigée, le vecteur unitaire, dont la grandeur est fixée une fois pour toute, ne fait plus qu'indiquer la direction et le terme direction lui convient bien.

4. — QUATERNIONS

L'idée maîtresse d'HAMILTON a été de définir la loi de multiplication des symboles i, j, k et cela de telle façon que toutes les règles du calcul algébrique restent valides à l'exception d'une seule: la pro-

priété commutative de la multiplication. Il fonda ainsi l'algèbre non-commutative.

Dans cette algèbre, la valeur d'un produit peut dépendre de l'ordre des facteurs.

Partant de la table de multiplication de deux des symboles i et j , soit

$$i^2 = -1 \quad j^2 = -1 \quad ij = -ji = k$$

on déduit aisément de ces formules (par l'application des règles ordinaires du calcul, en prenant soin de respecter l'ordre dans lequel se présentent les facteurs) que les formules analogues obtenues en permutant circulairement les lettres i, j, k , soit

$$k^2 = -1 \quad jk = -kj = i \quad ki = -ik = j$$

sont valables.

Appliquant ces règles de calcul au produit d'une direction de composantes x, y, z , par une autre direction α' de composant x', y', z' on obtient

$$\begin{aligned} \alpha\alpha' = & -(xx' + yy' + zz') \\ & + (yz' - zy') i \\ & + (zx' - xz') j \\ & + (xy' - yx') k . \end{aligned}$$

Cette expression est formée d'une partie scalaire et d'une partie vectorielle.

L'usage a prévalu d'appeler produit scalaire la partie scalaire changée de signe, tandis que la partie vectorielle est encore ce que nous appelons le produit vectoriel des deux vecteurs.

Cet agrégat d'un scalaire et d'un vecteur est ce qu'on appelle un quaternion.

5. - QUATERNIONS CONJUGUÉS

On peut remplacer les trois vecteurs de base i, j, k par une autre base de chiralité opposée, c'est à dire présentant avec la première les mêmes rapports que la main droite avec la main gauche.

Un telle base est

$$i' = -i \quad j' = -j \quad k' = -k.$$

Il existe entre les i', j', k' des relations analogues à celles qui existent entre i, j, k . Mais les facteurs y sont transposés c'est à dire écrits dans l'ordre inverse.

Par exemple de

$$k = ij = -ji$$

on déduit

$$k' = j' i' = -i' j'.$$

Supprimant les accents comme inutiles, on dira que le quaternion conjugué est le même quaternion mais rapporté à la base de chiralité opposée. On obtiendra donc le quaternion conjugué en conservant la partie scalaire et en changeant le signe de la partie vectorielle ou, si le quaternion est écrit comme un produit de quaternions, en multipliant les conjuguées des facteurs écrits dans l'ordre inverse.

6. - VERSEURS

Le produit d'un quaternion par le quaternion conjugué est un scalaire, qu'on appelle la norme du quaternion.

La norme du produit de deux quaternions Q et Q' est la produit $QQ'Q'Q$. Mais $Q'Q'$ produit de Q' par le quaternion conjugué Q' est la norme N' de Q' , de même $N = QQ$ est la norme de Q . La norme du produit est donc le produit des NN' normes des facteurs.

Un quaternion dont la norme est égale à un s'appelle un verseur. Le produit de deux verseurs est un verseur.

Une direction peut être considérée comme un quaternion. C'est un quaternion dont la partie scalaire est nulle.

En outre c'est un verseur. En effet, si dans la formule du produit de deux directions, nous faisons d'abord $\alpha' = \alpha$, ce produit est égal à moins un, de telle façon que les directions peuvent être considérées comme des racines de moins un.

Le conjugué du vecteur est ce vecteur changé de signe, la norme, produit du vecteur par le vecteur conjugué, est donc le carré changé de signe, c'est à dire plus un. Une direction est donc un verseur.

Si u est le scalaire et $v \gamma$ de grandeur v et de direction γ le vecteur d'un verseur V , on aura

$$V = u + v \gamma$$

avec

$$u^2 + v^2 = 1$$

Nous pourrions donc écrire

$$u = \cos c, \quad v = \sin c$$

et donc

$$V = \cos c + \gamma \sin c$$

Si

$$V = \alpha \alpha'$$

— $\cos c$ est le produit scalaire des deux directions α et α' tandis que le produit vectoriel est un vecteur de grandeur $\sin c$ et de direction γ .

On pourra donc interpréter géométriquement γ et c en disant que γ est une direction perpendiculaire au plan des deux directions α et α' et que c est le supplément de l'angle formé par ces directions, c'est à dire l'angle extérieur de ces deux directions.

Réciproquement, tout verseur est le produit de deux directions situées dans un plan perpendiculaire au vecteur du verseur et formant un angle, dans le sens convenable, égal à $\pi - c$.

Les formules de la géométrie analytique fournissent un équivalent algébrique de ces notions géométriques. Elles permettent d'établir le résultat que nous venons d'obtenir même si on se place à un point de vue purement algébrique.

Le produit de deux directions n'est une direction que lorsque le produit scalaire est nul, c'est à dire lorsque les deux directions sont perpendiculaires.

Si donc α et β sont perpendiculaires, c'est à dire si

$$\alpha \beta = -\beta \alpha$$

alors ce produit est égal à une direction γ qui est perpendiculaire à α et à β .

7. - NOTATION EXPONENTIELLE.

Il est très utile de représenter un verseur en employant la notation

$$V = e^{c\gamma}$$

que nous allons expliquer.

L'exponentielle se définit par son développement en série de puissances

$$e^{c\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \gamma^n$$

qui peut se décomposer en

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^{2m}}{(2m)!} \gamma^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^{2m+1}}{(2m+1)!} \gamma^{2m+1}$$

Comme

$$\gamma^{2m} = (-1)^m$$

et

$$\gamma^{2m+1} = (-1)^m \gamma$$

et que les développements du cosinus et du sinus sont respectivement

$$\cos c = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m c^{2m}}{(2m)!}$$

et

$$\sin c = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m c^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

on obtient bien

$$e^{c\gamma} = \cos c + \gamma \sin c$$

Il est clair que, tant qu'on n'a affaire qu'à des exponentielles qui contiennent la même direction, c'est à dire la même racine de moins un, on peut utiliser les règles du calcul des exponentielles et en particulier la loi

$$e^{c\gamma} e^{c'\gamma} = e^{(c+c')\gamma}$$

Remarquons encore que si α est perpendiculaire à γ on a

$$\alpha e^{c\gamma} = e^{-c\gamma} \alpha$$

en effet, le premier membre est

$$\alpha \cos c + \alpha \gamma \sin c = \alpha \cos c - \gamma \alpha \sin c = (\cos c - \gamma \sin c) \alpha$$

8. - LE PROGRAMME D'ERLANGEN.

Dans notre exposé de la géométrie sphérique et elliptique, nous allons adopter le point de vue proposé par KLEIN dans le programme d'ERLANGEN.

La géométrie est alors spécifiée lorsqu'on se donne, pour tout couple de points, une certaine expression appelée l'invariant de distance. Deux couples de points pour lesquels l'invariant de distance a mêmes valeurs sont alors considérés comme congruents ou superposables.

Une transformation qui transforme tout couple de points en un couple de points ayant même invariant de distance s'appelle un déplacement et l'étude des groupes de déplacements se réduit à l'étude des groupes de transformations qui laissent invariant l'invariant de distance.

La distance elle-même doit être une fonction de l'invariant de distance, telle que la longueur d'un segment de droite divisé en deux segments partiels soit la somme des longueurs de ces segments.

La longueur du segment est définie comme étant la distance de ses extrémités.

Quant à la droite, nous la considérerons comme un axe de rotation c'est à dire comme un lieu de points laissés invariants par un déplacement.

9. - L'INVARIANT DE DISTANCE.

Nous supposerons que chaque point de l'espace sphérique est spécifié par un verseur V .

Si V et V' sont les verseurs représentatifs de deux points nous définirons l'invariant de distance de ce couple de points par le scalaire

$$I = \frac{1}{2}(V V' + V' V)$$

dans cette expression V et V' désignent le conjugués de V et V' .

Ces définitions suffisent pour définir la géométrie au sens du programme d'ERLANGEN.

Quoique cela ne soit pas nécessaire pour la suite de l'exposé nous intercalons ici quelques remarques qui n'ont d'autre but que de montrer comment nous avons été amenés à choisir ce point de départ.

Si u est le scalaire et x, y, z les composantes du vecteur du verseur V , on a

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1$$

qui peut être considéré comme une hyper-sphère de rayon un ou espace sphérique. Ceci montre comment un verseur peut caractériser un point de l'espace sphérique.

De même, si les lettres accentuées désignent les quantités analogues pour le verseur V' , l'invariant de distance est

$$I = xx' + yy' + zz' + uu'$$

expression qui généralise à quatre dimensions l'expression du cosinus d'un angle en fonction des cosinus directeurs des directions de ses côtés.

Nous pouvons donc prévoir que l'invariant de distance sera le cosinus de la distance.

10. - PARATAXIES.

Un premier groupe de déplacements s'obtient en multipliant le verseur représentatif des divers points de l'espace par un verseur fixe. Nous appellerons ces déplacements des parataxies, parataxies à gauche si la multiplication est faite à gauche, parataxies à droite si elle est faite à droite.

Désignons par

$$e^{a\alpha}, \quad e^{a'\alpha'}$$

deux points quelconques de l'espace, Soit $e^{c\gamma}$ le verseur fixe et $e^{b\beta}$ et $e^{b'\beta'}$ les deux points en lesquels les points $e^{a\alpha}$ et $e^{a'\alpha'}$ sont transformés par une parataxie à gauche, nous aurons

$$e^{b\beta} = e^{c\gamma} e^{a\alpha} \quad e^{b'\beta'} = e^{c\gamma} e^{a'\alpha'}$$

Si I' désigne l'invariant de distance après transformation nous avons à vérifier que $I' = I$. Il vient

$$2I = e^{b\beta} e^{-b'\beta'} + e^{b'\beta'} e^{-b\beta}$$

On a pour les conjugués

$$e^{-b\beta} = e^{-a\alpha} e^{-c\gamma}$$

et

$$e^{-b'\beta'} = e^{-a'\alpha'} e^{-c'\gamma'}$$

obtenu en prenant le produit des conjugués dans l'ordre inverse il vient ainsi

$$I' = e^{c\gamma} I e^{-c\gamma}$$

qui se réduit à I puisque I est un scalaire qui peut tout aussi bien être inscrit en tête du produit.

De ce que le produit de deux verseurs est un verseur résulte que les parataxies à gauche forment un groupe.

Pour les parataxies à droite, nous aurons de même

$$e^{b\beta} = e^{a\alpha} e^{c\gamma}$$

$$e^{b'\beta'} = e^{a'\alpha'} e^{c'\gamma'}$$

et donc

$$2I' = e^{a\alpha} e^{c\gamma} e^{-c\gamma} e^{-a'\alpha'} + e^{a'\alpha'} e^{c'\gamma'} e^{-c\gamma} e^{-a\alpha} = 2I$$

Les parataxies à droites sont donc aussi des déplacements et forment un groupe de déplacements.

11. - HOMOGÉNÉITÉ DE L'ESPACE.

Un verseur dont le vecteur est nul se réduit au scalaire un. Nous appellerons le point correspondant l'origine.

Tout point peut être transformé en l'origine par une parataxie à droite ou à gauche. Il suffit de prendre pour symbole de la parataxie

le verseur conjugué au symbole du point à transporter à l'origine. Pour $e^{c\gamma} = e^{-a\alpha}$ on a en effet $e^{b\beta} = 1$.

Il résulte de ceci que l'espace considéré est homogène puisqu'il existe des déplacements qui transportent tout point à l'origine.

12. - ROTATION.

Si on effectue successivement une parataxie à gauche et une parataxie à droite ayant comme symbole le verseur conjugué à celui de la parataxie à gauche, on obtient évidemment un déplacement, c'est à dire une transformation qui conserve l'invariant de distance. Cette transformation transforme un point quelconque $e^{a\alpha}$ en un point $e^{b\beta}$ par la formule

$$e^{b\beta} = e^{c\gamma} e^{a\alpha} e^{-c\gamma}$$

Si $e^{a\alpha}$ est l'origine $e^{b\beta}$ sera aussi l'origine. La transformation conserve donc l'origine, nous dirons que c'est une rotation autour de l'origine.

13. - DROITES.

Ceci nous permet de définir une droite comme une axe de rotation.

Les points qui sont conservés par la rotation sont compris dans l'expression

$$e^{c'\gamma}$$

où c' peut prendre une valeur arbitraire.

Cette expression pour c' variable est donc l'équation d'une droite passant par l'origine.

En déplaçant l'origine par une parataxie, on obtiendra l'équation d'une droite passant par le point dans lequel la parataxie a transformé l'origine.

14. — DROITES PARATACTIQUES.

Les parataxies de même espèce (c'est à dire toutes à droites ou toutes à gauche) de direction fixe γ , mais de paramètre c quelconque forment un groupe, sous-groupe du groupe de parataxies ceci résulte de ce que

$$e^{c\gamma} e^{c'\gamma} = e^{(c+c')\gamma}$$

de telle façon que les deux parataxies de paramètre c et c' effectuées successivement dans un ordre quelconque sont équivalentes à une parataxie unique de paramètre

$$c'' = c + c'$$

Ce groupe particulier conserve la droite $e^{c\gamma}$ (c variable) c'est à dire transforme les points de cette droite en des points de la même droite.

Ce groupe conservera (même s'il s'agit de parataxies à gauche), toutes les droites

$$e^{c\gamma} e^{x\xi}$$

(c variable, γ , x , ξ fixes.)

Pour diverses valeurs de x et ξ mais même valeur de γ , ces droites sont dites paratactiques entres elles (à gauche).

De même les droites

$$e^{x\xi} e^{c\gamma}$$

(c seul variable) sont conservées par les parataxies à droite et se sont des paratactiques à droite.

15. — DISTANCES.

Considérons encore deux parataxies à gauche de direction γ et de paramètres c et c' , effectuées successivement.

La première transforme l'origine en le point $e^{c\gamma}$. La seconde transforme ce point en $e^{(c+c')\gamma}$.

Lorsque nous avons trois points en ligne droite, la longueur du segment total doit être la somme des longueurs des segments partiels. La longueur d'un segment est la distance des extrémités, c'est à dire une fonction de l'invariant de distance pour ces deux points. L'invariant est $\cos c$ et $\cos c'$ pour les segments partiels et $\cos c''$ pour le segment total.

c, c', c'' sont donc des fonctions des invariants de distance et puisque

$$c'' = c + c'$$

ce sont des fonctions additives.

Pour un choix convenable de l'unité de longueur, c, c' et c'' sont donc les distances elles-mêmes.

16. - DROITES PERPENDICULAIRES.

Considérons deux droites passant par l'origine, soit

$$e^{c\xi}$$

pour x variable et

$$e^{\eta\eta}$$

pour y variable.

Supposons en outre que les directions ξ et η sont perpendiculaires entre elles; nous nous proposons de montrer que les deux droites sont perpendiculaires.

Ceci peut paraître évident, mais en réalité cela doit être démontré. En effet les directions ont été introduites sans référence à l'espace sphérique et à son invariant de distance.

Nous définirons l'angle droit, comme dans Euclide, par la condition que l'angle est égal à l'angle adjacent obtenu en prolongeant un des côtés. Autrement dit, il doit exister un déplacement (une rotation) qui transforme la première droite en la seconde et la seconde en la droite opposée à la première.

Le calcul est fort élémentaire, mais nous le donnons en détail à titre d'exemple de ce type de calcul.

Puisque les directions ξ et η sont perpendiculaires, il existe une direction ζ telle que

$$\zeta = \xi\eta = -\eta\xi$$

Considérons alors la rotation

$$e^{b\beta} = e^{\frac{\pi}{4}\xi} e^{a\alpha} e^{-\frac{\pi}{4}\xi}$$

qui transforme un point quelconque $e^{a\alpha}$ en $e^{b\beta}$. Nous devons montrer que si nous posons $e^{a\alpha} = e^{x\xi}$, nous obtenons $e^{b\beta} = e^{x\eta}$ et que si nous posons $e^{a\alpha} = e^{y\eta}$, nous obtenons $e^{b\beta} = e^{-y\xi}$.

Dans le premier cas, nous avons

$$e^{b\beta} = \frac{1}{2}(1+\zeta)e^{x\xi}(1-\zeta) = \frac{1}{2}(1+\zeta)(1-\zeta)\cos x + \frac{1}{2}(1+\zeta)\xi(1-\zeta)\sin x$$

Mais

$$(1+\zeta)(1-\zeta) = 2$$

et

$$(1+\zeta)\xi(1-\zeta) = (1+\zeta)^2\xi = 2\zeta\xi = 2\eta$$

il vient donc

$$e^{b\beta} = \cos x + \eta \sin x = e^{x\eta}$$

Dans le second cas

$$e^{b\beta} = \frac{1}{2}(1+\zeta)e^{y\eta}(1-\zeta) = e^{-x\xi}$$

la calcul est le même, γ remplaçant ξ , mais

$$\zeta\eta = -\xi$$

17. — RECTANGLES GAUCHES.

Soit $e^{c\gamma}$ un point fixe; alors pour x et y variables et ξ perpendiculaire à η

$$e^{c\gamma} e^{x\xi}$$

et

$$e^{c\gamma} e^{y\eta}$$

représentent deux droites perpendiculaires entre elles.

En particulier si $\eta = \gamma$, la seconde

$$e^{(c+y)\gamma}$$

est une droite qui passe par l'origine, c'est la droite joignant l'origine au point $e^{c\gamma}$. La première droite est la paratactique à gauche à la droite $e^{x\xi}$ passant par le point fixe $e^{c\gamma}$.

Comme la droite $e^{x\xi}$ est aussi perpendiculaire à la droite $e^{(c+x)\gamma}$ nous voyons que les deux paratactiques $e^{x\xi}$ et $e^{c\gamma}$ admettent une perpendiculaire commune.

Effectuons une parataxie à droite de symbole $e^{x'\xi}$ (x' fixe) les deux droites $e^{x\xi}$ et $e^{c\gamma}$, paratactiques à gauche, se transforment chacune en elles mêmes et la perpendiculaire commune se déplace en conservant la même longueur.

La figure formée par les deux paratactiques et les deux perpendiculaires communes est donc un rectangle, en ce sens que c'est un quadrilataire dont les angles sont droits et les côtés opposés égaux chacun à chacun. Mais ce n'est pas une figure plane, c'est un rectangle gauche (au sens de l'anglais « skew »).

18. - SURFACE DE CLIFFORD.

On appelle surface de CLIFFORD, le lieu des droites paratactiques à une même droite, dite axe de la surface, et telles que la perpendiculaire commune avec l'axe ait une même longueur dite rayon de la surface.

Considérons d'abord des paratactiques à gauche; les points la surface de CLIFFORD d'axe

$$e^{x\xi}$$

(x variable) sont

$$e^{c\gamma} e^{x\xi}$$

où c est le rayon de la surface et où x est variable ainsi que la direction γ qui peut représenter toute direction perpendiculaire à ξ .

Pour des paratactiques à droite, on aurait de même

$$e^{x'\xi} e^{c\gamma'}$$

Les deux expressions sont égales, si on pose

$$x' = x \quad e^{c\gamma'} = e^{-x\xi} e^{c\gamma} e^{x\xi}$$

c'est à dire

$$\gamma' = e^{-x\xi} \gamma e^{x\xi}$$

Ceci montre que le lieu des paratactiques à droite est le même que celui des paratactiques à gauche.

La surface de CLIFFORD est le lieu des points à distance constante c de l'axe de la surface. C'est une surface réglée qui admet deux systèmes de génératrices, les paratactiques à gauche et à droite à l'axe de la surface.

Si on effectue des déplacements paratactiques qui conservent l'axe, la surface de CLIFFORD se transforme en elle-même, les génératrices d'un système se transforment en elles-mêmes et les génératrices de l'autre système se permutent.

Deux couples de génératrices de chacun des deux systèmes forment donc des parallélogrammes, les angles sont égaux ou supplémentaires et les côtés opposés sont égaux.

L'angle de ces parallélogrammes se calcule aisément; en effet les deux génératrices passant par le point $e^{c\gamma}$ sont

$$e^{c\gamma} e^{x\xi}$$

(x variable) et

$$e^{x'\xi} e^{c\gamma}$$

(x' variable). Une parataxie à gauche de symbole $e^{-c\gamma}$ amène le sommet de l'angle à l'origine, les droites se transforment en

$$e^{x\xi}$$

et

$$e^{-c\gamma} e^{x'\xi} e^{c\gamma}$$

qui se transforment l'une dans l'autre par une rotation d'angle $2c$.

Peut-être ce dernier point n'est-il pas parfaitement éclairci, nous y reviendrons dans un instant après avoir étudié le plan.

19. — DROITES CONJUGUÉES.

Dans le cas particulier où $c = \frac{\pi}{2}$ on a

$$e^{c\gamma} = \gamma$$

et donc, puisque γ et ξ sont supposés perpendiculaires

$$e^{x'\xi} \gamma = \gamma e^{-x'\xi}$$

les deux paratactiques, celle à droite et celle à gauche sont donc identiques. Leurs points correspondent pour

$$x' = -x$$

Considérons un point quelconque sur la droite

$$V' = e^{x'\xi} \gamma$$

(c'est à dire une valeur particulière de la variable x') et un point quelconque sur la droite

$$V = e^{x\xi}$$

Ces deux droites sont paratactiques à droite pour le cas exceptionnel $c = \frac{\pi}{2}$.

Nous allons montrer que ces deux points quelconques sont à la même distance $\frac{\pi}{2}$ c'est à dire que leur invariant de distance est nul. On a en effet

$$I = \frac{1}{2}(VV' + V'V) = \frac{1}{2}e^{x\xi}(-\gamma)e^{-x'\xi} + \frac{1}{2}e^{-x'\xi}\gamma e^{-x\xi} = \frac{1}{2}[-e^{(x+x')\xi}\gamma + e^{(x'+x)\xi}\gamma] = 0$$

On montrerait facilement que la droite joignant V et V' c'est à dire tout droite coupant les deux droites v et v' (pour x et x' variables) est perpendiculaire commune à ces deux droites. Mais sans doute avons-nous donné assez d'exemples de ces calculs.

Les droites paratactiques pour $c = \frac{\pi}{2}$ sont dites conjuguées ou polaires absolues.

20. - PLAN.

Le plan peut être défini comme le lieu des droites perpendiculaires à une même droite

$$e^{cx} e^{x\xi}$$

(x variable)

Les points du plan sont donc représentés par les verseurs

$$V = e^{c\gamma} e^{y\eta}$$

y est arbitraire et η aussi mais perpendiculaire à ξ .

Nous allons montrer que le plan est le lieu des points situés à la distance $\frac{\pi}{2}$ d'un point

$$V' = e^{c\gamma} \xi$$

appelé centre du plan.

Il nous faut vérifier que l'invariant de distance des deux points V et V' est nul. Nous avons

$$I = \frac{1}{2}(V V' + V' V) = \frac{1}{2} e^{c\gamma} e^{y\eta} (-\xi) e^{-c\gamma} + \frac{1}{2} e^{c\gamma} \xi e^{-y\eta} e^{-c\gamma}$$

qui est bien nulle, puisque pour $\xi \eta = -\eta \xi$ on a

$$\xi e^{-y\eta} = e^{y\eta} \xi$$

On peut mettre en évidence dans l'équation du plan, le verseur V' représentant le centre

Posant

$$\zeta = \xi \eta$$

on a

$$V = V'(-\xi) e^{y\eta} = V'(-\xi \cos y - \zeta \sin y) = V' \chi$$

Il est facile de se rendre compte que χ est une direction et une direction arbitraire. En effet c'est la direction dont les projections orthogonales sur les directions $-\xi$ et $-\zeta$ sont respectivement $\cos y$ et $\sin y$. χ est donc dans le plan de ξ et ζ et fait un angle y avec $-\xi$. Mais η est une direction arbitraire perpendiculaire à ξ et y est arbitraire donc χ est arbitraire.

En particulier si le centre est à l'origine, nous voyons que les directions représentent les points d'un plan, c'est à dire d'une sphère de rayon $\frac{\pi}{2}$ centrée sur l'origine.

Comme les théorèmes familiers qui montrent que les angles au centre sont mesurés par l'arc intercepté sur la sphère s'appliquent sans modification, il s'en suit que l'angle de deux droites issues du centre $e^{x\xi}$ et $e^{y\eta}$ est la distance des deux directions ξ et η .

Lorsque les verseurs se réduisent à des directions, l'invariant de distance se réduit au produit scalaire des deux directions. L'angle des deux droites est donc l'angle des directions de ces droites.

En particulier, dans une rotation

$$e^{b\beta} = e^{c\gamma} e^{a\alpha} e^{-c\gamma}$$

on a pour $a = b = \frac{\pi}{2}$

$$\beta = e^{c\gamma} \alpha e^{-c\gamma}$$

et si α est perpendiculaire à γ

$$\beta = e^{2c\gamma} \alpha = \alpha \cos 2c + \gamma \alpha \sin 2c$$

β a donc tourné d'un angle $2c$ dans le plan perpendiculaire à γ .

Ceci achève de justifier la fin du paragraphe 18.

21. — POINTS ANTIPODES.

Lorsque x varie de zéro à 2π , l'expression

$$e^{ix\xi}$$

représente successivement les divers points d'une droite en partant de l'origine et en y revenant pour parcourir ensuite dans le même ordre les points déjà parcourus. On a en effet

$$e^{(x+2\pi)\xi} = e^{ix\xi}$$

La droite est donc une ligne fermée dont la longueur est égale à 2π .

Si nous considérons toutes les droites passant par l'origine c'est à dire lorsque nous considérons différentes valeurs de la direction ξ , nous voyons que pour $x = \pi$ toutes ces droites passent par le point -1 .

Ce point est dit le point antipode de l'origine.

Si nous considérons de même des droites passant par un point $e^{c\gamma}$ nous verrions que toutes ces droites passent par le point $-e^{c\gamma}$ point antipode de $e^{c\gamma}$.

Les points antipodes sont donc représentés par des verseurs de signes opposés, toute droite passant par un point passe aussi par le point antipode de ce point.

22. - ESPACE ELLIPTIQUE.

Si, au lieu de l'invariant de distance I , nous avons pris comme invariante distance, I^2 ou la valeur absolue de I , alors deux verseurs V et $V' = -V$ auraient comme invariant de distance plus un. Au lieu de les considérer comme représentant des points distincts de l'espace, les points antipodes, on devrait les considérer comme deux représentations d'un seul et même point de l'espace.

A part cette circonstance relative à la disparition des points antipodes, toutes les formules établies pour l'espace sphérique demeurent valables pour le nouvel espace.

Celui-ci est appelé l'espace *elliptique*.

Certains auteurs l'appelle pourtant espace simplement elliptique de façon à laisser au terme « espace elliptique » un sens générique qui s'applique à l'un et l'autre des deux espaces considérés comme des « formes » diverses de l'espace elliptique.

23. - REPRÉSENTATION EUCLIDIENNE DE L'ESPACE ELLIPTIQUE.

Remarquons tout d'abord, que des figures infiniment petites de l'espace elliptique peuvent, à la limite, être considérés comme des figures euclidiennes.

Ceci apparaît déjà dans le fait que l'angle de gauchissement du rectangle gauche est égal au côté; il tend donc vers zéro si ce côté est infiniment petit et alors le rectangle devient plan et la géométrie euclidienne.

On peut aussi montrer que lorsque x, y, z et x', y', z' sont infiniment petits, l'invariant de distance I , devient en négligeant les quantités d'ordre supérieur au second

$$I = 1 - \frac{1}{2} [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2] + \dots$$

comme I est le cosinus de la distance r , celle-ci est à la même approximation égale à la valeur euclidienne

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

Nous pouvons utiliser cette remarque, pour représenter la totalité de l'espace elliptique, dans une sphère de rayon infiniment petit ε . Notons que, par exception nous employons cette lettre grecque, dans son sens traditionnel d'un scalaire infiniment petit.

Un point

$$e^{x\xi}$$

pourra être représenté à l'intérieur de la sphère par le point

$$e^{x\xi} = e^{\varepsilon x \xi}$$

soit, en négligeant les termes en ε^2 par le point

$$1 + \varepsilon x \xi$$

Comme la géométrie peut être considéré comme euclidienne dans la sphère, nous aurons, en prenant ε comme unités des longueurs euclidiennes, qu'un point de l'espace elliptique $e^{x\xi}$ est représenté par un vecteur euclidien de direction ξ et de longueur x .

Nous obtenons tous les points de la droite en considérant toutes les valeurs de x de moins $\frac{\pi}{2}$ à plus $\frac{\pi}{2}$. Les points extrêmes représentés sur la sphère de rayon $\frac{\pi}{2} \varepsilon$ sont les points antipodes de cette sphère et représenteraient les points antipodes de l'espace si nous considérons l'espace sphérique. Comme nous considérons l'espace elliptique ces deux points son deux représentations d'un même point de l'espace elliptique.

Tous les points de cet espace sont donc représentés à l'intérieur de notre sphère euclidienne et les points situés sur la frontière de la représentation y sont représentés deux fois.

On n'a donc jamais de difficulté à suivre sur la représentation un contour qui en atteint le bord, puisque tous les points du bord ont deux représentations de telle façon que, au lieu de sortir de la sphère, on peut toujours passer à l'autre représentation du même point et continuer à cheminer vers l'intérieur de la sphère.

24. — REPRÉSENTATION DE L'ESPACE SPHÉRIQUE.

On peut utiliser une représentation analogue pour l'espace sphérique. On suppose maintenant qu'à l'intérieur de la sphère, il y a deux sortes de points. Nous dirons les points bleus et les points roses. Les points de la frontière ne sont pas plus d'une espèce que de l'autre. Nous dirons que ce sont des points mauves.

Nous supposons qu'on ne peut passer d'un point rose à un point bleu que par l'intermédiaire d'un point mauve.

En d'autres termes, il y a, à l'intérieur de la sphère, deux espaces distincts, l'espace bleu et l'espace rose et ces deux espaces sont raccordés par la frontière mauve, surface de la sphère.

Cette représentation peut être modifiée de diverses façons qui en respectent la topologie en la faisant ressembler aux projections de la sphère, telle que la projection stéréographique ou la projection orthogonale. Mais ces développements nous entraîneraient en dehors de notre sujet.

SULLA PERMUTABILITÀ
DEI FRAZIONAMENTI ELEMENTARI
DI UN COMPLESSO TOPOLOGICO QUALSIASI (*)

MICHELANGELO VACCARO

SVMMARIVM. — *Elementariae partitiones complexuum topologicorum perpenduntur, et determinantur omnes casus quibus inter eorum binos quoslibet permutatio fieri possit.*

È noto ⁽¹⁾ che, dato un complesso topologico qualsiasi, il suo frazionamento regolare si può ottenere con una successione di frazionamenti elementari, disposti secondo un certo ordine, relativi alle singole sue celle. In molti casi però, e specialmente dal punto di vista pratico, non è necessario estendere il frazionamento regolare a tutto il complesso bensì di limitarlo ad alcuni frazionamenti elementari, ossia a un frazionamento regolare locale.

Risulta però essenziale in questi casi (quali ad esempio il frazionamento elementare applicato a tutte le celle della stessa dimensione di una data stella) saper riconoscere quand'è che due distinti frazionamenti elementari sono fra loro permutabili ossia conducono, dopo l'applicazione di entrambi, allo stesso complesso frazionato, qualunque sia l'ordine secondo cui essi vengono applicati.

Dall'analisi che faremo risulterà che esiste un solo caso di non permutabilità e precisamente allorché le due celle, che vengono rispet-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi nella Tornata dell'8 febbraio 1948.

(1) Vedi per es. P. ALEXANDROFF-H. HOPF, «Topologie» I, pag. 137.

tivamente frazionate, non sono incidenti ma hanno almeno un vertice in comune e sono contenute in almeno una stessa cella del complesso dato. In ogni altro caso invece i due corrispondenti frazionamenti elementari sono permutabili.

I complessi di cui ci occuperemo saranno sempre costituiti da sistemi di n -ple di punti, che per comodità chiameremo ancora celle, di un qualsiasi campo di vertici, tali che, se una n -pla fa parte del sistema, ogni n -pla ad essa subordinata ne fa ancora parte.

Esponiamo in breve quello che intendiamo per frazionamento elementare.

Dato un qualsiasi complesso K e una qualsiasi sua cella E , che si dirà la cella relativa al frazionamento elementare che vogliamo definire, si sopprima dal complesso K la stella di celle individuata da E , ossia tutte le celle di K contenenti E . Il sistema di celle che così si ottiene è ancora un complesso K' perchè se una cella di K non contiene E e quindi rimane, ogni sua faccia non contiene E e quindi rimane anch'essa.

Aggiungiamo al campo dei vertici di K un nuovo vertice P , che può simboleggiare, se si vuole, la cella E stessa, e consideriamo la stella Σ , di centro P , che proietta da P il complesso O_E , contenuto in K e K' , costituito da tutte le celle di K ottenibili prendendo una qualsiasi cella contenente la cella E e privandola di almeno un vertice di E .

La stella Σ così ottenuta è tale che le celle che le mancano perchè essa sia un complesso non sono altro che le celle del complesso O_E e appartengono quindi al complesso K' . Ciò vuol dire che il sistema di celle riunione del complesso K' e della stella Σ risulta ancora un complesso K_E il quale dicesi ottenuto da K mediante il *frazionamento elementare* relativo alla sua cella E .

In un qualsiasi frazionamento elementare ci sono celle che non mutano, celle che si trasformano e celle che compaiono *ex novo*. Precisamente una cella di K che non contiene la E non viene toccata dal frazionamento; una cella A che invece contiene la E si muta in una cella A' , che diremo la sua *trasformata*, che si ottiene sostituendo a tutti i suoi vertici contenuti anche in E l'unico nuovo vertice P . Si hanno infine delle nuove celle ottenibili prendendo la trasformata A' di una qualsiasi cella A contenente E e facendone la riunione con una qualsiasi cella non vuota del contorno di E .

In altre parole una qualsiasi cella A di K se non contiene E rimane inalterata, mentre se la contiene si muta nel sistema di celle del tipo:

$$A + P - B$$

ove B è una qualsiasi cella contenuta in E e *non vuota*. Se B coincide con E si ottiene la trasformata A' di A .

Se la cella E è costituita da un sol vertice di K il frazionamento elementare corrispondente si riduce all'identità, se invece E è la cella vuota del complesso K , siccome ogni cella di K contiene la E , non ci sono celle inalterate ma ogni cella E si muta nel sistema

$$A + P - B :$$

sistema che purtroppo è vuoto in quanto non ci sono celle B non vuote contenute nella cella vuota E . Il complesso K_E è pertanto il complesso vuoto.

La reiterazione di un qualsiasi frazionamento elementare porta a frazionare il complesso frazionato K_E in un suo vertice P , caso che, come abbiamo visto, è l'identità, ossia il frazionamento porta al K_E stesso.

Pertanto tutte le potenze dell'operazione « frazionamento elementare » a partire dalla seconda si riducono a coincidere col frazionamento stesso.

La situazione è un'altra se dopo un frazionamento elementare se ne applica uno diverso e qui appunto sorge la questione della loro permutabilità. Bisogna però precisare le cose. Consideriamo due diversi frazionamenti elementari di uno stesso complesso K , ossia relativi a due diverse celle E_1 e E_2 . Ognuno dei due frazionamenti può essere inteso oltre che applicato a K anche applicato al frazionato di K mediante il rimanente frazionamento elementare, ove è da intendersi che la cella ad esso relativa va sostituita con la sua trasformata se essa viene toccata dall'altro frazionamento.

Si ottengono con ciò due complessi $K_{E_1 E_2}$ e $K_{E_2 E_1}$ aventi lo stesso campo di vertici. Se questi complessi coincidono, i due frazionamenti corrispondenti si dicono *permutabili*, altrimenti no.

Non sempre esiste questa permutabilità e noi ci proponiamo appunto di ricercare i casi in cui essa vale. Il risultato della nostra ana-

lisi ci porta a concludere affermativamente per i frazionamenti elementari relativi a coppie di celle o disgiunte, o indipendenti o incidenti e negativamente nei casi contrari contemporaneamente a tutte e tre queste possibilità. Esaminiamo infatti i vari casi possibili.

1. CASO DI DUE CELLE DISGIUNTE. — Esaminiamo dapprima il caso di due frazionamenti elementari relativi a due celle E_1 e E_2 disgiunte, ossia prive di vertici comuni ad entrambe.

In questo caso ognuna delle due celle non è toccata dal frazionamento elementare relativo alla rimanente. Studiamo per esempio la struttura di $K_{E_1 E_2}$.

Una cella A non contenente la E_1 resta inalterata dopo il primo frazionamento. Se non contiene neppure la E_2 resta inalterata anche dopo il secondo, se la contiene si muta nel sistema di celle

$$A + P_2 - B_2.$$

Se invece si ha una cella A contenente la E_1 essa dopo il 1° frazionamento si muta nel sistema di celle del tipo

$$A + P_1 - B_1.$$

Se A non contiene E_2 nessuna di queste celle la contiene e restano pertanto inalterate nel 2° frazionamento; se A invece contiene E_2 , siccome B_1 è una cella contenuta in E_1 , è anch'essa disgiunta da E_2 e quindi ogni cella $A + P_1 - B_1$ contiene E_2 e si muta nel 2° frazionamento nel sistema di celle

$$A + P_1 + P_2 - B_1 - B_2.$$

Riassumendo si hanno i 4 tipi di celle:

a) A ,

b) $A + P_1 - B_1$,

c) $A + P_2 - B_2$,

d) $A + P_1 + P_2 - B_1 - B_2$,

ove A indica una qualsiasi cella K che rispettivamente:

- a) non contiene nè E_1 nè E_2 ,
- b) contiene la E_1 ma non la E_2 ,
- c) contiene la E_2 ma non la E_1 ,
- d) contiene sia la E_1 che la E_2 .

In questo caso pertanto la simmetria di struttura del complesso $K_{E_1 E_2}$ rispetto alle due celle E_1 e E_2 ci porta a concludere che esso coincide con $K_{E_2 E_1}$ ossia che *due frazionamenti elementari relativi a due celle disgiunte sono fra loro permutabili*.

2. CASO DI 2 CELLE INDIPENDENTI. - Esaminiamo ora il caso di due frazionamenti elementari relativi a due celle indipendenti ossia tali che nel complesso K non c'è alcuna cella che le contenga entrambe.

Anche in questo caso ognuna delle due celle non è toccata dal frazionamento relativo alla rimanente. Studiamo ad esempio la struttura del complesso $K_{E_1 E_2}$. Una cella A che non contenga la E_1 resta inalterata dopo il primo frazionamento. Se non contiene anche la E_2 , essa si ritrova inalterata in $K_{E_1 E_2}$; se contiene la E_2 essa si muta nel sistema di celle $A + P_2 - B_2$.

Se invece si è in presenza di una cella A contenente la E_1 , essa si muta nel sistema di celle $A + P_1 - B_1$. La cella A_1 contenendo la E_1 , non può contenere la E_2 perchè E_1 e E_2 sono indipendenti: da ciò risulta che neppure la $A + P_1 - B_1$ può contenere la E_2 e quindi ogni cella di questo tipo resta inalterata nel secondo frazionamento.

Riassumendo si hanno i 3 tipi di celle:

- a) A ,
- b) $A + P_1 - B_1$,
- c) $A + P_2 - B_2$,

ove rispettivamente A indica:

- a) una cella che non contiene nè E_1 nè E_2 ,
- b) una cella che contiene solo la E_1 ,
- c) una cella che contiene solo la E_2 .

Dalla simmetria del risultato si deduce anche qui che *frazionamenti relativi a celle indipendenti sono fra loro permutabili*.

3. CASO DI DUE CELLE INCIDENTI. - Esaminiamo infine il caso di due frazionamenti relativi a due celle incidenti ossia a due celle E_1 e E_2 di cui la seconda, ad esempio, è contenuta nella prima (ma non viceversa).

Esaminiamo dapprima la struttura di $K_{E_1 E_2}$. È da notare innanzi tutto che la E_2 resta inalterata nel primo frazionamento giacchè non contiene E_1 .

Una cella A che non contiene E_1 resta inalterata dopo il primo frazionamento. Se non contiene neppure la E_2 resta inalterata anche dopo il secondo. Se invece contiene la E_2 essa dà luogo al sistema di celle del tipo

$$A + P_2 - B_2.$$

Passiamo alle celle A che contengono la E_1 . Esse si mutano ciascuna in un sistema di celle del tipo

$$A + P_1 - B_1.$$

La A , in quanto contiene la E_1 contiene anche la E_2 e pertanto le celle $A + P_1 - B_1$, con B_1 cella B_1^* avente almeno un vertice in comune con E_2 , non contengono la E_2 e quindi restano inalterate; quelle invece con la B_1 priva di vertici in comune con E_2 contengono la E_2 e pertanto si mutano in sistemi di celle del tipo

$$A + P_1 - B_1 + P_2 - B_2.$$

B_1 e B_2 non hanno vertici in comune: B_1 è in $E_1 - E_2$ e B_2 in E_2 ; la loro riunione è quindi una qualsiasi cella B'_1 non vuota contenuta in E_1 ma non in E_2 nè in $E_1 - E_2$ e con ciò le celle in questione diventano della forma

$$A + P_1 + P_2 - B'_1.$$

Si hanno pertanto i 4 tipi di celle:

- a) A ,
- b) $A + P_2 - B_2$,
- c) $A + P_1 - B_1^*$,
- d) $A + P_1 + P_2 - B'_1$,

ove A indica rispettivamente

- a)* una cella che non contiene nè E_1 nè E_2 ,
- b)* una cella che non contiene E_1 ma solo E_2 ,
- c)* e *d)* una cella che contiene E_1 (e quindi anche E_2).

Questa è la struttura di $K_{E_1 E_2}$. Passiamo ora a quella di $K_{E_2 E_1}$. È da notare innanzitutto che dopo il frazionamento relativo a E_2 la E_1 si trasforma nella

$$E_1 + P_2 - E_2$$

e pertanto è rispetto a quest'ultima che va applicato il secondo frazionamento.

Una cella A non contenente la E_2 rimane inalterata; essa non contiene neanche la $E_1 + P_2 - E_2$ per la presenza in questa di P_2 e quindi resta inalterata anche in $K_{E_2 E_1}$.

Consideriamo invece una cella A contenente la E_2 . Essa si muta nel sistema di celle del tipo

$$A + P_2 - B_2.$$

Ogni cella di questo sistema può o non può contenere a seconda dei casi la cella $E_1 + P_2 - E_2$ trasformata di E_1 . Per distinguere i due casi consideriamo la cella virtuale

$$A + P_2 - B_2 - (E_1 + P_2 - E_2) = A + E_2 - E_1 - B_2$$

che si può anche scrivere così:

$$(A - E_1) - (E_2 - B_2).$$

Questa risulterà una effettiva cella solo se la A contiene la E_1 . Pertanto se A non contiene la E_1 le celle del tipo $A + P_2 - B_2$ non contengono la cella $E_1 + P_2 - E_2$ e quindi restano inalterate nel secondo frazionamento. Se invece A contiene E_1 la cella

$$A + P_2 - B_2$$

contiene la $E_1 + P_2 - E_2$ e si muta quindi nel sistema di celle

$$A + P_2 - B_2 + P_1 - B_{E_1+P_2-E_2}$$

ove $B_{E_1+P_2-E_2}$ è una cella qualsiasi ma non vuota in $E_1 + P_2 - E_2$.

Distinguiamo a questo punto due casi secondoche questa cella B contiene il punto P_2 oppure non lo contiene. Nel primo caso si hanno le celle

$$A + P_1 - B_2 - B''_{E_1-E_2}$$

ove B'' può essere anche la cella vuota ossia perciò le celle

$$A + P_1 - B^*_1$$

ove B^*_1 è una qualsiasi cella di E_1 con almeno un vertice in E_2 .

Nel secondo caso invece si hanno le celle

$$A + P_1 + P_2 - B_2 - B_{E_1-E_2} = A + P_1 + P_2 - B'_1$$

con B'_1 qualsiasi di E_1 ma non contenuta in E_2 nè in $E_1 - E_2$.

Riassumendo si hanno i 4 tipi di celle

- a) A ,
- b) $A + P_2 - B_2$,
- c) $A + P_1 - B^*_1$,
- d) $A + P_1 + P_2 - B'_1$,

ove A indica rispettivamente:

- a) una cella che non contiene E_2 (e quindi nemmeno E_1),
- b) una cella contenente la E_2 ma non la E_1 ,
- c) e d) una cella contenente la E_1 (e quindi anche la E_2).

Dal confronto dei risultati raggiunti si conclude pertanto che nel caso di celle incidenti i relativi frazionamenti elementari sono fra loro permutabili.

4. CASO DELLA NON PERMUTABILITÀ. — Vogliamo ora far vedere che ogni volta che due frazionamenti elementari si trovano in ciascuna delle situazioni opposte ai tre casi precedenti contemporaneamente, ossia relativi a celle dipendenti, con almeno un vertice in comune e non incidenti, essi non sono fra loro permutabili.

Consideriamo infatti due celle E_1 e E_2 nella situazione suddetta: sia F la cella loro intersezione (minore di entrambe perchè non incidenti ma non vuota perchè esse non sono disgiunte), A la cella loro riunione (maggiore di entrambe perchè non incidenti ma appartenente al complesso K dato perchè esse sono dipendenti), H_1 e H_2 le due celle non vuote date da

$$H_1 = E_1 - F, \quad H_2 = E_2 - F$$

le quali risultano disgiunte fra loro in quanto F è l'intersezione di E_1 con E_2 .

Applichiamo ora successivamente nell'ordine i due frazionamenti relativi ad E_1 ed E_2 . Dopo il primo frazionamento compare la cella

$$H_1 + H_2 + P_1$$

appartenente al sistema in cui si muta la cella A (che contiene la E_1). Questa cella non contiene E_2 (che non è stata toccata dal primo frazionamento) e pertanto resta inalterata dopo il secondo frazionamento e fa parte di $K_{E_1 E_2}$. Facciamo vedere che essa invece non fa parte di $K_{E_2 E_1}$. Essa infatti non fa parte nè di K nè di K_{E_2} per la presenza in essa del vertice P_1 ; dovrebbe pertanto comparire dopo l'ultimo frazionamento, cioè quello relativo alla E_1 , ossia essere ottenibile da una cella di K_{E_2} contenente E_1 . Ora in essa c'è la cella H_2 che, dopo il primo frazionamento, risulta indipendente da E_1 in quanto ogni cella C contenente E_1 e H_2 (ossia A) scompare e al suo posto vengono celle del tipo $A + P_2 - B_2$, celle che in ogni caso non possono contenere contemporaneamente E_1 e H_2 giacchè B_2 è sempre non vuota. Ciò significa che ogni cella di K_{E_2} contenente la E_1 non può contenere la H_2 e non può generare quindi la $H_1 + H_2 + P_1$.

La $H_1 + H_2 + P_1$ non compare perciò nemmeno nell'ultimo frazionamento, non fa parte cioè di $K_{E_2 E_1}$. Analogamente per $H_1 + H_2 + P_2$. Si conclude pertanto che i due complessi $K_{E_1 E_2}$ $K_{E_2 E_1}$ sono fra loro distinti e quindi *due frazionamenti elementari relativi a una coppia di celle non incidenti, non disgiunte e dipendenti non sono mai fra loro permutabili.*

RACCOLTE FAUNISTICHE COMPIUTE NEL GARGANO
DA A. GHIGI E F. P. POMINI ⁽¹⁾

II. - ISOPODI TERRESTRI ^(*)

ALCESTE ARCANGELI

SUMMARIVM. — Species Crostaceorum Isopodum terrestrium, quae usque adhuc in Gargano et in insulis Diomedeis collectae sunt, ostendunt maximam similitudinem inter Isopodes harum regionum et Isopodes Dalmatiae. Ex quo confirmatur postpliocenico aevo Garganum et litus Dalmaticum isthmo esse coniuncta.

ARMADILLIDIUM (*Armadillidium*) CINEREUM (Zenk.)
(= *Arm. vulgare* Auct.)

Gargano: Spiaggia Lago Varano (15-VIII-1934, 2 ♂ - 3 ♀), Monte S. Angelo (VIII-1934, 1 ♀); Mattinata (17-VIII-1934, 1 ♂ - 1 ♀). Ghigi leg. - Mattinata (18-IV-1940, 4 ♂ - 1 ♀); Alveo S. Egidio (17-IV-1940, 1 ♂ - 1 ♀); Is. di Varano (22-IV-1940, 1 ♀); Cagnano Varano (22-IV-1940, 2 ♂); S. Menata (22-IV-1940, 1 ♂); S. Nicandro (25-IV-1940, 3 ♂ - 1 ♀); Spilze (IX-1940, 1 ♂). Pomini leg.

⁽¹⁾ Le specie di Isopodi terrestri rinvenuti da Dollfus nelle isole Tremiti si trovano elencati anche a pag. 9 della nota di Cecconi G., *Contributo alla fauna delle Isole Tremiti*, in: « Boll. Mus. Zool. Anal. Comp. R. Univ. Torino », vol. XXIII, n. 583, 1908, pag. 53.

^(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi nella riunione privata del 13 gennaio 1947.

Isole Tremiti: S. Nicola (16-IV-1940, 25 ♂ - 17 ♀); S. Domino (16-IV-1940, 12 ♂ - 2 ♀). Pomini leg., ibid. (1907, 5 ♂ - 1 ♀). Dr. Negri leg.

Strouhal raccolse la specie al Monte S. Angelo. Dollfus citò la stessa per le Isole S. Domino, S. Nicola e Caprara. Io la ho ricevuta anche dall'Albania e dalla Dalmazia. In rapporto al suo spiccato sinantropismo, dalla regione mediterranea che si deve considerare la sua patria originaria si è diffusa con il traffico umano in tutto il mondo, mantenendosi sempre però in luoghi influenzati dall'opera dell'uomo.

ARMADILLIDIUM (*Armadillidium*) ARCANGELII Strouh.

Gargano: Mattinata (17-VIII-1934, 5 ♂ - 10 ♀, Ghigi leg.; 18-IV-1940, 4 ♂ - 2 ♀, Pomini leg.).

Isole Tremiti: S. Domino (16-IV-1940, 1 ♂ - 2 ♀, Pomini leg.).

Questa specie, una volta confusa con *Arm. assimile* B. L. e con *A. Zenckeri* Br., fu bene distinta per merito di Strouhal, che la caratterizzò in base ad esemplari di Milano (importazione) inviati a lui dallo scrivente. La forma tipica finora è stata ritrovata nella parte orientale della penisola italiana. Una sottospecie orientale fu stabilita da Arcangeli per le Isole dell'Egeo ed una *scrivianum* da Verhoeff per Novi Ligure.

Il biotipo del Gargano e delle Is. Tremiti presenta alcuni caratteri che potrebbero giustificare la creazione di una nuova sottospecie. Facendo un confronto con il ricco materiale che io raccolsi a Bari e a Foggia, noto che la colorazione brunastra è più intensa, specialmente nei maschi: che la superficie dorsale è più lucida (senza scabrosità come si verifica negli esemplari di Bari e Foggia), che la insenatura del margine posteriore del 1° pereonite alla base degli epimeri è più accentuata; che l'exopodite del 1° paio di pleopodi del maschio presenta nel punto di passaggio del margine esterno del lobo mediale posteriore al margine dell'area tracheale una infossatura molto più accentuata; che l'ischiopodite del 7° pereopode del maschio presenta

il margine mediale leggermente concavo e molto più accentuata la piccola incisura che tale margine mostra un poco più distalmente della sua metà. Gli esemplari inoltre raggiungono dimensioni maggiori: lunghezza mm. 13, larghezza mm. 5,5.

ARMADILLIDIUM (*Armadillidium*) PALLASII Br. subsp.
FRONTIROSTE (B. L.)

Gargano: Monte S. Angelo (15-VIII-1934, 9 ♂ - 9 ♀, Ghigi leg.); Alveo S. Egidio (17-IV-1940, 2 ♂ - 3 ♀); Cagnano Varano (22-IV-1940, 8 ♂ - 9 ♀); S. Menata (22-IV-1940, 1 ♂ - 1 ♀); S. Nicandro (25-IV-1940, 1 ♂ - 3 ♀). Pomini leg.

Isole Tremiti: S. Domino (16-IV-1940, 19 ♂ - 9 ♀); S. Nicola (16-IV-1940, 4 ♂ - 5 ♀). Pomini leg.

Dollfus trovò *A. Pallasii* ed *A. frontirostre* nelle Isole S. Domino e Caprara. Io già citai *A. Pallasii* per S. Domino. Bisogna notare che Dollfus distingueva le due sunnominated specie per una differente colorazione, ma giustamente Strouhal (Bibl. 33, pag. 193) fece notare che la distinzione non si poteva fare perchè fra la colorazione di un bruno chiaro con macchie pallide di *A. frontirostre* e quella grigio scuro uniforme di *A. Pallasii* esistono tutti i termini di passaggio. Strouhal stesso (ibidem pag. 189 a 193) riconobbe che di *A. Pallasii* si dovevano riconoscere due sottospecie, *A. pallasii pallasii* Brandt ed *A. pallasii frontirostre* B. L., distinzione basata su caratteri morfologici. La prima sottospecie sarebbe limitata alle terre limitanti il Mar Nero ed il Mar di Marmara; la seconda abita le coste e le isole del Mare Adriatico (¹). Cosicchè gli esemplari delle Tremiti da Dollfus determinati come *A. Pallasii* sarebbero da riportarsi alla sottospecie *frontirostre*.

Ma ultimamente Strouhal per esemplari raccolti a Monte S. Angelo e Manfredonia nel Gargano ha creato una nuova sottospecie *gar-*

(¹) Debbo notare che nel 1926 (*op. cit.* pag. 12) io citai come luogo di reperto l'Isola di Capri; ma poi riconobbi che si trattava di un errore dovuto ad uno scambio di cartellino.

ganum che io non posso accettare per le seguenti ragioni. Le caratteristiche viste dall'Autore in questa sottospecie non appartengono solo alla forma del Gargano (in tutto e per tutto simile a quella delle Isole Tremiti), ma si ritrovano in tutti gli esemplari raccolti sulle sponde italiane dell'Adriatico. Io possiedo un ricco materiale raccolto nelle più disparate località delle coste orientali italiane da Otranto venendo su fino all'Istria. *A. Pallasii frontirostre* presenta una grande variabilità, la quale si esprime anche negli esemplari raccolti nello stesso luogo. L'immagine che Strouhal ci ha dato del cephalon visto dalla faccia ventrale della forma del Gargano (la quale immagine poi non è unica per tutti gli esemplari del Gargano stesso) si ottiene osservando esemplari delle Puglie, della Romagna, del Veneto ed anche dell'Istria (Pola, Parenzo). La lamina frontale presenta una variabilità grandissima. Non nego che essa negli esemplari di una stessa località presenti una forma dominante, ma in ogni modo non assume mai carattere di sottospecie. Lo stesso si dica per i lobi antennari. Anche per ciò che riguarda i pereopodi ed i pleopodi del maschio io non ho trovato negli esemplari del Gargano caratteristiche degne di una sottospecie.

ARMADILLIDIUM (*Armadillidium*) PERACCAE Tua

Gargano: Mattinata (17-VIII-1934, 1 ♂, Ghigi leg.; 18-IV-1940, 9 ♂ - 1 ♀ - 1 pullus, Pemini leg.).

Tua rinvenne la specie nelle Puglie a Bari, S. Cataldo, Bosco di Rauccio (Lecce) ed Otranto. A Taranto fu ritrovata da Strouhal. Lo scrivente la rinvenne anche negli Abruzzi in provincia di Chieti a Caramanico ed a Guardiagrele (a circa 600 m.).

Si tratta di una delle più belle specie del genere, del gruppo *nasatum*. È da notare che Verhoeff nel 1930 (Bibl. 49, pag. 44-49) istituì la sottospecie *odhneri* sopra esemplari raccolti in Dalmazia sul Monte Marian presso Split, poi a sud-est di Split in pietraie e nel terreno carsico della baia a sud di Sebenico. Ma Strouhal nel 1934 (Bibl. 36, pag. 299 e 303, Abbild. 15 e 17) sostenne che si trattava di una specie a sè, denominandola quindi *Armadill. (Arm.) odhneri*. In verità le figure e la comparazione con la forma italiana offerta da

questo Autore non convincono affatto ed io vorrei domandare all'Autore quali sono i limiti che Egli assegna alla sottospecie. Ad ogni modo è significativo il fatto che due forme così somiglianti si trovino quasi alla stessa latitudine in Italia ed in Dalmazia.

PORCELLIO (Mesoporcellio) LAEVIS Latr.

Gargano: Spiaggia Lago Varano (15-VIII-1934, 1 ♂ - 2 ♀, Ghigi leg.); Alveo S. Egidio (17-IV-1940, 4 ♂ - 4 ♀); Mattinata (18-IV-1940, 8 ♀ con marsupio ovifico); Cagnano Varano (22-IV-1940, 1 ♂). Pomini leg.

Isole Tremiti: S. Domino (14-IV-1940, 5 ♂ - 2 ♀); S. Nicola (16-IV-1940, 8 ♂ con marsupio ovifero); Caprara (17-IV-1940 Pomini leg.).

Dollfus citò la specie per l'Isola Caprara. Strouhal per Monte S. Angelo. Egli fa notare che nei maschi più grandi l'exopodite degli uropodi è lungo 3 volte il protopodite. Ma questo è un fatto che si può notare in maschi molto grossi di tutte le località.

Si tratta di una specie la cui vera patria è la regione mediterranea, dalla quale il traffico umano l'ha diffusa in quasi tutto il mondo abitato, dove peraltro non abbandona i luoghi influenzati dalla presenza dell'uomo.

PORCELPPIO (Haloporcellio) LAMELLATUS Ulj.

Gargano: Spiaggia Lago Varano (15-VIII-1934, 2 ♂, Ghigi leg.).

Isole Tremiti: S. Domino (Dollfus).

Nel 1926 (Bibl. 8, pag. 18) io riconobbi che tanto il *Porcellio Diomedus* creato da Dollfus per esemplari delle Isole Tremiti come quello da me ritrovato nel 1913 sulla spiaggia del Calambrone presso Livorno (Toscana) dovevano riportarsi alla vecchia specie creata da Uljanin e descritta da Budde-Lund sopra esemplari raccolti in Crimea, a Bona in Algeria, a Tolanium (?) e Valencia in Spagna. Ma la specie

poi è stata ritrovata sulla spiaggia di tante altre località del Mediterraneo, compresa l'Africa settentrionale, Madera, Canarie ed Azzorre, Isola Grande Salvage. Per le terre dell'Adriatico oltre Lesina in Dalmazia io nel 1933 (Bibl. 12, pag. 55) citai località della laguna Veneta. Anzi siccome io ho sostenuto (*op. cit.*) e sostengo che diverse specie di *Haloporcellio* istituite da Verhoeff si debbono considerare sottospecie di *P. lamellatus*, così il *Porcellio Moebiusi* di Verhoeff raccolto presso Ragusa in Dalmazia io ritengo tutto al più una sottospecie.

Nella forma del Gargano il lobo mediano frontale è dilatato nella parte distale e quindi i margini laterali dello stesso sono concavi proprio come nell'esemplare di Lesina in Dalmazia; ma in uno dei due esemplari lo stesso lobo è asimmetrico e ripiegato fortemente all'indietro, una delle tante anomalie che si verificano in esemplari di questa specie di disparate località. Invece, stando alla figura del cephalon date da Dollfus per la forma delle Isole Tremiti, questa corrisponderebbe alla forma da me descritta per il Calambrone. Si può parlare con ciò di due sottospecie? Non credo, perchè bisognerebbe che fosse fatto un esame più accurato basato su un numero maggiore di esemplari. Astrazione fatta dal lobo frontale mediano per quanto riguarda i pereiopodi ed i pleopodi sia del maschio che della femmina in tutti gli esemplari di diverse località del Mediterraneo che io ho avuto a disposizione si nota una grande corrispondenza.

Si tratta di una specie strettamente legata al litorale marittimo del sottotipo biologico dei *paralopetrofilo* di Verhoeff, da me chiamati *marginali*.

METOPONORTHUS (Metoponorthus) PRUINOSUS (Br.)

Subsp. *meleagris* (B. L.). Gargano: Alveo S. Egidio (17-IV-1940, 1 ♂); Bosco Ginestra (20-IV-1940, 1 ♂); Cagnano Varano (22-IV-1940, 2 ♂ - 5 ♀) Pomini leg.; Monte S. Angelo (15-VIII-1934 1 ♂, Ghigi leg.).

Subsp. *anconanus* Verh. Isole Tremiti: S. Domino (16-IV-1940, 4 ♂ - 6 ♀, di cui 2 con uova nel marsupio); S. Nicola (16-IV-1940, 1 ♂ - 2 ♀); Caprara (17-IV-1940, 1 ♂ - 2 ♀), Pomini leg.

Strouhal ha trovato a Monte S. Angelo la sottospecie *pruinus*, cioè la forma tipica sinantropa e cosmopolita, il che mi fa supporre che sia stata raccolta nei pressi dell'abitato. Gli esemplari invece raccolti da Ghigi e Pomini nel Gargano e quivi pure a Monte S. Angelo corrispondono alla sottospecie *meleagris*. Questa sottospecie è diffusa oltre che nella Francia meridionale in tutta l'Italia ed anche nella Penisola balcanica, dove io stesso l'ho rinvenuta in esemplari raccolti in Dalmazia da Parenzan e da Boldori.

Nelle Isole Tremiti invece Pomini raccolse la sottospecie *anconanus* da Verhoeff creata per una forma raccolta a sud di Ancona non lungi da Loreto. Ma io ne posseggo esemplari raccolti nelle terre della Laguna Veneta e nella provincia di Forlì. Non è da escludersi che si estenda anche nelle Puglie. Poichè Dollfus non seppe riconoscere sottospecie in *Metoponorthus* (= *Porcellionides*) *pruinus*, non è da escludere che la forma da lui rinvenuta nelle Isole Tremiti corrispondesse alla sottospecie *anconanus*; ma potrebbe anche darsi che essendo stata raccolta nell'abitato corrispondesse alla forma tipica sinantropa che certo deve trovarsi nelle stesse isole.

METOPONORTHUS (Metoponorthus) MYRMECOPHILUS (Stein)

Gargano: Alveo S. Egidio (17-IV-1940, 2 ♀); Bosco Ginestra (20-IV-1940, 1 ♂ - 1 ♀, con formiche); S. Nicandro (25-IV-1940, 1 ♂ - 1 ♀) Pomini leg.

Questa specie mirmecofila del sottotipo dei *parapetrofili* di Verhoeff è diffusa sulle coste della Grecia ed in molte isole greche fino a Rodi; inoltre sul litorale adriatico della Penisola balcanica e su quello adriatico dell'Italia, dal Veneto alle Puglie, poi in Basilicata, in Sicilia, nella Campania, nel Lazio nella riviera ligure ed in Sardegna.

Secondo Verhoeff (Bibl. 46, pag. 135) *Metoponorthus myrmecophilus* dovrebbe difficilmente presentarsi in Italia (ma poi, si noti, egli stesso lo rinvenne nelle Marche), perchè secondo lui il reperto di Dollfus in Sicilia relativamente a questa specie dovrebbe riportarsi od a *Metoponorthus Graevei* Verh., raccolto presso Taormina in Sicilia od a *Metoponorthus myrmecidarum* Verh., raccolto presso Lentini pure in Sicilia. Verhoeff

si sbaglia perchè Dollfus parlando del *Metop. myrmecophilus* lo definisce di « *un gris azure très clair* » e quindi non può corrispondere a *Met. graevei*, che è completamente bianco; la specie di Dollfus corrisponde, per conto mio, invece a *Met. myrmecidarum*, che non si può considerare affatto come specie a sè, ma come sottospecie italiana di *Met. myrmecophilus*. Infatti io posseggo esemplari (1 ♂ - 1 ♀) di questa specie raccolta dal Dott. E. Gridelli ad Augusta in Sicilia, i quali, se si stasse rigorosamente ai caratteri delle antenne esterne dati da Verhoeff per *Met. myrmecidarum* non dovrebbero appartenere a questa specie, perchè nelle suddette antenne presentano il 1° articolo del flagello più corto del 2° (stando il 1° al 2° come 39 a 49 o 41 a 49) mentre secondo Verhoeff nella sua specie « *1. Geisselglied so lang wie das 2. oder noch länger* ». Ma io ho già detto che anche in esemplari raccolti sotto la stessa pietra si osservano varianti nella lunghezza relativa dei due articoli del flagello, varianti che per lo più stanno in rapporto con la grandezza degli individui, il 2° articolo del flagello essendo più lungo negli esemplari più grandi (ma non sempre). Inoltre gli esemplari di Augusta corrispondono per tutti gli altri caratteri a *Met. myrmecidarum* e così pure alla forma tipica orientale che si distingue specialmente per il fatto che il 1° articolo del flagello delle antenne esterne è sempre molto più corto del 2°, talora è lungo meno della metà. Astrazione fatta dal carattere della lunghezza del 1° articolo del flagello, la quale oscilla fra leggermente minore, eguale o leggermente superiore rispetto al 2°, *Met. myrmecidarum* non presenta caratteri degni del grado di specie. Del resto Verhoeff stesso disse (ibidem, pag. 131) parlando di *Met. myrmecophilus*: « *Männliche Pleopoden wie bei MYRMECIDARUM, ebenso die Pigmentverzweigungen und Wachsellipsen* ». E poichè Egli, e con ragione, ha sempre dato tanto valore ai caratteri presentati dai pleopodi del ♂ per caratterizzare la specie, non si capisce perchè voglia ammettere che la forma siciliana sia una specie a sè. Io quindi concludo che per la massima parte dell'Italia e precisamente del Gargano ad oriente e della Liguria ad occidente venendo giù fino alla Sicilia abbiamo una forma di *Metoponorthus myrmecophilus* che si può considerare come una sottospecie da chiamarsi *myrmecidarum* (Verh.). La specie tipica, diciamo orientale o greca, dalla Dalmazia si estende a nord fino al litorale veneto (dove io l'ho raccolta) e da qui verso sud fino a quello delle Marche (Verh.).

La forma della Sardegna forse rappresenta una nuova sottospecie, nella quale il 1° articolo del flagello delle antenne esterne è molto più lungo del 2°.

Ricorderò che io un tempo consideravo *Metoponorthus* B. L. sottogenere di *Porcellio* e sinonimo di *Porcellionides* Miers e perciò credevi opportuno sostituire (Bibl. 13, pag. 46) il nome specifico *myrmecophilus* dato da Stein a questa specie nel 1857, perchè Lucas nel 1853 aveva istituito un *Porcellio myrmecophilus*, che poi fu descritto da Kinahan nel 1859 come *Lucasius myrmecophilus* (*Lucasius* essendo pure considerato come sottogenere di *Porcellio*). Avevo quindi dato la nuova denominazione *Porcellio (Porcellionides) Steini*. Però in seguito mi sono convinto che *Metoponorthus* B. L. deve costituire un genere a sè e che il termine *Porcellionides* deve essere abbandonato perchè, come dimostrò Vandel la definizione data da Miers è troppo vaga. Cadeva quindi la nuova denominazione specifica data da me. Infine è da ricordare che io nel 1929 (Bibl. 9, pag. 266) in esemplari adulti della isola di Scarpanto trovai oltre 5 ♀ (di cui una con marsupio contenente embrioni) 5 ♂ dei quali due possedevano marsupio contenente embrioni: un caso quindi di ermafroditismo proterandrico.

METOPONORTHUS (Polytretus) SEXFASCIATUS B. L.

Isole Tremiti: S. Domino, Caprara, S. Nicola (Dollf.).

Questa specie ha molte discontinuità nella sua area di diffusione. Nel Mediterraneo orientale fu ritrovata nelle isole Eubea ed Andros (B. L.) e Cipro (Dollf.). Mancherebbe nella Penisola Balcanica. In Italia si trova specialmente nella Liguria sul litorale della Toscana, non sul litorale Adriatico. È presente nelle isole d'Elba, Corsica e Sardegna. Ad occidente si trova sulle coste mediterranee della Francia e della Spagna. Attraverso la Francia a mezzo di importazione dovuta all'uomo è arrivato anche in cantine del Nord di Europa. In Africa si trova nel territorio costiero della Tunisia, dell'Algeria e del Marocco. Al di fuori del Mediterraneo si estende nelle Isole Azzorre, Madera, Canarie, nel Marocco e perfino nella Guinea spagnola. Vedi Arcangeli in « Boll. di Zool. », Anno III, n. 5, 1932, pag. 229.

METOPONORTHUS (*Acacroplastes*) MELANURUS (B. L.).

Isole Tremiti: S. Domino (Dollf.).

Questa specie avrebbe un'area di diffusione assai vasta, ma con discontinuità notevoli che fanno pensare a più di una specie. Oltre che nella Francia meridionale si troverebbe in Corsica, Sardegna e Sicilia (Dollf.)⁽¹⁾, inoltre in Algeria (B. L. e Dollf.). Fu segnalata anche per l'Irlanda (?). In Italia Verhoeff la trovò presso Abbazia e Pola in Istria ed io l'ho trovata in più punti delle terre della Laguna Veneta. L'ho rinvenuta anche presso Puig in Catalogna. Se la determinazione di Dollfus per gli esemplari delle Isole Tremiti è giusta, la specie con tutta probabilità dovrebbe trovarsi nel Gargano. Certo è che mai essa è stata segnalata nella Penisola Balcanica.

TRACHEONISCUS (*Tracheoniscus*) ARGUATUS (B. L.)

Gargano: Foresta Umbra (15-VIII-1934, 1 ♂ - 8 ♀ con uova od embrioni nel marsupio) Ghigi leg.; Alveo S. Egidio (17-IV-1940, 4 ♂); Mattinata (18-IV-1940, 2 ♀); Bosco Ginestra (20-IV-1940, 1 ♂ - 3 ♀); Cagnano Varano (22-IP-1940, 1 ♀ con uova nel marsupio); S. Nicandro (25-IV-1940, 4 ♀ con uova nel marsupio).

Strouhal a Monte S. Angelo trovò un ♂ ed una ♀ che Egli diagnosticò come *Tracheoniscus apenninorum* Verh. aggiungendo di avere trovato la stessa specie a Lagonegro, al Lago Sirino nella Basilicata sudoccidentale, a S. Lucido presso Cosenza, nel letto asciutto del Busento a Cosenza ed in Cosenza. Verhoeff istituì questa specie nel 1931 (Bibl. 50, pag. 538, fig. 17) sopra esemplari raccolti presso Civitavecchia; a sud del lago di Piediluco a sud di Arezzo; ad Orvieto; a Corpo di Cava. Poi (Bibl. 52, pag. 45) lo rinvenne a Castel di Sangro; nei dintorni di Sulmona; presso Subiaco; presso Tagliacozzo e a Marino nei Monti Albani. Tutte località dell'Italia centrale. Ma Strouhal si è dimenticato di leggere una mia nota del 1931-32 (Bibl. 11) nella

⁽¹⁾ La forma che io dapprima descrissi come sottospecie di *P. melanurus* nel 1924 (Bibl. pag. 32) in seguito nel 1931 (Bibl. pag. 13) riconobbi come specie distinta che denominai *Porcellio* (*Porcellionides*) *Decioi*.

quale (pag. 18-20) io sostenni che i pochi e indecisi caratteri presi in considerazione da Verhoeff per distinguere *Tr. apenninorum* da *Tr. arcuatus* (B. L.) non avevano alcun valore. E terminai: « *Io concludo affermando che la specie TR. APENNINORUM non può sussistere. Si potrebbe al più considerare come sottospecie, ma anche in tale caso non sarebbe bene caratterizzato. Ritengo invece che di TR. ARQUATUS si abbiano molte razze locali, ciascuna delle quali dovrebbe essere sottoposta ad uno studio somatometrico accurato per potere essere bene definito. Anche per la colorazione questa specie è molto variabile. Ecc.* ». Il ricco materiale di questa specie delle più disparate località dell'Italia continentale mi ha sempre più confermato nella mia opinione. Aggiungo che gli esemplari del Gargano (molto più numerosi di quelli di Strouhal) si presentano del tutto simili ad esemplari di località dell'Italia settentrionale.

ORTHOMETOPON DALMATINUM FRASCATENSE (Verh.)

Gargano: Foresta Umbra (15-VIII-1934, 1 ♂ - 8 ♀ con uova od embrioni nel marsupio) Ghigi leg.; Alveo S. Egidio (17-IV-1940, 4 ♀); Mattinata (18-IV-1940, 2 ♀); Bosco Ginestra (20-IV-1940, 1 ♂ - 3 ♀); Cagnano Varano (22-IV-1940, 1 ♀ con uova); S. Nicandro (25-IV-1940, 4 ♀ con uova Pomini leg.; Apricena-Gargano (Dott. Peracca leg.).

Questa forma Verhoeff dapprima trovò « *in der Nähe von Florenz (Fraskati)* » ed a Corpo di Cava (Penisola di Sorrento); dipoi a S. Marino; Monte Bartolo presso Pesaro; Teramo; Sulmona; Canzano; Castel di Sangro; Roccaraso; Pescolanciano; burrone di ruscello di Tagliacozzo; burrone di ruscello di Isernia; Subiaco; Tivoli; Marmore; burrone di fiume di Neramontoro; presso Terni; presso Aquila; Lago di Piediluco; presso Spoleto. Strouhal la rinvenne sul Monte Vulture ed a Lagonegro in Basilicata ed a Montello nella Campania sudorientale.

Io ne ho avuti anche esemplari raccolti nella Provincia di Forlì. Gli esemplari raccolti dal Dott. Peracca ad Apricena-Gargano e da Tua determinati come *Metoponorthus planus* B. L. sono conservati in questo Museo: il loro esame mi rivelò che essi appartengono alla specie di Verhoeff.

LEPTOTRICHUS PANZERII (Aud. et Sav.)

Isole Tremiti: Caprara.

Questa specie, comune a tutte le terre circummediterranee (nelle quali però non si allontana molto dalla costa nell'interno) ad eccezione dell'Asia Minore e delle terre continentali della Penisola balcanica, nell'Italia continentale si trova a sud della pianura Padana. La trovasi molto comune nella provincia di Bari. Probabilmente è presente anche nel Gargano.

PLATYARTHURUS HOFFMANNSEGGII (Br.)

Gargano: Cagnano Varano (22-IV-1990, 2 ♂ - 6 ♀ con formiche).
Pomini leg.

È la specie di *Platyarthrus* più comune in Eupopa nei formicai. Assai frequente nell'Italia continentale, nelle isole del Mediterraneo fu ritrovata solo nell'Isola di Lissa da Rogenhofer (Bibl. 31, pag. 119) e in quella di Elba da Verhoeff (Bibl. 51, pag. 49). Per la diffusione vedi anche Arcangeli (Bibl. 5, pag. 190).

PHILOSCLA (*Philoscia*) MUSCORUM (Scop.)

Gargano: Bosco Ginestra (20-VI-1940, (1 ♂ - 2 ♀; VI-1940, 3 ♀);
Sfilze (IV-1940, 3 ♂ - 4 ♀ - 1 pullus); S. Nicandro (25-IV-1940,
1 ♀). Pomini leg.

Dollfus ritrovò la specie all'Isola S. Domino. Siccome però al tempo di questo Autore mai era stata fatta la distinzione tra *Ph. muscorum* e *Ph. affinis*, c'è da domandarsi se gli esemplari dell'Isola S. Domino non fossero piuttosto appartenenti alla seconda specie, perchè la prima richiede un terreno assai più fresco di quello delle Isole Tremiti.

Ph. muscorum è diffuso nell'Europa specialmente occidentale. In Spagna Dollfus (Bibl. 22, pag. 186) la citò per Guetaria (Prov. basche)

e Jackson (Bibl. pag. 186) per Monte Estoril presso Lisbona. Io dalla Spagna mediterranea ho ricevuto solamente esemplari di *Ph. affinis*. Nella Penisola balcanica sembra che essa non scenda a sud dell'Erzegovina. In Dalmazia sembra che non esista. In Italia è più frequente nel settentrione, facendosi più rara scendendo al sud, mentre corrispondentemente si fa più frequente la vicariante *Ph. affinis*. Certamente non arriva alla provincia di Bari e nemmeno nella Basilicata e nella Calabria. Si trova nell'Isola d'Elba ed in Corsica e Sardegna. Dollfus (Bibl. 24, pag. 547) la indicò per l'Algeria, ma molto probabilmente si trattava di un'altra specie.

PHILOSCIA (*Philoscia*) AFFINIS (Verh.)

Gargano: Foresta Umbra (15-VIII-1934, 3 ♀ di cui 2 con marsupio. Ghigi leg.)

Questa forma, dapprima istituita da Verhoeff come sottospecie di *Ph. muscorum* e poi come specie distinta, è diffusa in tutta l'Italia continentale, compresa l'Istria e la costa di Fiume. Essa dall'Italia superiore va facendosi più frequente scendendo al sud, si può dire sostituendosi alla precedente. Fu ritrovata anche all'Elba ed in Sicilia da Verhoeff stesso. Io la ritrovai in Sardegna. È probabile che si ritrovi in Corsica. Ne ebbi esemplari dalla Catalogna. A nord presenta propaggini nel Württemberg (Verh.) e nella valle dell'Ahr nell'Eifel (Graeve).

Io però sono dell'opinione che si potrebbe considerare come sottospecie di *Ph. museorum*.

PHILOSCIA (*Philoscia*) MOLISIA subsp. UNIVITTATA (Strouh.)

Gargano: Monte S. Angelo (Strouh.)

Questa sottospecie Strouhal fondò sopra un ♂. Interessante è il fatto che io ho individuato la stessa sottospecie in esemplari (1 ♂ - 2 ♀) raccolti dall'amico Rag. L. Boldori nel giugno 1941 nella provincia di Valona in Albania ed è probabile che si ritrovi anche in Dalmazia. I preparati che io ho fatto del perciepode 7°, dell'exopodite e dell'endopodite del 1° paio di pleopodi del maschio mostrano immagini

perfettamente corrispondenti a quelle date da Strouhal per gli stessi organi.

La specie tipica, *Philoscia molisia*, Verhoeff istituì sopra esemplari raccolti a Pescolanciano nel Molise (Bibl. 52, pag. 36 e 39, Tav. I, fig. 16 e 17).

CHAETOPHILOSCIA ELONGATA (Dollf.) (= *Philoscia pulchella* B. L.)

Gargano: Mattinata, Grotta Campana (17-VIII-1934, 1 ♀), Ghigi leg.; Alveo S. Egidio (17-IV-1940, 2 ♀); Cagnano Varano (22-IV-1940, 1 ♀ con uova nel marsupio), Pomini leg.

Isole Tremiti: S. Domino (16-IV-1940, 2 ♀ con uova); Caprara (17-IV-1940, 2 ♀ con uova); S. Nicola (16-IV-1940, 4 ♀ con marsupio), Pomini leg.

Questa specie a diffusione circummediterranea Dollfus già indicò per S. Domino, S. Nicola e Caprara. Arcangeli la riconobbe in esemplari raccolti nelle Isole Tremiti (senza specificazione) da Martelli (Mus. Zool. Firenze).

CHAETOPHILOSCIA CELLARIA (Dollf.)

Isole Tremiti: S. Domino (Dollf.).

Questa specie si trova nell'Europa occidentale mediterranea, esclusa la Spagna, e precisamente nella Francia meridionale, sotto le pietre all'aperto e nelle cantine, da dove, almeno nelle cantine e nei sotterranei a temperatura costante, rimonta fino ai dintorni di Parigi: è diffusa inoltre anche nelle terre marittime dell'Italia continentale dove in qualche punto si interna alquanto, fino all'Istria. Io l'ho raccolta anche nella provincia di Bari. Ma si ritrova anche nell'Isola d'Elba, Corsica, Sardegna e Sicilia. È una specie che frequenta anche le cantine e le grotte. La descrizione che Verhoeff dette della sua *Chaetophiloscia piligera* dimostra in modo indubbio che si tratta di *Ph. cellaria* di Dollfus. Già lo stesso Verhoeff dovette riconoscere che *Ph. italica* è sinonimo di *Ch. piligera*. Ma è da aggiungere che *Chaetophiloscia pallida* pure ritrovata in Liguria (come *Ch. piligera*) è da riportarsi alla stessa specie. È da notare il fatto che mai Verhoeff nel

trattare delle sue specie ha accennato a *Ph. cellaria* di Dollfus, che non poteva essergli sconosciuta.

Chaet. cellaria sembra mancare alla Penisola balcanica. La *Ph. cellaria* che io nel 1929 (Bibl. 9, pag. 260) citai per Rodi in seguito (Bibl. 13, pag. 52) riconobbi trattarsi di specie ben distinta che denominai *Ph. (Chaetoph.) pseudocellaria*.

Indubbiamente *Chaetophiloscia cellaria* deve ritrovarsi nel Gargano.

HALOPHILOSCIA (sp.)

Isole Tremiti: S. Domino: Caprara.

Al tempo di Dollfus sotto il nome di *Philoscia Couchii* Kinahan (1858) si comprendeva tutte quelle forme che nei caratteri morfologici più appariscenti ad un esame piuttosto superficiale corrispondevano alla descrizione data da Kinahan per la forma raccolta sotto pietre in riva al mare a Tolland Cove presso Polpezzo in Cornwall (Inghilterra). E la specie era considerata come diffusa non solo sulle coste atlantiche dell'Europa e nelle Azzorre, ma anche sulle coste del Mediterraneo. Ad essa fu ritenuto sinonimo la *Ph. longistyla* da Costa (1883) rinvenuta a Cagliari e la *Ph. longicornis* da Budde-Lund (1879 e 1885) stabilita come specie propria delle coste ed isole del Mediterraneo, nonchè del Mar nero (Sebastopoli).

È merito di Verhoeff di avere individuato fra i *Philoscinae* un gruppo di forme del tipo biologico degli Alopetrofili, tutte delle spiagge marittime, di cui costituì una tribù *Halophiloscini*, comprendente due generi nuovi: *Stenophiloscia* ed *Halophiloscia* (Bibl. 45, pag. 340 e 360). In *Halophiloscia* venivano incluse *Ph. Couchii* Kin., *Ph. Aristotelis* Verh. (dell'Isola Aegina, nell'Arcipelago greco). *Ph. bermudensis* Dahl e la nuova specie *Hal. Adriatica* di Buccari nel Golfo di Fiume. Con che Verhoeff intendeva anche far capire che *H. Couchii* non era una specie mediterranea. Ed infatti in seguito questa specie non era stata segnalata nelle coste del Mediterraneo ⁽¹⁾. Anzi Verhoeff ha poi

⁽¹⁾ Io nel 1929 (Bibl. 10, pag. 68) indicai *Ph. Couchii* Kin. per Capo Coroglio presso Napoli e per l'Isola di Capri. In una nota intitolata «Il genere *Halophiloscia* nella regione mediterranea» in corso di pubblicazioni nell'Archivio Zoologico Italiano, lo scrivente ha cercato di stabilire quali sono le specie di *Halophiloscia* esistenti nel Mediterraneo, dimostrando che nel Mediterraneo esiste *H. Couchii* con sottospecie.

descritto altre nuove specie del Mediterraneo come *H. tyrrhena* della Riviera italo-francese; *H. hirsuta* della Riviera Ligure, della costa di Toscana, dell'Isola d'Elba dell'Isola d'Ischia; *H. ischiana* dell'Isola d'Ischia; *H. fucorum* della Costa di Spalato in Dalmazia, della spiaggia presso Pesaro e in una baia presso Civitavecchia. Di più Verhoeff stesso trovò di *H. adriatica* la sottospecie *rupium*, nella Riviera ligure, presso Noli ed Oneglia.

La *Philoscia Couchii* di Dollfus delle Isole Tremiti si può supporre che corrisponda alla *H. fucorum* Verh., ammesso che questa forma sia una specie veramente distinta da *H. adriatica*. della quale io ho un ricchissimo materiale raccolto nelle terre della Laguna Veneta, l'esame del quale e di altro di altre coste mediterranee mi ha però convinto che occorrerebbe una disamina molto accurata delle diverse specie, invero troppe e con area di diffusione troppo discontinua, create da Verhoeff.

AEGONETHES CERVINUS (Verh.)

Gargano: Grotta Umbra (21-IV-1940, 1 ♀); Grotta del Tasso (d'Umbra, VI-1940, 2 ♂ - 1 ♀); Grotta dei disertori (VI-1940, 1 ♂ - 9 ♀) Pomini leg.

Questo Triconoscide fu scoperto da Verhoeff nella Grotta Paganetti (insieme con *Illyrionethes haasi* Verh.) dell'Isola di Curzola. Frankenger, oltre che in tale grotta, lo ritrovò nelle seguenti caverne dell'Isola di Meleda: Spilja pri Norznom Dolu, dintorni del villaggio di Ropa; Velika spilja, dintorni del villaggio di Blato; Ostaševica, dintorni del villaggio di Babino Polje. Strouhal, oltre che nella predetta Grotta Paganetti, lo ritrovò in esemplari raccolti da Paganetti-Himmler (esistenti nel Museo di Vienna) in una caverna presso Manfredonia nelle Puglie ed in proposito a questo reperto disse: « *Dieses Vorkommen von AEGONETHES gerade gegenüber den Inseln Curzola und Meleda (von wo Frankenger die Art auch angibt) auf italienischen Festlande ist nicht ohne weiteres von der Hand zu weisen; es bedarf aber doch einer Bestätigung, da einerseits die beiden bekannten AEGONETHES-Arten als echte Höhlenbewohner in ihrer Verbreitung ziemlich lokal beschränkt sind* ». Infine Strouhal stesso (1939) dopo aver riferito altri reperti

nell'Isola di Meleda a Ostaševica e Movrica (insieme con *Troglocyphoniscus absoloni* Str.), riporta quelli del territorio costiero della Dalmazia meridionale nelle vicinanze di Ragusa (Dubrovnik): Šipun; Durović-Jama; Spilja Karla Gruž. E ritornando sugli esemplari di Manfredonia dice: «*sofern hier nicht eine Vertauschung von Fundortszetteln erfolgt ist*». Ora i nuovi reperti in grotte del Gargano dovuti allo solerzia del compianto dott. Pomini annullano del tutto i dubbi espressi da Strouhal. La esistenza di un Isopodo cavernicolo così specializzato come *Aeg. cervinus* nel territorio costiero della Dalmazia meridionale, nelle isole di Curzola e di Meleda e nel Gargano (e si noti bene che la specie fu osservata come rappresentata dallo stesso biotipo, senza una possibile distinzione di sottospecie) rappresenta una delle prove faunistiche più convincenti che il Gargano durante il postpliocene era collegato a mezzo di un istmo che comprendeva le isole Tremiti, Pelagosa, Meleda e Curzola con la costa dalmata. Nelle Isole Tremiti che sono spovviste di caverne è naturale che la specie non si sia potuta conservare.

TYLOS LATREILLII (Aud. et Sav.)

Gargano: Mattinata (17-VIII-1934, 1 ♀) Ghigi leg.

Per la diffusione di questa specie litoranea del sotto tipo biologico degli alopetrofilo di Verhoeff, unica specie (con diversi biotipi) mediterranea del genere (vedi Arcangeli, Bibl. 15). Quasi certamente si ritrova nelle Isole Tremiti.

LIGIA ITALICA (Fabr.)

Gargano: Mattinata, sul mare ed in Grotta dei Pipistrelli (17-VIII-1934, 3 ♀) Ghigi leg.

Questa specie, diffusa su tutte le spiagge del Mar Nero e del Mar Mediterraneo e al di fuori del Moditerraneo nel Portogallo, nelle Canarie, a Madera e nelle Azzorre, Dollfus segnalò per S. Domino nelle Isole Tremiti e Strouhal per Manfredonia nel Gargano e per il porto di Bari, dove anche io l'ho raccolta in copia.

CONCLUSIONI

Per quanto la lista delle specie di Isopodi terrestri raccolte nel Gargano e nelle Isole Tremiti debba essere in avvenire aumentata dal rinvenimento di altre (specialmente nel Gargano), le specie finora rinvenute sono più che sufficienti per dimostrare la estrema affinità della fauna isopodologica del primo con quella delle seconde nonché quella che esiste per le stesse faune con quella delle terre orientali dell'Adriatico e specialmente con la Dalmazia meridionale. Astrazione fatta da altre specie il collegamento postpliocenico fra il Gargano e la costa dalmata a mezzo di un istmo che comprendeva le Isole Tremiti, Pelagosa, Meleda e Curzola è dimostrato inequivocabilmente dalla esistenza delle Grotte del Gargano e della Dalmazia di un isopodo cavernicolo *Aegonethes cervinus* (Verh.).

BIBLIOGRAFIA

1. ARCANGELI A., *Armadillidium Peraccai* Tua. Contributo alla migliore conoscenza di questo isopodo italiano. «Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. Proc. verb.», vol. XIX, 1910, pp. 60-65.
2. — *Isopodi terrestri nuovi o poco noti in Italia*. «Monit. Zoolog. Italiano», Anno XXIV, 1913, pp. 183-202.
3. — *Escursioni zoologiche del Dott. Enrico Festa nell'Isola di Rodi*. «Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. R. Univ. di Torino», vol. XXVIII, n. 679, 1913, pag. 22, 7 figure.
4. — *La collezione di isopodi terrestri del R. Museo di Zoologia degli invertebrati di Firenze*. «Atti Soc. Ital. Sc. Nat.», vol. LII, 1913, pp. 455-486.
5. — *Note isopodologiche. Il genere Platyarthrus Br.* Ibidem, vol. LX, 1921, pp. 189-210, tav. VII.
6. — *Isopodi terrestri del Museo Zoologico della R. Università di Napoli*. «Ann. Mus. Zool. R. Univ. di Napoli», (n. s.), vol. 5, 1922, 8 pp., 1 figura.
7. — *Gli isopodi terrestri della Sardegna*. «Boll. Mus. Zool. Anat. Compar. R. Univ. di Torino», vol. 39, (n. s.), n. 31, 1924, 75 pp., tav. 4-5.
8. — *Contributo alla conoscenza della fauna isopodologica delle terre circostanti all'Alto Adriatico*. «Atti Mus. Civ. St. Nat. Trieste», vol. XI, 1926, pp. 1-62, 6 figure.
9. — *Ricerche faunistiche nelle isole italiane dell'Egeo. Isopodi*. «Arch. Zool. Ital.», vol. 13, 1929, pp. 259-268.
10. — *Isopodi terrestri raccolti nel 1925 in Italia dal Dott. E. Dudich ed esistenti nel Museo Nazionale Ungherese (Budapest)*. «Ann. Mus. Nat. Hungarici», vol. XXVI, 1929, pp. 60-71, tab. I, fig. 1-9.
11. — *Porcellionidi nuovi o poco noti d'Italia. Correzioni ed aggiunte (Isopodi terrestri)*. «Boll. Labor. Zool. Agr. e Bachicolt. R. Ist. Sup. Agr. di Milano», vol. IV, 1931-32, pp. 5-26, tav. I-III.
12. — *Per una migliore conoscenza di alcune specie di Isopodi terrestri in rapporto alla loro distribuzione geografica*. «Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. R. Univ. di Torino», vol. XLIII, 1933, ser. III, n. 31, pp. 47-62.

13. ARGANGELI A., *Nuovi contributi alla conoscenza della fauna delle isole dell' Egeo*.
III. *Isopodi terrestri*. « Boll. Labor. Zool. gen. ed Agr. R. Ist. Sup.
di Portici », vol. XXVIII, 1934, pp. 37-69, 41 figure.
14. — *Nuovi contributi alla conoscenza della fauna delle isole italiane dell' Egeo*.
VIII *Isopodi terrestri* (2^a nota). Ibidem, vol. XXX, 1937, pp. 75-86,
fig. I-IV.
15. — *Tylos Latreillii* Aud. et Sav., suoi biotipi, sua area di diffusione. « Boll.
Anat. Comp. R. Univ. di Torino », vol. XLVI, 1937-38, ser. III, n. 79,
13 pp., tav. I-VI.
16. AUBERT A. J. M. et DOLLFUS A., *Notice sur les Isopodes terrestres de Mar-*
seille et de Salon avec description et figures d'espèces nouvelles. « Bull.
Soc. Étud. Sc. Paris », 12 Année, 1890, 10 pp., pl. 1.
17. BRIAN A., *Le Grotte di Toirana (Liguria)*. « Ann. Mus. Civ. St. Nat. Genova »,
vol. LX, 1938-40, pp. 379-437, 2 figure.
18. BUDDÉ-LUND G., *Prospectus generum specierumque Crustaceorum Isopodeum*
terrestrum. Kopenhagen, 10 pp., 1879.
19. — *Crustacea Isopoda terrestria per familias et genera et species descripta*.
Havniae, 1885, 319 pp.
20. — *Landisopoden aus Griechenland, von E. v. Oertzen gesammelt*. « Arch.
Naturgesch. », 62 Jahrg., 1896, pp. 39-48.
21. DOLLFUS A., *Les espèces françaises du genre Philoscia Latreille (Crust. Iso-*
podes du groupe de Cloportides). « Boll. Soc. Étud. Sc. Paris », 7 année,
1884, 4 pp.
22. — *Catalogue raisonné des Isopodes terrestres de l'Espagne (Espèces signa-*
lées jusqu'à ce jour et description d'espèces nouvelles). « An. Soc.
Esp. Hist. Nat. », t. XXI, 1892, pp. 161-190, 13 figure.
23. — *Crustacés Isopodes de la Sicile. Notices faunistiques*. Paris, 1896, 6 pp.,
3 figg.
24. — *Les Isopodes terrestres du nord de l'Afrique. du Cap Blanc à Tripoli*.
(Maroc, Algérie, Tunisie, Tripolitaine). « Mém. Soc. Zool. », France,
t. 9, 1896, pp. 523-553, 5 figure.
25. — *Tableau iconographiques des Philoscia d'Europe. Crustacés isopodes*
terrestres. « Feuille d. Jeun. Natural. (3) », 27 Année, 1897, pp. 70-74,
91-95, 3 Pls.
26. — *Catalogue des Crustacés isopodes terrestres (Cloportides) de France*. Ibi-
dem (3), 29 Année, 1899, pp. 186-190, 207-208.

27. DOLLFUS A., *Sur les Isopodes terrestres des îles Tremiti*. Ibidem (4), 37 Année, 1906, pp. 32-33, 3 figure.
28. FRANKENBERGER ZD., *Sur les genres Illyrionethes Verh. et Aegonethes, G. n. (Isopodes)*. « Arch Zool. expér. et gén. ». Notes et Revue n. 1, t. 80, 1938, pp. 25-37, 15 figure.
29. GRAEFFE E. *Übersicht der fauna des Golfes von Triest usw.* Vol. V, « Crustacea », 1900.
30. JACHSON H. G., *Woodlice from Spain and Portugal, with an account of Benthana a subgenus of Philoscia. Crustacea*. « Proceed. Zool. Soc. London », 1926, pp. 183-201, 1 textfig, Pl. I-VIII.
31. ROGENHOFER A., *Die zoologische Reise des naturwissenschaftlichen Vereines nach Dalmatien im April 1906. B. spezieller Teil. Bearbeitung des gesammelten Materiales. 9. Isopoda*. « Mitteil Naturwiss. Ver. Univ. Wien », VI Jahrg., 1908, pp. 119-121.
32. STEIN J. P. E. FR., *Einige neue europäische Isopoden-Arten*. Berl. entomol. Zeitschr., Jahrg. 3, 1859, pp. 260-267.
33. STROUHAL H., *Die Landisopoden des Balkans. 1 Beitrag*. « Zool. Anz. », Bd. LXXVI, 1928, pp. 185-203, 10 figg.
34. — *Die Landisopoden des Balkans. 3 Beitrag: Südbalkan*. « Zeitschr. f. wiss. Zool. », Bd. 133, 1929, pp. 57-120, 54 Abbild.
35. — *Ueber neue und bekannte Landasseln des Südbalkans im Berliner Zoologischen Museum*. « Sitzungsab. d. Gesellsch. naturforsch. Freunde », 1929, pp. 37-80, 53 Abbild.
36. — *Stark gehöckerterte und bestachelte Armadillidiidae (5. Beitrag zur Landisopodenfauna des Balkans)*. « Zool. Anz. », Bd. 108, 1934, pp. 290-304, 17 Abbild.
37. — *Die Landasseln der Inseln Korfu, Levkas und Kephallonia (7. Beitrag zur Landisopodenfauna des Balkans)*. « Acta Inst. et Mus. Zool. Univ. Atheniensis », t. I, 1936, pp. 53-111, 24 Textfigg.
38. — *Isopoda terrestria Aegaei (10. Beitrag zur Landisopodenfauna des Balkans)*. Ibidem, t. I, 1937, pp. 193-262, 40 figg, 1 Karte u. 7 tabellen.
39. — *Landisopoden des Dodekanes*. « Zool. Anz. », Bd. 119, 1937, pp. 1-11, 6 Abbild.
40. — *Über einige Landasseln griechische Inseln (13. Beitrag zur Landisopodenfauna des Balkans)*. Ibidem, Bd. 120, 1937, pp. 104-109, 6 Abbild.

41. STROUHAL H., *Asseln aus Balkanhöhlen* (16. Beitrag zur Isopodenfauna des Balkans). Ibidem, Bd. 124, 1938, pp. 269-281, 19 Abbild.
42. — *Landasseln aus Balkanhöhlen, in der Sammlung Biospeologica balcanica* 5. Mitteilung: Illyrionethes Verh. und Aegonethes Frankenb. (Zugleich 20. Beitrag zur Isopodenfauna des Balkans). «Mitteil. ü Höhlen- und Karstforsch, 1939, pp. 114-131, 6 Abbild., 1 Verbreitungskarte.
43. TUA P., *Contribuzione alla conoscenza degli Isopodi terrestri italiani*. «Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. R. Univ. di Torino», vol. 15, n. 374, 1900, 15 pp., 1 tavola.
44. VERHOEFF K. W., *Über paläarktische Isopoden. 7 Aufsatz*. «Zool. Anz.», Bd. XXIV, 1901, pp. 407-421, 4 figure.
45. — *Ueber Isopoden. 15. Aufsatz*. «Arch. f. Biontol. Berlin», Bd. II, 1908, pp. 335-387, taf. 29-31.
46. — *Zur Kenntnis der Ligidien, Porcellioniden und Onisciden. 24 Isopoden-Aufsatz*. «Arch. f. Naturgesch.», 82 Jahrg. 1918, pp. 108-169, 2. taf.
47. — *Zur Kenntnis der Landasseln Palästinas. 30. Isopoden-Aufsatz*. Ibidem, Jahrg. 89, 1923, pp. 203-231, 1 taf.
48. — *Über alpenländische und italienische Isopoden. 37. Isopoden-Aufsatz*. «Zool. Jahrb. Abt. f. Syst.», Bd. 56, 1928, pp. 93-172, 85 textabbild.
49. — *Zur Kenntnis osteuropäischen Isopoden. 41. Isopoden-Aufsatz*. Ibidem, Bd. 59, 1930, pp. 1-64, taf. 1-3.
50. — *Über Isopoda terrestria aus Italien. 45. Isopoden-Aufsatz*. Ibidem, Bd. 60, 1931, pp. 489-572, taf. 6-8.
51. — *Zur Kenntnis alpenländischer und mediterraner Isopoda terrestria. 47. Isopoden-Aufsatz*. Ibidem, Bd. 62, 1931, pp. 15-52, taf. 1-2.
52. — *Zur Systematik, Geographie und Ökologie der Isopoda terrestria Italiens und über einige Balkan-Isopoden. 49. Isopoden-Aufsatz*. Ibidem, Bd. 65, 1933, pp. 1-64, taf. 1-2.
53. — *Über Isopoden aus dem Gardasee-Gebiet. 54. Isopoden-Aufsatz*. «Zool. Anz.», Bd. 108, 1934, pp. 242-250, 2 Abbild.
54. — *Studien über Isopoda terrestria. 51. Isopoden-Aufsatz*. «Mitteil. Zool. Mus. Berlin». Bd. 21, h. 1, 1936, pp. 79-163, Abbild. 1-70.

CICLI MERISTEMATICI E RADIAZIONI SOLARI NELLA PINETA DI RAVENNA (*)

(Con sei tavole)

UGO BULI

SYMMARIUM. — Inquirens in series meristemáticas truncorum *Pinus pineae*, in Ravennatibus pinetis, Auctor, multis plantis examinatis iisque inter se collatis, comperit singulorum ligneorum meristematum crassitudinem certis temporibus recurrere; ea enim ita se habet, ut fore respondeat solaris operationis fluctuationibus, quamvis magnopere sentiat caeli vicissitudines, praesertim nimium frigus vel calorem.

Lo studio dei cicli climatici ha trovato nell'analisi delle sequenze meristematiche degli alberi a grande longevità un ausilio prezioso, che toglie molte incertezze alle conclusioni che su tali cicli si ottengono dall'analisi dei fattori climatici o di fenomeni ad essi subordinati.

Il metodo che si basa sulla nozione, che ad ogni anno di sviluppo di una pianta, incluso tra due periodi di riposo, corrisponde la formazione di una cerchia di legno la quale, entro certi limiti, ha uno sviluppo porporzionato alle normalità od all'*optimum* delle condizioni di sviluppo dell'albero, ebbe la sua pratica applicazione in America dal DOUGLASS (1) su esemplari di *Sequoia gigantea* abbattuti nelle foreste della California Centrale. Le maggiori cronologie, come si sa, datano la vita di quelle essenze a 3250 anni, ed i risultati tratti dall'analisi delle serie meristematiche risultarono del massimo interesse. L'alta

(*) Nota Preventiva presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Antonio Renato Toniolo l'8 febbraio 1948.

(1) DOUGLASS A. E., *Climatic Cycles and Tree-growth*. « Carnegie Institution of Washington », 1919-1943.

correlazione che si trovò, per esempio, fra piovosità e spessori anulari, per essenze abbattute nelle regioni aride del Sud-Ovest degli Stati Uniti, dette credito indiscusso al metodo, che si sviluppò e perfezionò tanto, che le pubblicazioni al riguardo si contano già a centinaia in America e in Europa; e specialmente in America, s'intende, dove la ricchezza forestale può offrire esemplari da abbattere senza offesa allo stesso patrimonio forestale.

Molto meno offrono le foreste europee, che difficilmente ospitano alberi di una età superiore ai 100 anni, date le vicende e necessità antropiche inerenti a regioni sempre più intensamente popolate.

Infatti in tutta Europa risultano a tutt'oggi sottoposti all'esame delle successioni meristematiche soltanto 57 esemplari, tutti di poco superiori al secolo. Ed anche per questi sono emerse correlazioni notevoli, soprattutto fra decorso di crescita della pianta e il decorso dell'attività solare.

In Italia, tale ordine di ricerche, se si esclude l'esame di un larice di Val Mareta eseguito dall'Ing. DEL VALLE⁽¹⁾, non ha trovato finora cultori, certo per le difficoltà inerenti alla possibilità di avere piante plurisecolari da sottoporsi all'analisi meristematica.

Eccettuate le Pinete Ravennati dove, per il significato storico, il disboscamento trovò sempre da parte dell'autorità civile fiera resistenza, le Pinete italiane non offrono alberi di considerevole longevità.

La recente guerra che ebbe nei pressi di Ravenna un lungo e vasto teatro di operazioni, fece scempio di estese aree di vegetazione forestale con l'abbattimento di alberi, che il rispetto all'insigne monumento aveva risparmiato per tanti secoli.

Sono questi i tronchi che lo scrivente ebbe a prendere in considerazione.

Lascio ad una più ampia, posteriore relazione la descrizione della tecnica adottata per l'estrazione delle sezioni da sottoporre alle misurazioni e per la lettura degli spessori meristematici.

Questi ultimi sono riportati per ognuna delle sezioni, ricavate da due pini della pineta di Classe (sez. n. 1 e sez. n. 2, tav. I e II).

⁽¹⁾ DEL VALLE G., «Atti e Mem. R. Acc. di Sc. Lett. Arti di Padova», Vol. XLII, 1926.

È noto che lo sviluppo trasversale del tronco non è uniforme, cioè ad anelli circolari concentrici, ma bensì ad anelli a perimetro ovoidale, avendosi lo sviluppo maggiore verso levante.

In tal modo dal centro del tronco passa un diametro, che è il massimo, ed è diviso dal centro stesso in due raggi dei quali uno è il minore e l'altro il maggiore fra gli infiniti possibili.

Ora le due successioni degli anelli meristematici corrispondenti al semiraggio minore A e al semiraggio maggiore B sono riportate una sopra all'altra di conserva nella stessa scala (tav. IV) onde poterle confrontare e trarne la sicurezza, che l'intera sezione ha subito analoghe fluttuazioni, sebbene in scala diversa.

Ed è ciò che si osserva effettivamente.

È ovvio che il fattore, che ha determinato il maggior sviluppo del tronco in direzione est, sia la maggiore intensità della radiazione solare, essendo il *Pinus Pinca* una pianta eliofila in alto grado, capace dei più svariati fototropismi.

Sulla curva meristemica (B), corrispondente al semiraggio maggiore, si è posta la nostra attenzione. Infatti sovrapponendo a questa curva quella dell'attività solare (tav. III), possiamo facilmente constatare, come i massimi ed i minimi di entrambe coincidano con una regolarità quasi perfetta e per le sezioni di entrambi i pini.

Fanno eccezione soltanto i minimi corrispondenti agli anni 1880, 1893, 1929. Sono questi gli anni che le effemeridi meteorologiche ci segnalano fra i più rigidi.

È certo, dunque, che anche il fattore termometrico ha avuto la sua influenza decisiva sulla produzione dei meristemi, specie per il *Pinus Pinca*, che è costretto a vivere in una regione, che è al limite della sua vegetazione ottimale.

Ed è conseguenziale, che le temperature minime invernali siano quelle che maggiormente decidono sugli spessori dei meristemi per la maggior sofferenza che tali temperature inducono alla pianta prettamente meridionale.

Abbiamo creduto opportuno di fare dei confronti fra le curve delle temperature minime assolute invernali (e la somma delle temperature minime assolute invernali), desunte dalle effemeridi della

più prossima stazione termometrica di Forlì ⁽¹⁾ corrispondenti al settantennio 1877-1947 e la parte della curva meristemica relativa a quel periodo (tav. V).

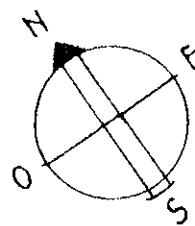
Tali curve, che sono riportate nella tav. V e VI, l'una sovrastante l'altra, rivelano subito come le più basse temperature minime assolute si ripercuotono sugli spessori degli anelli meristematici in maniera perfetta.

Possiamo quindi concludere, per ora, che i due fattori, radiazione solare e temperatura si assommano nel regolare i processi chimico-fisici, che portano alla formazione del legno, e che fra i due fattori quello che sovrasta è la radiazione solare, fino a quando il fattore temperatura comporta nella stagione invernale i minimi assoluti al di sotto dei -10°C .

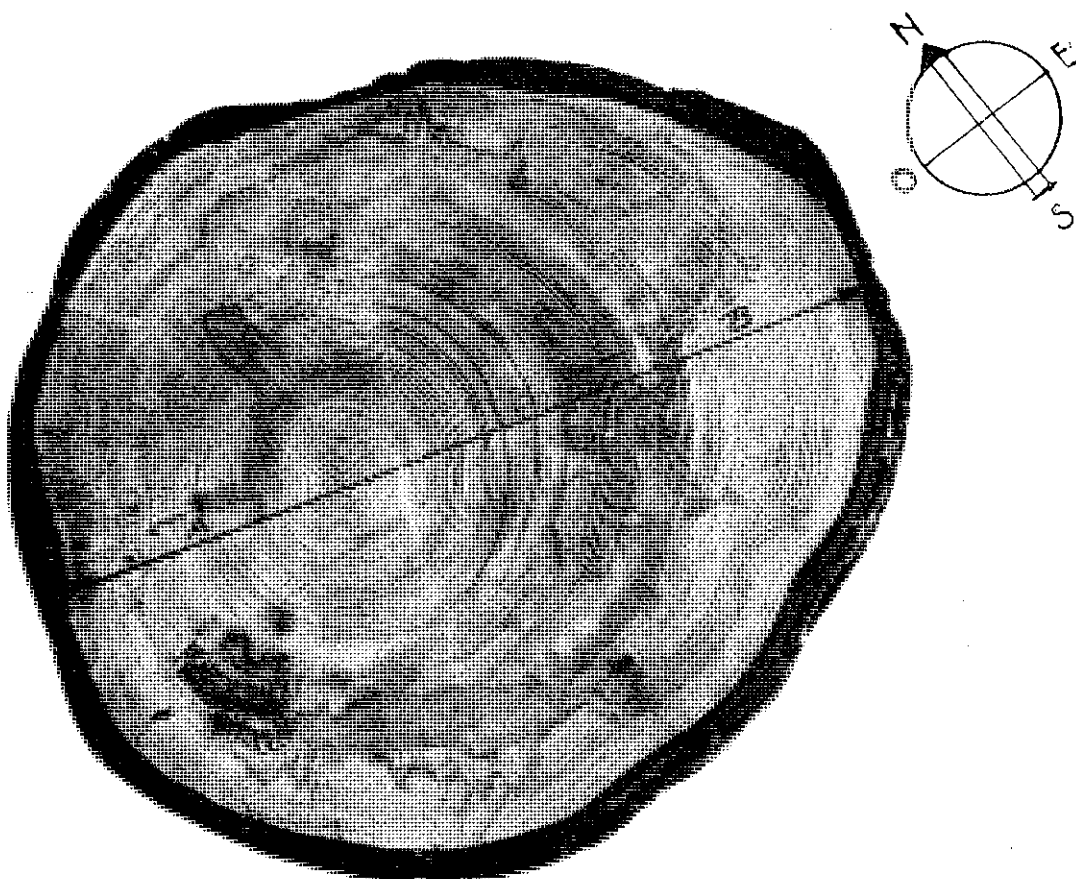
Il proseguo degli studi in corso darà allo scrivente la possibilità di trarre altre conclusioni importanti, circa la ritmicità dei fenomeni climatici, attraverso le sequenze meristematiche, servendosi del prezioso ausilio dell'analisi periodale.

⁽¹⁾ OSSERVATORIO GEOFISICO DI FORLÌ, *Effemeridi dal 1878 al 1944*.

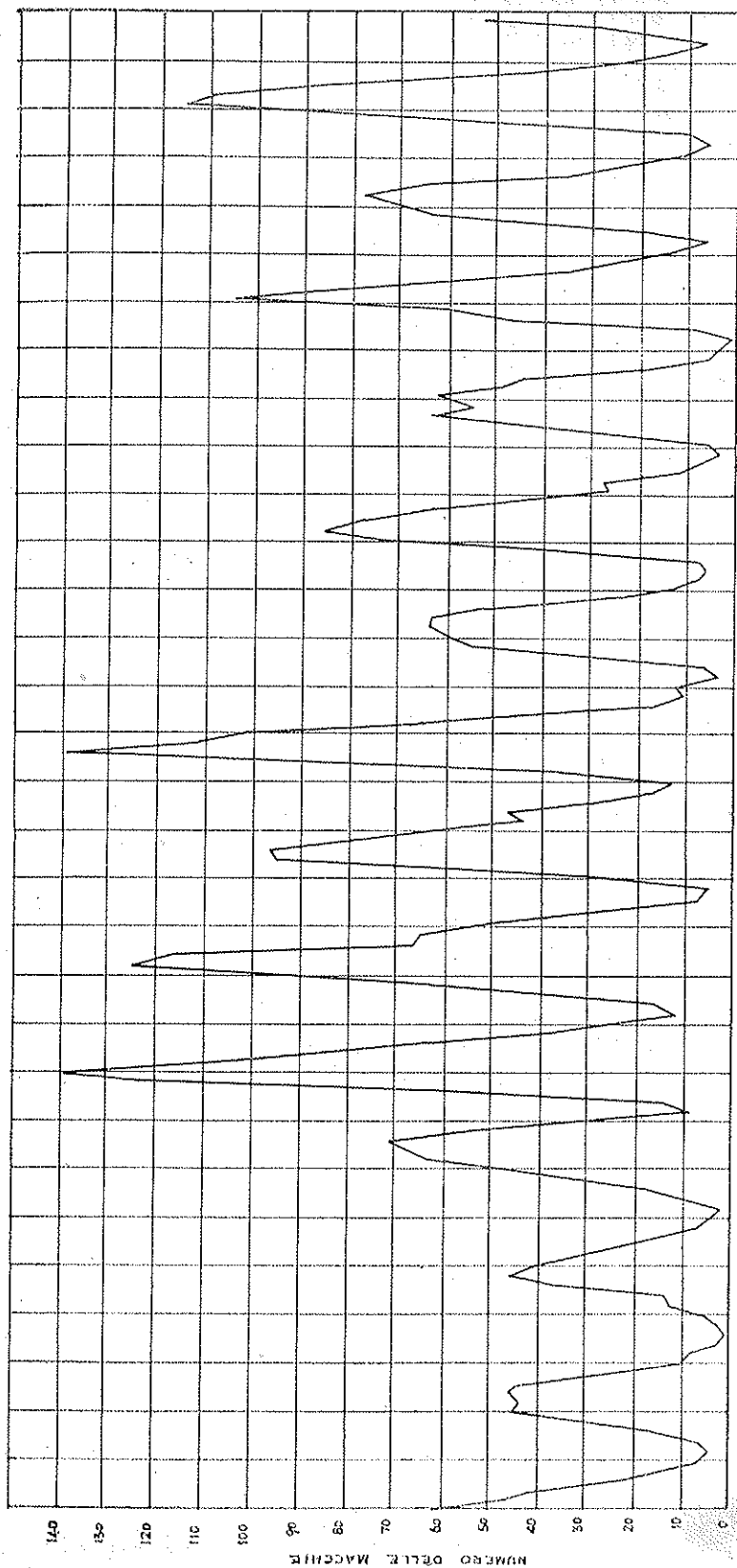
TAVOLE

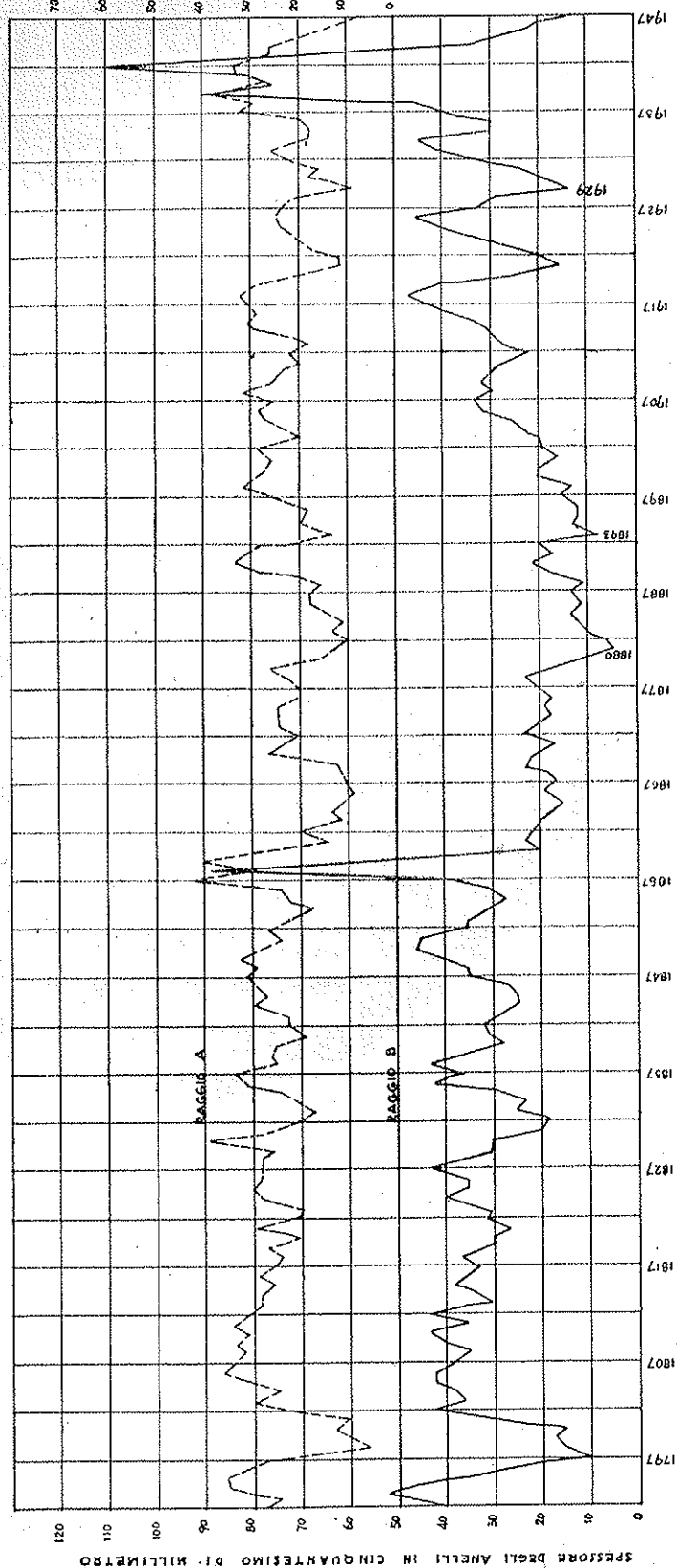


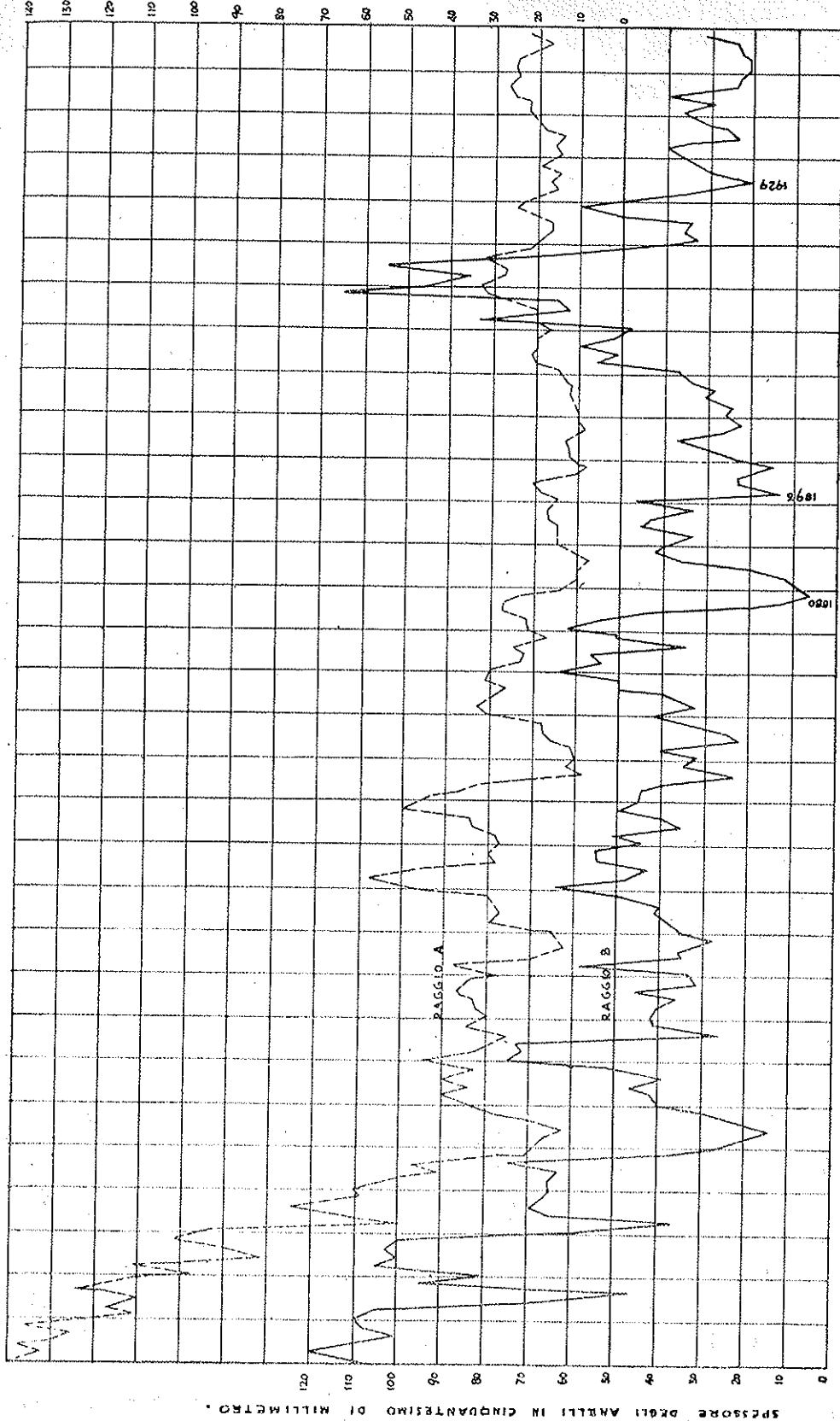
SEZ. N. 1.



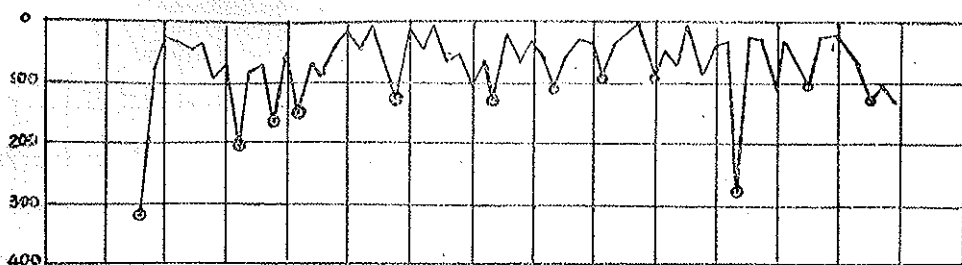
SEZ. N. 2.



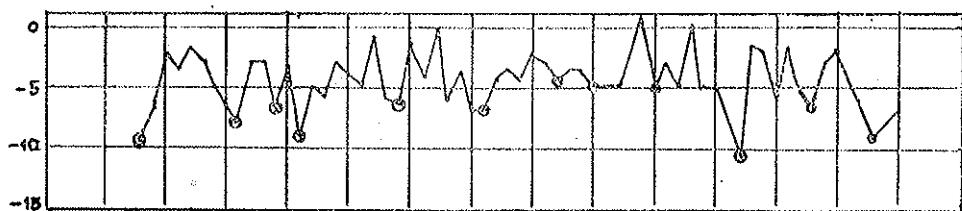




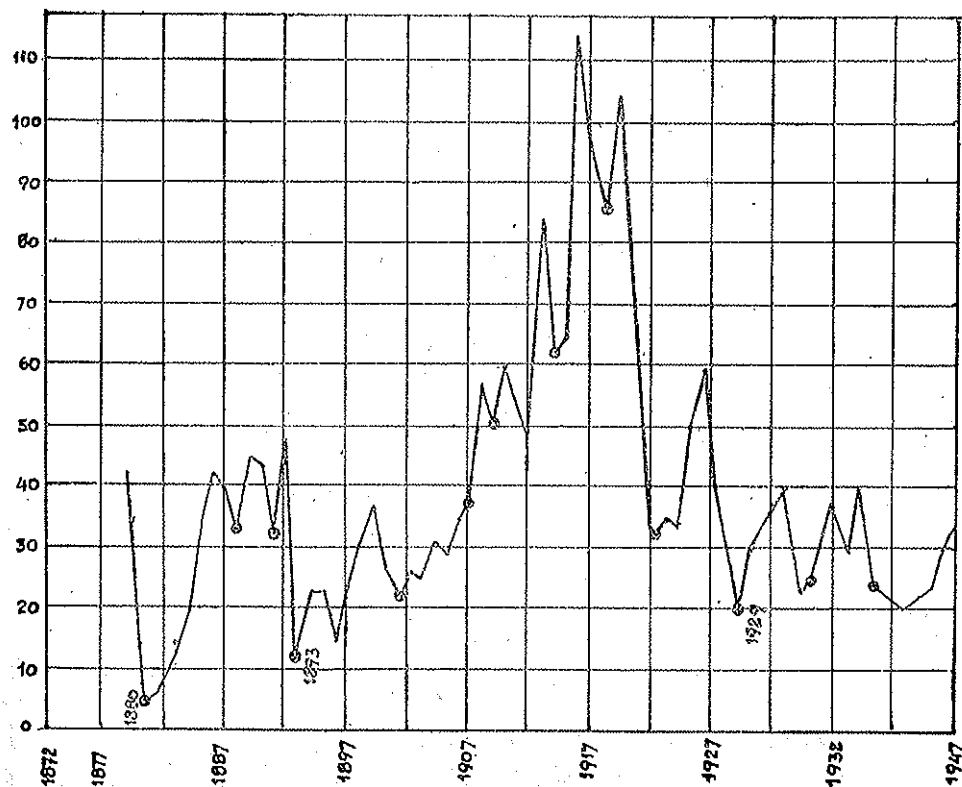
*Somma delle temperat. min.
invernali.*



*Temp. minime est. invern.
nel settantennio 1872-1947*



Spessore degli anelli mensurali della sezione n. 1



AZIONE DEI RAGGI RÖNTGEN SU EMBRIONI E LARVE DI ANFIBI

III. - TRAPIANTO DI COMPLESSI DI ABBOZZI DA EMBRIONI IRRADIATI SU NORMALI (*)

TEODORO PERRI

SUMMARY. — Inchoata capita et dorsa embryonum *Ranae esculentae*, in quap letalis radiorum X vis illata est, in communes embryones transferuntur, eorumque vicissitudines etiam post donantis mortem perpenduntur. Hac sua ratione quid in singulis inchoatis partibus efficiatur investigat Auctor, et quid consequatur quod comparat cum iis quae nota iam sunt quod attinet ad LiCl.

La suscettibilità differenziale dei vari abbozzi embrionali di fronte agli agenti perturbatori dello sviluppo fu, per il radium ed i raggi X, indagata da vari Autori e particolarmente, per gli Anfibi, da BOHN, SCHAPER, LEWY, O. e G. HERTWIG e più recentemente da ANCEL, VINTENBERG, OLIVIERI, PASQUINI. Si riconobbe, particolarmente per opera del COTRONEI, che anche con questi agenti si può giungere agli stessi risultati morfogenetici che con altri (chimici, ecc.). Le fondamentali ricerche del CHILD sul « gradiente » portarono una nuova visione nell'interpretazione di questi fatti, compresi quelli successivamente scoperti. Mi limito a ricordare, dovendovi ritornare tra poco, che il COTRONEI notò, per azione del LiCl su uova di Anfibi, una diminuzione di sensibilità in senso apico-caudale, il che venne successivamente riconfermato dal BELLAMY; il COTRONEI notò pure una particolare su-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Filippo Silvestri l'8 febbraio 1948.

sceitibilità dello stadio di gastrula a dare inibizioni cefaliche specie per l'encefalo, e lo stesso fatto fu successivamente osservato dal PASQUINI ⁽¹⁾ in esperienze con il radium.

Lo scopo delle mie ricerche ⁽²⁾, per quanto riguarda gli embrioni, è anzitutto di seguire mediante trapianto su normale il comportamento dei vari abbozzi oltre la morte dei donatori, onde un approfondimento della questione; inoltre distinguere gli effetti diretti dei raggi X da quelli indiretti, cioè attraverso perturbamenti dell'intero organismo, sperimentando con trapianti sia da irradiato su normale che da normale su irradiato, in modo che più chiaramente emerga il comportamento di ciascun abbozzo; altro scopo, particolarmente perseguito in questa Nota, è lo studio delle conseguenze morfogenetiche determinate da questa differente suscettibilità tra gli abbozzi, in confronto con quanto avviene con altri agenti, specie il LiCl.

Le ricerche di cui mi occupo in questa Nota le ho eseguite ⁽³⁾ su embrioni di *Rana esculenta*, usando dosi varie ma sempre sicuramente letali di raggi X ⁽⁴⁾. In un primo gruppo di esperienze ho trapiantato parte della testa giungendo a comprendere, posteriormente, le vescicole ottiche; ed in un secondo gruppo, una zona del dorso comprendente un tratto di corda dorsale con corrispondenti midollo spinale o somiti. La zona tolta da embrioni röntgen-irradiati venne trapiantata sull'addome di embrioni normali; sia donatori che portatori allo stadio di bottone codale piccolo. Uguali trapianti, da normale su normale, li ho eseguiti per controllo.

⁽¹⁾ P. PASQUINI, « Arch. Zool. Ital. », vol. XVI-I, 1930, pag. 501; P. PASQUINI e M. LENZI, in « Trattato di Radiobiologia », vol. III, 1939, Roma.

⁽²⁾ T. PERRI, Nota I, « Acta », vol. VIII, 1945, pag. 67-72; Nota II, ivi, vol. IX, 1946, pag. 197-204; « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. II, 1947.

⁽³⁾ Nell'Istituto di Anatomia comparata « B. Grassi » dell'Università di Roma.

⁽⁴⁾ Tecnica d'irradiazione: tubo Original Müller per radioterapia; tensione di 40.000 volt; intensità di 3 milliampere; senza filtro; distanza embrioni-anticatodo di cm. 21,5; gli embrioni erano tenuti in una vaschetta di vetro con uno strato di acqua comune alto mm. 4. Invece del dosaggio in « r » ho usato un dosaggio biologico: gli embrioni di *Rana esculenta*, allo stadio che ho sperimentato, se irradiati per 30' con i dati ora riferiti, muoiono dopo vari giorni con notevole idrope (vedi Nota II).

* * *

Vediamo dapprima il trapianto della zona cefalica, su cui ho sperimentato nel 1946 e nel 1947, che comprende essenzialmente vescicole ottiche, diencefalo e telencefalo, abbozzi olfattori, regione boccale. Ricordo anzitutto che nei trapianti di controllo (da normale su normale) ebbi, come già era da attendersi, ottimo differenziamento dei vari abbozzi.

Gli embrioni donatori furono irradiati per 30-35 minuti primi, allo stadio di doccia neurale completamente saldata; cioè con dose nettamente letale, come risulta dal comportamento degli embrioni di controllo (solo irradiati) e dei donatori. Il comportamento del trapiantato è strettamente in funzione della resistenza dei donatori alla dose somministrata di raggi, come mostra l'esame microscopico degli embrioni di controllo (solo irradiati). I portatori furono fissati da 8 a 17 giorni dopo la morte di tutti i controlli (in maggio).

Ciò premesso, ecco ora in breve i risultati. Le vescicole ottiche sono la parte più resistente del trapiantato; esse giungono spesso a differenziarsi completamente in tutte loro parti, con retina ben stratificata. Questo nei casi migliori. In altri la massa retinica è di piccolo volume però regolare; con cristallino di grandezza a volte relativamente maggiore, segno della sua maggiore resistenza rispetto alla retina, come era stato già notato da O. HERTWIG e da me recentemente riconfermato. Nei casi di più forte azione dei raggi, l'occhio finisce con lo scomparire, rimanendo solo tracce di pigmento. A volte i due abbozzi ottici presentano una diversa resistenza all'irradiazione. Della diminuzione della loro reciproca distanza parlerò tra breve. Questo comportamento dell'occhio è perfettamente d'accordo con quanto avevo osservato nelle mie precedenti esperienze sul suo trapianto da embrioni irradiati su normali.

Gli abbozzi olfattori offrono una resistenza ai raggi X minore che le vescicole ottiche. Sono spesso, rispetto al normale, meno differenziati o di volume minore di quanto accada per gli occhi. Vi sono però dei casi in cui degli occhi rimane solo del pigmento, mentre gli abbozzi olfattori sono discretamente conformati. Della reciproca di-

stanza tra i due abbozzi parlerò tra poco. Risulta adunque chiaro che anche gli abbozzi olfattori, pur così suscettibili, sono più resistenti dell'intero embrione irradiato ⁽¹⁾.

Particolare interesse offre il comportamento dell'encefalo, la cui resistenza ai raggi X varia secondo le sue diverse parti. Il telencefalo è la meno resistente; nei casi di minori lesioni presentasi ridotto e massiccio, onde gli abbozzi olfattori non più da esso tenuti distanziati, nè dalle cartilagini della capsula olfattoria completamente mancanti, si avvicinano fino a toccarsi; negli altri casi il telencefalo manca del tutto o quasi, onde non solo gli abbozzi olfattori ma anche gli oculari si avvicinano fino a venire anch'essi tra loro a contatto. Posteriormente agli occhi si trova spesso un ammasso di tessuto nervoso talora in discrete condizioni, che con ogni probabilità deve interpretarsi come diencefalo; questo a volte separa la metà posteriore dei due occhi che vengono a contatto solo con le loro metà anteriori.

La regione boccale è anch'essa assai sensibile; le parti pigmentate del becco e i dentelli ⁽²⁾ mancano sempre e completamente.

Le cartilagini boccali e le altre encefaliche sono pochissimo sviluppate; o mancano completamente o vi sono dei pezzi cartilaginei di difficile identificazione.

Adunque degli abbozzi presi in considerazione in questo primo gruppo di ricerche, le vescicole ottiche sono le più resistenti, gli abbozzi olfattori un poco meno; più sensibile la regione boccale, ancor più il telencefalo.

Questi risultati presentano notevoli somiglianze con l'azione del LiCl su embrioni di Anfibi: mi riferisco particolarmente alle già accennate ricerche del COTRONEI ⁽³⁾ che se ne occupò a lungo, ed allo stesso

(1) Risulta da ricerche ancora inedite che affidai alla sig.^{na} M. PAGNOTTA di questo Istituto, che anche l'otoscisti ha una resistenza ai raggi X maggiore che l'intero embrione irradiato, al quale sopravvive se trapiantata su embrione normale (esperienze in *Rana esculenta*).

(2) Ricordo, per gli opportuni confronti, che anche nelle larve di *Rana esculenta* essi sono sensibilissimi ai raggi X.

(3) G. COTRONEI, « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. XXIV, 1° sem., 1915; vol. XXIV, 2° sem., 1915; vol. XXVIII, 2° sem., 1919, pag. 206 e pag. 511; vol. XXX, 1° sem., 1921; vol. XXX, 2° sem., 1921; « Ric. di Morf. », vol. II, 1921; « Riv. di Biol. », vol. III, 1921; « Arch. Ital. de Biol. », vol. LXXI, 1921; « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. XXXI, 1° sem., 1922, pag. 433 e pag. 473.

Autore rinvio per la relativa bibliografia. Anche di fronte al LiCl il telencefalo è il più sensibile; inoltre l'abbozzo olfattorio e la regione boccale sono più sensibili dell'ottico. Si vede che le differenze di suscettibilità tra i vari abbozzi sono sostanzialmente uguali a quanto avviene con i raggi X. Ne consegue che le differenze di suscettibilità ai raggi X si mantengono le stesse sia allo stadio di gastrula o precedenti, sia allo stadio di vescicola ottica primaria. Le vescicole ottiche, e lo stesso dicasi per gli abbozzi olfattori, quando vengono a contatto sono troppo avanzati nello sviluppo per potersi fondere. Il loro avvicinamento o contatto si ha per riduzione dell'encefalo, conseguenza dell'azione necrotica dei raggi X; si ha quindi fundamentalmente la stessa genesi che il COTRONEI ammise quando per azione del LiCl si ha la fusione degli abbozzi olfattori e degli oculari, conseguenza dell'inibizione dell'encefalo ⁽¹⁾. Anche l'aver trovato a volte nei due abbozzi oculari (e negli olfattori) un comportamento diverso l'uno dall'altro trova un parallelo nelle esperienze con il LiCl; ove può aversi monoftalmia asimmetrica, il che fu dal COTRONEI interpretato appunto come una diversa suscettibilità tra i due abbozzi.

* * *

Nella seconda serie di ricerche, eseguite nel 1947, ho trapiantato un frammento dorsale comprendente essenzialmente corda dorsale, midollo spinale e somiti. Gli embrioni donatori erano stati irradiati per 30 o 50 minuti primi, allo stadio di doccia neurale completamente saldata; ho quindi usato dosi nettamente letali. Il trapianto fu eseguito allo stadio di bottone caudale piccolo sull'addome di embrioni normali allo stesso stadio. Uguali trapianti, però tra embrioni normali, furono eseguiti per controllo: in questi tutte le parti del trapiantato si sono perfettamente differenziate; in particolare, la superficie sezione della corda e la sua struttura sono praticamente uguali nel trapiantato e nel portatore.

Nei casi in cui i donatori erano stati irradiati per 30', fissai i portatori 10 giorni (in maggio) dopo la morte di tutti i controlli (em-

⁽¹⁾ Ricordo che, com'è riferito dal COTRONEI, la ciclopia per azione del LiCl su Anfibi fu per la prima volta osservata dal LEPLAT.

brioni solo irradiati). Si osserva nel trapiantato che la corda è in ottime condizioni e di struttura normale, tuttavia la superficie sezione pur essendo notevole è chiaramente più piccola che quella della corda del portatore. Si ha dunque che la corda dorsale, pur avendo risentito gli effetti della röntgen-irradiazione, ha presentato una resistenza notevole, assai maggiore che quella dell'intero organismo. Le stesse considerazioni valgono per i miotomi. Invece il midollo spinale si è mostrato molto meno resistente; infatti è generalmente di aspetto poco regolare o è del tutto irricognoscibile.

Nelle irradiazioni con dosi nettamente maggiori, cioè di 50', fissando i portatori 5 giorni (in maggio) dopo la morte dei controlli (embrioni solo irradiati) più resistenti, la corda presenta sempre uno sviluppo minore che nelle irradiazioni di 30', tuttavia la sua struttura è generalmente del tutto normale e l'accrescimento discreto; solo in qualche caso è assai piccola ed irregolare. I muscoli si presentano ben sviluppati; il midollo spinale generalmente non è neppure riconoscibile con sicurezza. Questi risultati concordano con i precedenti.

Ricordo che O. HERTWIG, nelle sue ricerche di radium-irradiazione di uova di Anuri, osservò per la corda dorsale una notevole resistenza. All'azione del LiCl, secondo le ricerche del COTRONI, la corda dorsale è resistentissima.

Nei miei casi si è visto che la corda è molto resistente ai raggi X; molto più che l'intero organismo cui sopravvive almeno per molti giorni; tuttavia ne risente chiaramente l'azione ⁽¹⁾. Uguali considerazioni valgono per i miotomi.

CONSIDERAZIONI

Queste esperienze, come ho già detto, studiano la differente suscettibilità dei vari abbozzi ai raggi X, mediante trapianto da irradiato su normale, o quindi in condizioni di isolamento dall'ambiente irradiato ⁽²⁾. Degli abbozzi studiati, il telencefalo è assai sensibile,

⁽¹⁾ Queste osservazioni sulla corda dorsale fanno parte dei dati che vado raccogliendo per una più approfondita conoscenza del suo comportamento di fronte ai vari agenti.

⁽²⁾ Ribadisco quanto ho già detto nelle mie precedenti Note: l'abbozzo irradiato non è tossico per l'embrione sul quale venga trapiantato.

molto più del diencefalo; invece assai resistenti sono gli abbozzi ottici e forse un poco meno, ma più del telencefalo, gli olfattori. La corda dorsale ed i miotomi sono molto più resistenti degli abbozzi encefalici. Nei precedenti paragrafi ho già posto a raffronto questi risultati con quanto era già stato visto per il LiCl, sulla scorta dei lavori del COTRONI.

Ricordo che altre mie esperienze ancora inedite su embrioni e larve di *Bufo vulgaris*, riconfermano ed estendono questi risultati. Anche in embrioni di *B. vulg.* irradiati con dosi letali, si osserva che la corda dorsale è di dimensioni maggiori di quanto comporterebbero le dimensioni raggiunte dall'intero embrione, segno di maggior resistenza; la corda è però contemporaneamente di dimensioni minori di quella di un embrione normale tenuto in vita nelle stesse condizioni (a parte l'irradiazione) e per un ugual numero di giorni, segno che pur sempre risente l'azione inibitrice dei raggi X.

Questa maggior resistenza di alcuni abbozzi acquista più risalto se confrontata con altri abbozzi a comportamento diverso. Così in larve giovanissime di *B. vulg.* fortemente irradiate, gli abbozzi degli arti, già istologicamente ben visibili, si distruggono e scompaiono, mentre la larva è ancora in grado di vivere per qualche giorno (le relative esperienze di trapianto saranno eseguite quest'anno). Ancora più chiaro è il caso delle larve giovanissime di *B. vulg.* irradiate con dosi che solo alle più resistenti di esse permettono di giungere alla metamorfosi; in queste le gonadi sono del tutto scomparse.

Si vede l'opportunità di estendere ed approfondire queste indagini che contribuiscono ad una migliore conoscenza non solo dell'agente usato, ma anche delle peculiarità dei singoli abbozzi.

CONCLUSIONI

1) In trapianti, in *Rana esculenta*, da embrioni trattati con dose letale di raggi X su embrioni normali, della parte anteriore della testa fino alle vescicole ottiche incluse, è risultata una netta suscettibilità differenziale tra vari organi. Assai resistenti sono le vescicole ottiche; un poco meno gli abbozzi olfattori; assai meno resistente è il telencefalo, la cui scomparsa in seguito a necrosi da raggi X provoca l'avvicinamento o il contatto dell'abbozzo olfattorio o dell'ottico di un

lato con quelli dell'altro lato; poco resistente è la regione boccale.

2) In trapianti, in *Rana esculenta*, da embrioni trattati con dose letale di raggi X su embrioni normali, di un tratto del dorso comprendente corda dorsale, miotomi e midollo spinale, è risultato che corda dorsale e miotomi sono più resistenti sia del midollo spinale sia dell'intero embrione.

3) La corda ed i miotomi sono più resistenti degli organi della parte cefalica di cui al n. 1.

UNA CARATTERIZZAZIONE GEOMETRICA DELLE VARIETÀ ARITMETICAMENTE NORMALI (*)

FEDERICO GAETA

SUMMARY. — Auctor determinat quae condicio necessaria sit, eademque sufficiat, ut ex eo quod systema lineare, a formis ordinis $l(\geq 2)$ super aliquam algebraicam varietatem sectum, completum sit, concludi possit completum esse etiam systema quod secetur a formis ordinis $l-1$.

Scopo di questa Nota è di stabilire il seguente teorema:

Se V_d è una varietà algebrica irriducibile appartenente allo S_r , sulla quale le forme di un dato ordine $l(\geq 2)$, seghino un sistema lineare completo, condizione necessaria e sufficiente affinché lo stesso accada per le forme di ordine $l-1$, è che sopra un qualunque iperpiano le forme d'ordine l per V_d seghino un sistema lineare completo ⁽¹⁾.

Supporremo (come si può senza restrizione) che lo S_{r-1} scelto sia quello d'equazione $x_0 = 0$.

La condizione è sufficiente. Le forme F^l per $\bar{V} = (V_d, S_{r-1})$ seghino sopra V_d , fuori di \bar{V} , un sistema lineare completo, contenente totalmente il sistema staccato su V_d dalle F^{l-1} . Bisogna provare che ogni varietà M di questo sistema è segabile con una F^{l-1} . Infatti, $M + \bar{V}$ è la completa intersezione di V_d con una F^l d'equazione $f_1 = 0$, segante l'iperpiano $x_0 = 0$ in una V_{r-2}^l , che per ipotesi, è sezione di un'altra forma d'ordine l , $f_2 = 0$, passante per V_d .

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi nella Tornata dell'8 febbraio 1948.

⁽¹⁾ Per le curve ($d=1$) il teorema fu enunciato senza dimostrazione dal prof. SEVERI nel Seminario dell'Istituto di Alta Matematica in Roma. Vedi anche per un teorema dello stesso tipo: F. SEVERI, *Serie sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* (a cura di F. CONFORTO ed E. MARTINELLI, Roma, Cremonese 1942), pag. 371-372.

Nel fascio $f_1 + \lambda f_2 = 0$, la cui forma generica passa per $M + \bar{V}$, esiste una forma spezzata in $x_0 = 0$ ed in un'altra $g = 0$ d'ordine $l-1$. Pertanto $g = 0$ sega completamente V_a nella varietà M .

La condizione è necessaria. Sia V_{r-2}^l una varietà $(r-2)$ -dimensionale d'ordine l dell'iperpiano $x_0 = 0$ passante per \bar{V} . Se non ci sono F^l per V_a seganti $x_0 = 0$ nella V_{r-2}^l , ogni forma $f_1 = 0$, d'ordine l , per V_{r-2}^l segherà V_a ulteriormente, fuori di \bar{V} , in una varietà M segabile completamente, per ipotesi, con una forma $g = 0$ d'ordine $l-1$. Allora, $f_1 = 0$ e $x_0 g = 0$ segano V_a nella stessa varietà $\bar{V} + M$. Quindi, una certa combinazione lineare $f_1 + \lambda x_0 g = f_2$ contiene V_a . Evidentemente $f_2 = 0$ sega $x_0 = 0$ nella V_{r-2}^l , contro l'ipotesi che non vi sieno forme siffatte passanti per V_a .

Segue come corollario che se la V_a gode della proprietà che esista un numero naturale λ tale che le forme d'ordine $l \geq \lambda$ seghino su V_a un sistema lineare completo, allora, le forme d'ordine $l \geq \lambda + 1$ contenenti V_a segano sopra ogni iperpiano S_{r-1} un sistema completo.

2. — È ora opportuno qualche raffronto fra il teorema dimostrato e taluni recenti risultati di algebra moderna. ZARISKI chiama *varietà normali* (in senso aritmetico) quelle V irriducibili per le quali l'anello $K[\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_r]$ è integralmente chiuso nel suo corpo quoziente, essendo K il corpo fondamentale e $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_r$ le coordinate omogenee del punto generico di V ⁽¹⁾. Queste varietà sono altresì normali nel senso algebrico-geometrico, ma il reciproco non è vero. H. T. MOHLY ⁽²⁾ caratterizza le varietà aritmeticamente normali come quelle V sulle quali le forme d'ogni ordine l segano un sistema lineare completo.

Lo stesso ZARISKI ha introdotto il concetto di *varietà localmente normale* come segue:

Una varietà irriducibile V è localmente normale lungo una sotto-varietà irriducibile W quando l'anello quoziente $Q(W)$ è integralmente

⁽¹⁾ O. ZARISKI, *Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties* (« American Journal of Mathematics », vol. 41, 1939), pag. 282.

⁽²⁾ H. T. MOHLY, *A remark on normal varieties* (« Annals of Mathematics », vol. 42, 1941), pag. 921.

chiuso nel suo corpo quoziente⁽¹⁾; V è localmente normale quand'è localmente normale in tutti i suoi punti

ZARISKI osserva poi che le varietà prive di singolarità sono sempre localmente normali epperò le varietà localmente normali si possono caratterizzare come quelle per le quali sono completi i sistemi tagliati dalle forme da un certo ordine λ in poi.

P. DUBREIL, alla sua volta, chiama *varietà di prima specie*, quelle varietà pure (non necessariamente irriducibili) tali che le forme d'ogni ordine l del loro ambiente passanti per V_a segano sopra un iperpiano S_{r-1} , non contenente nessuna parte irriducibile di V_a , il sistema completo delle V_{r-2}^l per (V_a, S_{r-1}) ⁽²⁾.

D'accordo con questa nomenclatura il corollario del numero precedente dice:

Ogni varietà aritmeticamente normale è di prima specie. Una varietà localmente normale di prima specie è normale.

In particolare:

Per le varietà irriducibili e prive di punti multipli i concetti di varietà aritmeticamente normali e varietà di prima specie coincidono.

(1) O. ZARISKI, *Normal varieties and birational correspondences* («Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 48, n. 6, 1942), pagg. 402-413. Se x_0, x_1, \dots, x_r sono le coordinate del punto generico di V , si chiama anello quoziente di una sottovarietà W di V , l'anello dei quozienti $f(n)/g(n)$ dove f e g sono forme dello stesso ordine in x_0, \dots, x_r e $g \neq 0$ in W .

(2) P. DUBREIL, *Quelques propriétés des variétés algébriques se rattachant aux théories de l'algèbre moderne* («Act. scientifiques et industrielles», 210, Exposé math. à la mém. de J. Herbrand, XII, Hermann, Paris, 1931).

SUR LES EXTREMALES D'UNE CERTAINE INTÉGRALE I
ET L'APPOINT QU'ELLES APPORTENT À UN THÉORÈME
GÉNÉRAL D'UNICITÉ CONCERNANT L'INTÉGRALE D'UNE
ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE (*)

LA VALLÉE POUSSIN
Academicien Pontifical

SUMMARIVM. — Posito radio vectore alicuius puncti, quod planam lineam describat, extremalia eius integralis, respectu alicuius poli, si pro variabili sumatur arcus lineae, sunt hyperboles aequilaterae, quarum centrum est in ipso polo. Quod cum demonstraverit, Auctor computat quinam sit integralis valor secundum arcum extremalis, et quinam sit maximus valor si polus et extrema arcus certis condicionibus subiciantur. Ex iis quae invenit, Auctor, recentem a Ballieu propositam assertionem definiens, demonstrat theorema unicuitatis, ut aiunt, pro integrali aequationis differentialis linearis.

§ 1. — PRÉLIMINAIRE

La présente Note a son origine dans un intéressant article de M. BALLIEU qui paraîtra prochainement dans les « Bulletins de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique ».

Rappelons l'énoncé d'un théorème classique: Une intégrale $f(z)$ d'une équation différentielle linéaire homogène de l'ordre n à coefficients holomorphes, est identiquement nulle si elle s'annule ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées en un point z ; autrement dit, l'intégrale $f(z) = 0$ est *unique* à vérifier cette conditions.

(*) Nota presentata nella Tornata dell'8 febbraio 1948.

Cette condition revient à dire que $f(z)a$, au point z , une racine multiple d'ordre n . J'ai montré, il y a une vingtaine d'années (« Annales de la Société Scientifique de Bruxelles », 1829) que le théorème subsiste si l'on éparpille ces n racines superposées dans un voisinage suffisamment immédiat autour du point z .

M. BALLIEU s'est proposé une question analogue. Au lieu d'éparpiller les n racines de $f(z)$, il éparpille les $n - 1$ racines des dérivées successives, y compris une racine de $f(z)$, dans un domaine D ; il se demande alors quelles restrictions il faut imposer à ce domaine D pour que le théorème d'unicité subsiste. Il donne à cette question nouvelle une réponse analogue à celle que j'avais donnée à la précédente.

Pour préciser la réponse, M. BALLIEU fait intervenir une certaine intégrale que j'appelle I. Quoique M. BALLIEU ne s'en occupe pas, les extrémales de cette intégrale se lient étroitement au problème. C'est l'étude de ces extrémales qui fait l'objet essentiel de cette Note. Leur étude nous a intéressé par la simplicité inattendue des résultats auxquels elle conduit. Elle apporte un léger appoint à la solution indiquée par M. BALLIEU.

§2. — CALCUL ET PROPRIÉTÉS DES EXTRÉMALES DE L'INTÉGRALE I.

1. *Définition de I et calcul des extrémales.* — Soit P un pôle donné et soit r le rayon vecteur d'un point M qui décrit une ligne L dans le plan. Soit ds la différentielle de l'arc de L. Nous considérons l'intégrale

$$I = \int r \, ds .$$

Nous nous proposons d'en déterminer les extrémales. Ce sont, nous allons le voir, *des hyperboles équilatères de centre P*. Nous en établirons quelques propriétés remarquables.

Les extrémales de I sont déterminées par la condition

$$\delta \int r \, ds = \int (\delta r \, ds + r \, \delta ds) = 0 .$$

Prenons le pôle P comme origine d'axes rectangulaires x, y et considérons y comme fonction de x . Comme x ne reçoit pas de va-

riation, nous avons

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, & \delta r &= \frac{y \delta y}{r}, \\ ds^2 &= dx^2 + dy^2, & \delta ds &= \frac{dy \delta dy}{ds} = \frac{dy}{ds} d \delta y. \end{aligned}$$

Il vient par intégration par parties,

$$\delta \int r ds = \int \left(\frac{y ds}{r} \delta y - \frac{r dy}{ds} d \delta y \right) = \int \left(\frac{y ds}{r} - d \cdot \frac{r dy}{ds} \right) \delta y.$$

De là, l'équation différentielle des extrémales

$$\frac{y ds}{r} - d \cdot \frac{r dy}{ds} = 0,$$

qui, multipliée par $\frac{r dy}{ds}$ prend la forme différentielle exacte

$$y dy - \frac{r dy}{ds} d \cdot \frac{r dy}{ds} = 0.$$

Nous obtenons immédiatement l'intégrale première (avec une constante d'intégration λ)

$$\left(\frac{r dy}{ds} \right)^2 = y^2 + \lambda, \quad \text{c. à. d.} \quad \frac{(x^2 + y^2) dy^2}{dx^2 + dy^2} = y^2 + \lambda.$$

Cette équation se réduit à

$$[1] \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{y^2 + \lambda}{x^2 - \lambda}.$$

Le changement de signe de λ revient à la permutation de x et y . Nous pouvons supposer λ positif et le remplacer par λ^2 . Remplaçons alors x et y par λx et λy , ce qui revient à faire une similitude de centre P; nous obtenons

$$[2] \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{y^2 + 1}{x^2 - 1}.$$

Posons

$$\begin{aligned} x &= \pm \operatorname{Ch} \varphi, & dx &= \pm \operatorname{Sh} \varphi d\varphi, & x^2 - 1 &= \operatorname{Sh}^2 \varphi, \\ y &= \operatorname{Sh} \psi, & dy &= \operatorname{Ch} \psi d\psi, & y^2 + 1 &= \operatorname{Ch}^2 \psi; \end{aligned} \quad \text{d'où}$$

l'équation [2] se réduit à

$$\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2 = 1 \quad \text{d'où} \quad \pm \psi = \varphi + \alpha.$$

L'intégrale générale de l'équation [2] est donc, sous forme paramétrique et avec la constante d'intégration α ,

$$[3] \quad \pm x = \text{Ch } \varphi \quad \pm y = \text{Sh } (\varphi + \alpha).$$

On forme l'équation en x, y par l'élimination de φ . On a

$$\begin{aligned} \text{Sh}(\varphi + \alpha) &= \text{Sh } \varphi \text{ Ch } \alpha + \text{Ch } \varphi \text{ Sh } \alpha \\ [4] \quad y &= \sqrt{x^2 - 1} \text{ Ch } \alpha \pm x \text{ Sh } \alpha \\ (y \mp x \text{ Sh } \alpha)^2 &= (x^2 - 1) \text{ Ch}^2 \alpha \\ y^2 \mp 2xy \text{ Sh } \alpha - x^2 &= -\text{Ch}^2 \alpha \end{aligned}$$

Ces extrémales particulières sont des hyperboles équilatères de centre P (pôle et origine des axes). Toutes les autres extrémales en sont aussi, car elles se déduisent des précédentes par une similitude de centre P ou par la permutation des axes de coordonnées.

Pour que l'hyperbole soit rapportée à ses axes de symétrie, il faut faire $\alpha = 0$. L'équation devient

$$[5] \quad x^2 - y^2 = 1.$$

C'est l'axe des x qui est l'axe réel de la ligne, mais il est permis d'intervertir les axes des x et des y , ce qui revient à changer le signe de λ dans l'intégrale première [1].

Quand l'hyperbole est rapportée à ses axes de symétrie et que l'axe des x est son axe réel, elle admet l'équation [5] en axes rectangulaires, et elle admet la représentation paramétrique

$$[6] \quad \pm x = \text{Ch } \varphi, \quad y = \text{Sh } \varphi.$$

Toutes les autres extrémales ayant les mêmes axes de symétrie et le même axe réel se déduisent de la précédente par une similitude de centre origine. Leur représentation paramétrique sera

$$[7] \quad \pm x = \lambda \text{ Ch } \varphi, \quad y = \lambda \text{ Sh } \varphi,$$

et leur représentation cartésienne

$$[8] \quad x^2 - y^2 = \lambda^2 .$$

A chacune des déterminations du signe ambigu donné à x dans [6] ou dans [7], correspond une branche particulière de l'hyperbole.

2. *Calcul de I.* — Proposons-nous de calculer la valeur de l'intégrale I sur un arc d'extrémale ayant pour origine le sommet de la ligne. Dans la représentation [7] ci-dessus de l'hyperbole, le sommet est le point de paramètre $\varphi = 0$ et de coordonnées $x = \lambda, y = 0$. On a

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 = \lambda^2 (\operatorname{Ch}^2 \varphi + \operatorname{Sh}^2 \varphi) = \lambda^2 \operatorname{Ch} 2\varphi \\ ds^2 &= dx^2 + dy^2 = \lambda^2 (\operatorname{Sh}^2 \varphi + \operatorname{Ch}^2 \varphi) d\varphi^2 = \lambda^2 \operatorname{Ch} 2\varphi d\varphi^2 \\ r ds &= \lambda^2 \operatorname{Ch} 2\varphi d\varphi . \end{aligned}$$

Il vient ainsi immédiatement

$$[9] \quad I = \int_0^\varphi r ds = \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{Sh} 2\varphi = \lambda^2 \operatorname{Sh} \varphi \operatorname{Ch} \varphi = |xy|$$

Ce résultat, applicable à toute extrémale rapportée à ses axes de symétrie, est d'une simplicité inattendue.

3. *Détermination d'une extrémale par deux points.* — Pour que l'on puisse relier deux points A et B par une extrémale de pôle P, il faut que l'on puisse faire passer par ces deux points la même branche d'une hyperbole équilatère de centre P. Pour cela, il est nécessaire et suffisant que les points A et B donnés soient vus du point P sous un certain angle (non nul) et que cet angle soit *aigu*. C'est ce que nous allons démontrer.

Donnons-nous des axes de coordonnées rectangulaires d'origine P. Une hyperbole équilatère de centre P a pour équation

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 = \mu ,$$

et les deux paramètres λ et μ se déterminent uniformément par la condition de faire passer la ligne par les deux points A et B. Menons l'axe des x par le point A, dont soit x_1 l'abscisse. La condition de

passer par A de coordonnées $(x_1, 0)$ entraîne $\mu = x_1^2$; et l'équation de la courbe devient

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 = x_1^2.$$

La condition de passer par B de coordonnées (x_2, y_2) détermine λ , mais sous la réserve que le coefficient, $x_2 y_2$, de λ ne soit pas nul, c'est à dire pourvu que le point B ne soit ni sur l'axe des x ni sur celui des y , autrement dit pourvu que AB ne soit ni en ligne droite avec P ni vu de P sous un angle droit. Dans ces deux cas, λ devient infini et l'hyperbole, ramenée à $xy = 0$, se réduit à ses asymptotes. Excluons ces deux cas.

Les deux points A et B ainsi déterminés appartiennent à la même branche de l'hyperbole ou à deux branches différentes selon qu'ils sont vus du point P sous un angle aigu ou obtus. C'est ce qui résulte immédiatement du fait que les deux branches d'une hyperbole équilatère sont respectivement comprises à l'intérieur de deux angles droits opposés formés par les asymptotes. L'hyperbole passant par A et B ne déterminera donc un arc d'extrémale reliant A et B que si ces deux points sont vus de P sous un angle aigu et cette condition est suffisante pourvu que les trois points P, A, B ne soient pas en ligne droite.

4. *Minima de l'intégrale I.* — On donne le pôle P et les deux points A et B. Il s'agit de mener de A à B la ligne qui minimise l'intégrale

$$I = \int_{AB} r \, ds.$$

Cette intégrale ne peut admettre de maximum, mais elle admet un minimum. Si l'on peut joindre les deux points par un arc d'extrémale, cet arc (qui est unique) réalisera le minimum requis. Telle sera la solution si l'angle APB est aigu.

Si P est sur la droite AB, l'hyperbole dégénère dans ses asymptotes. C'est celle passant par AB qui est l'extrémale; son segment AB minimise l'intégrale, ce qui est évident a priori.

Si l'angle APB est droit, l'hyperbole dégénère encore dans ses deux asymptotes. La ligne minimisante est formée des deux rayons consécutifs AP et PB et ce trajet angulaire passe par P.

Si l'angle APB est obtus, la conclusion est identique. En effet, toute ligne AB ne passant pas par P peut être interceptée par un angle droit de sommet P. On abaisse l'intégrale I sur cette ligne en substituant à l'arc intercepté ab le parcours angulaire $aP + Pb$. Donc la ligne minimisante passe par P. Il est évident qu'entre P et un autre point, la ligne minimisante est le rayon mené de P à ce point, ce qui justifie notre affirmation.

Le cas le plus simple est celui où les deux points A et B sont à la même distance du pôle P. Designons par P l'angle APB. Supposons-le d'abord aigu. Par raison de symétrie, l'axe réel de l'hyperbole qui passe par A et B sera bissectrice de l'angle P et partagera l'arc AB en deux parties symétriques se joignant au sommet. L'intégrale sur chaque moitié aura la même valeur $|xy|$ où x et y sont les coordonnées soit de A soit de B, de mêmes valeurs absolues

$$r \sin \frac{P}{2}, r \cos \frac{P}{2}; \text{ donc}$$

$$[10] \quad I = 2r^2 \sin \frac{P}{2} \cos \frac{P}{2} = r^2 \sin P.$$

Le résultat dans ce cas particulier est donc d'une simplicité digne de remarque: la valeur de I est double de l'aire du triangle APB.

Si l'angle P est droit, on a $I = r^2$. Même résultat si P est obtus, car en ce cas,

$$I = 2 \int_0^r r dr = r^2.$$

5. *Calcul de I dans le cas général.* — Un triangle quelconque APB est déterminé par deux côtés $r_1 = AP$, $r_2 = BP$ et leur angle P. Donc I s'exprime en fonction des trois mêmes éléments.

Nous supposons l'angle P aigu.

Deux cas sont possibles: l'axe de l'hyperbole coupe ou ne coupe pas la base AB du triangle.

Dans le premier cas, cet axe portage l'arc d'extrémale AB en deux parties σ_1 et σ_2 , et I est la somme des intégrales sur chacune des parties. Prenons le pôle P (centre de l'hyperbole) comme origine des axes x, y , et l'axe de la courbe comme axe des x . Nous avons, par la formule [9], en designant par x_1, y_1 et x_2, y_2 les coordonnées de A et de B,

$$I = |x_1 y_1| + |x_2 y_2|$$

Nous convenons que l'axe de x positifs est memé du côté de AB, celui des y positifs du côté de r_1 . Alors x_1, x_2 et y_1 sont positifs, et y_2 est négatif. On a, par conséquent,

$$[11] \quad I = x_1 y_1 - x_2 y_2 .$$

Si l'axe des x ne coupe pas le segment AB, l'arc AB d'extrémale est la différence $\sigma_1 - \sigma_2$ des arcs σ_1 et σ_2 comptés jusque A et jusque B respectivement à partir du sommet. Donc I a pour valeur $|x_1 y_1| - |x_2 y_2|$, mais, cette fois, toutes les coordonnées sont positives et la formule [11] subsiste.

L'axe des x fait avec la rayons r_1 et r_2 des angles α et β que nous considérons, avec un signo, comme les arguments des points A et B en coordonnées polaires. Nous avons donc

$$x_1 = r_1 \cos \alpha, \quad y_1 = r_1 \sin \alpha, \quad x_2 = r_2 \cos \beta, \quad y_2 = r_2 \sin \beta$$

et la relation fondamentale (résultant de nos conventions de signe)

$$P = \alpha - \beta. \quad (\alpha > 0 \text{ et } \alpha > \beta)$$

Substituons dans [11] les valeurs précédentes des coordonnées, il vient

$$[12] \quad I = r_1^2 \sin \alpha \cos \alpha - r_2^2 \sin \beta \cos \beta = \frac{1}{2} [r_1^2 \sin 2\alpha - r_2^2 \sin 2\beta]$$

Il faut éliminer α et β de cette formule.

Avec les axes choisis, l'hyperbole équilatère a pour équation

$$x^2 - y^2 = h^2,$$

où le paramètre h dépend des éléments du triangle APB.

En coordonnées polaires r et θ de pôle P, on a $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, et l'équation de l'hyperbole est en coordonnées polaires

$$r^2 \cos 2\theta = h^2 .$$

Il est à remarquer qu'en vertu de cette equation, θ reste compris entre $\pm \frac{\pi}{4}$ et que, par conséquent, α et β restent compris entre les mêmes limites.

Substituons dans cette équation les coordonnées r_1, α et r_2, β des points A et B, il vient

$$[13] \quad r_1^2 = \frac{h^2}{\cos 2\alpha}, \quad r_2^2 = \frac{h^2}{\cos 2\beta}$$

d'où

$$[14] \quad \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{\cos 2\beta}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos 2(\alpha - P)}{\cos 2\alpha} = \cos 2P + \sin 2P \operatorname{tg} 2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{r_1^2 - r_2^2 \cos 2P}{r_2^2 \sin 2P}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{r_1^2 - r_2^2 \cos 2P}{\sqrt{(r_1^2 \sin 2P)^2 + (r_1^2 - r_2^2 \cos 2P)^2}}$$

Comme les formules [13] et celle $\alpha - \beta = P$ dont nous avons tiré ces deux dernières, sont symétriques en r_1, α d'une part et $r_2, -\beta$ de l'autre, la valeur de $-\sin 2\beta$ se déduit de celle ci-dessus de $\sin 2\alpha$ par la permutation de r_1 et r_2 . On porte ces valeurs de $\sin 2\alpha$ et de $-\sin 2\beta$ dans l'expression [12] de I et l'on obtient l'expression de I en fonction de r_1, r_2 et P. Cette expression est symétrique en r_1 et r_2 et, par conséquent, générale. Elle se prête mal à la discussion, mais c'est celle qui répond à la question.

6. Maxima de l'intégrale minimée sous des restrictions imposées. —

Nous appelons *intégrale minimée* celle qui est effectuée sur une extrémale. Si l'on impose des restrictions à la répartition des points P, A, B, on peut chercher parmi les répartitions permises celle qui maximise l'intégrale.

Voici d'abord une remarque générale.

Si l'on exige que les trois points P, A, B appartiennent à un domaine D simplement connexe, convexe et borné, le maximum de l'intégrale minimée I ne peut être atteint que si les trois points sont sur la frontière du domaine D. En effet, si l'un des deux points A, B est intérieur à D, on augmente l'intégrale I en prolongeant l'extrémale AB jusqu'à la frontière. Si le pôle P est intérieur à D, on l'amène sur la frontière par déplacement d'ensemble du triangle PAB

à l'intérieur de D (supposé convexe), ce qui n'altère pas I , et l'on revient au cas précédent.

Nous allons résoudre quelques problèmes du genre indiqué. Nous considérons d'abord le cas où le domaine assigné est un cercle. Pour le maximum, les sommets du triangle PAB seront donc sur la circonférence.

7. *Premier problème.* — Soit AB une corde, non diamétrale, donnée dans une circonférence Γ de rayon R . On fait varier le pôle P sur la circonférence. On considère l'intégrale I sur l'extrémale AB . On demande comment varie I quand P décrit la circonférence, quelles sont les positions de P qui maximisent ou minimisent I et quelles sont les valeurs extrêmes de I ?

Les points A et B partagent la circonférence Γ en deux arcs AB inégaux. L'angle en P du triangle APB est aigu ou obtus selon que le pôle P se trouve sur le grand arc ou sur le petit. Nous devons distinguer ces deux cas.

1°. — Nous supposons d'abord que le pôle P se trouve sur le grand arc de circonférence AB et que l'angle P est aigu. Cet angle est constant quand P varie sur l'arc considéré.

Portons les valeurs [13] de r_1^2, r_2^2 dans l'expression [12] de I . Rappelons que celle-ci suppose $\alpha > 0$ et $> \beta$ auquel cas $\alpha - \beta = P$. Il vient, avec ces conventions,

$$[15] \quad I = \frac{h^2}{2} (\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\beta) = \frac{h^2 \sin 2P}{2 \cos 2\alpha \cos 2\beta}.$$

Cette dernière expression est symétrique en α, β et indépendante de leurs signes. Elle est donc générale et indépendante des conventions que nous venons de rappeler. Elle est d'une forme remarquablement simple, mais elle dépend de h^2 qui varie avec la disposition du triangle APB dans le cercle Γ . Il faut calculer h^2 .

Dans le triangle APB , les côtés AP et BP sont r_1 et r_2 . Soit a la mesure de sa base AB ; on a

$$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos P = a^2,$$

et, en remplaçant r_1 et r_2 par leurs valeurs [13],

$$h^2 \left[\frac{1}{\cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 2\beta} - \frac{2 \cos P}{\sqrt{\cos 2\alpha \cos 2\beta}} \right] = a^2 .$$

Portons la valeur de h^2 tirée de là dans l'expression [14] ci-dessus de I, nous obtenons

$$I = \frac{a^2 \sin P \cos P}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta - 2 \cos P \sqrt{\cos 2\alpha \cos 2\beta}} .$$

Cette formule est indépendante d'hypothèses particulières sur α et β . Mais reprenons ces hypothèses: $\alpha > 0$ et $\alpha > \beta$, d'où résulte $\alpha - \beta = P$. Posons alors

$$x = \cos 2(\alpha + \beta) ;$$

d'où

$$\cos(\alpha + \beta) = \sqrt{\frac{1+x}{2}} ;$$

nous aurons

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos P \sqrt{\frac{1+x}{2}} ,$$

$$\cos 2\alpha \cos 2\beta = \frac{\cos 2(\alpha + \beta) + \cos 2(\alpha - \beta)}{2} = \frac{\cos 2P + x}{2} .$$

Substituons ces valeurs au dénominateur de la dernière expression de I, nous obtenons

$$I = \frac{\frac{a^2}{2} \sin P}{\sqrt{\frac{1+x}{2}} - \sqrt{\frac{\cos 2P + x}{2}}} = \frac{a^2 \sin P}{1 - \cos 2P} \left[\sqrt{\frac{1+x}{2}} + \sqrt{\frac{\cos 2P + x}{2}} \right]$$

Sous cette dernière forme, il apparaît que I est une fonction croissante de x . Son maximum est atteint pour $\alpha = -\beta$, en même temps que celui de $x = \cos 2(\alpha + \beta)$. Dans ce cas, $r_1 = r_2$ en vertu des formules [13] et le triangle APB est isocèle.

Soit R le rayon de la circonférence Γ ; le triangle inscrit APB étant isocèle, soit r la valeur commune de r et de r_2 ; on a

$$r = 2R \cos \frac{P}{2} .$$

La valeur maximum de I est donnée par la formule [12] où il faut faire $r_1 = r_2 = r$ et $2\alpha = -2\beta = P$. Elle sera

$$I = r^2 \sin P = 4R^2 \sin P \cos^2 \frac{P}{2}.$$

La maximum de I est ainsi exprimé, quelle que soit la corde AB dans le cercle de rayon R , en fonction du seul angle P .

Nous avons placé le pôle P sur le petit arc AB de la circonférence Γ . Si P parcourt cet arc du milieu à l'extrémité, l'intégrale décroît constamment et atteint son *minimum sur l'arc* à l'extrémité de celui-ci. Il est facile de le vérifier. La formule [14] met en évidence que si $\frac{r_1}{r_2}$ croît de 1 à ∞ , 2α croît de $\frac{P}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, l'angle $\alpha + \beta = P - 2\alpha$ varie de 0 à $\frac{\pi}{2} - P$ avec un module croissant, alors $x = \cos 2(P - 2\alpha)$ décroît de 1 à $\cos(\pi - 2P)$.

Si P vient en B , $r_2 = 0$; l'extrémale est la corde AB elle-même (de longueur a), et le minimum de I sur l'arc considéré est

$$[17] \quad I = \frac{a^2}{2} = 2R^2 \sin^2 P.$$

2°. Supposons en second lieu que le pôle que nous désignerons maintenant par P' se trouve sur le petit arc AB de la circonférence Γ . Dans ce cas, l'angle P' du triangle $AP'B$ est obtus. L'intégrale I s'étend aux deux côtés consécutifs r_1 et r_2 , on a

$$I = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}.$$

Soient A, B, P' les angles du triangle ABP' , R le rayon du cercle Γ on a

$$\begin{aligned} A + B + P' &= \pi, & r_1 &= 2R \sin A, & r_2 &= 2R \sin B, \\ I &= 2R^2(\sin^2 A + \sin^2 B) = R^2(2 - \cos 2A - \cos 2B), \\ \cos 2A + \cos 2B &= 2\cos(A+B)\cos(A-B) = -2\cos P'\cos(A-B); \end{aligned}$$

par conséquent,

$$I = 2R^2[1 + \cos P' \cos(A-B)].$$

Comme $\cos P'$ est négatif, I est minimisé pour $A = B$, donc quand le triangle est isoscèle. C'est l'inverse de ce qui a lieu sur le grand arc AB .

Le minimum de I est

$$[18] \quad I = 2R^2(1 + \cos P') = 4R^2 \cos^2 \frac{P'}{2}.$$

Ce minimum est atteint au milieu de l'arc AB de la circonférence, et I augmente avec $|A - B|$ si P' parcourt l'arc du milieu à l'extrémité.

En résumé, si la corde AB n'est pas un diamètre et que le pôle décrive la circonférence, I acquiert ses valeurs extrêmes aux extrémités du diamètre normal à AB , son maximum à la plus grande distance de la corde. Les valeurs de ces extrêmes sont:

$$4R^2 \sin P \cos^2 \frac{P}{2} \text{ (max) , } \quad 4R^2 \sin^2 \frac{P}{2} \text{ (min)}$$

où P est l'angle inscrit dans le grand arc AB de Γ , lequel est le supplémentaire de P' (form. 16 et 18). L'intégrale I n'admet pas d'autre extrême quand P décrit la circonférence.

Dans le cas limite où la corde AB est un diamètre, l'angle P est droit et les valeurs extrêmes de I coïncident. Leur valeur commune est $2R^2 = \frac{a^2}{2}$. Dans ce cas, la valeur de I est invariable, quelle que soit la position du pôle P sur la circonférence Γ .

8. *Second problème.* — Comment situer le pôle P et les deux points A et B sur la circonférence Γ pour maximiser I ?

Nous allons montrer que *la triangle APB doit être équilatéral.*

Il faut d'abord que le triangle ABP soit isoscèle, car, s'il ne l'était pas, on augmenterait I en déplaçant le pôle P le long de Γ jusqu'à le rendre isoscèle et de hauteur maximum. La valeur de I est alors $\sin P \cos^2 \frac{P}{2}$ par la formule [16], ce qui revient à $2 \sin \frac{P}{2} \cos^3 \frac{P}{2}$.

Pour obtenir le maximum de $\sin x \cos^3 x$, il faut annuler sa dérivée, à savoir

$$\cos^4 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) = \cos^2 x (1 - 4 \sin^2 x).$$

Cette expression passe du positif au négatif quand $\sin x$ passe par la valeur $\frac{1}{2}$ ou x par la valeur $\frac{\pi}{6}$. Donc $\sin \frac{P}{2} \cos^3 \frac{P}{2}$ est maximé par la valeur $P = \frac{\pi}{3}$ et le triangle isocèle APB sera, par conséquent, équilatéral.

La valeur maximum de I sera donnée par la formule [16] où $\sin \frac{P}{2} = \frac{1}{2}$ et $\cos \frac{P}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ce sera

$$I = R^2 \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ou, si l'on désigne par h le diamètre du cercle Γ

$$[19] \quad I = h^2 \frac{3\sqrt{3}}{8} < \frac{2}{3} h^2 .$$

9. *Troisième problème.* — Quelle doit être la configuration du triangle APB pour que l'intégrale I soit maximée sous la condition que la longueur de ses côtés ne surpasse pas un nombre assigné h .

Nous prouvons que, comme dans le cas précédent, *le triangle doit être équilatéral*. Supposons d'abord l'angle P aigu. Les points P et B sont alors de part et d'autre du diamètre passant par A.

Le triangle doit être isocèle, car, s'il ne l'était pas on le rendrait isocèle en déplaçant le pôle P sur la circonférence circonscrite, et l'on augmenterait ainsi l'intégrale tout en diminuant le plus grand côté de l'angle P. En effet, si AP est ce plus grand côté, il forme autour de A en s'écartant du diamètre passant par A.

Soit alors r la longueur commune des deux côtés, on a [16]

$$I = r^2 \sin P .$$

La valeur de I est double de l'aire du triangle APB. Le périmètre du triangle ne peut surpasser $3h$. Or de tous les triangles isopérimètres, c'est le régulier qui enferme la plus grande aire. Donc le triangle est équilatéral, ces côtés sont de longueur h , l'angle $P = \frac{\pi}{3}$ et

$$[20] \quad I = h^2 \sin \frac{\pi}{3} = h^2 \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{7}{8} h^2 .$$

Donc P est aigu, car, si P est obtus, on a $I \leq \frac{a^2}{2} \leq \frac{h^2}{2}$ (n. 7, *in fine*).

Remarque. C'est le même problème qui a été rencontré et résolu par M. BALLIEU, mais avec cette différence que l'intégrale I au lieu de se calculer sur l'extrémale entre A et B se calcule sur la côté AB lui-même du triangle. M. BALLIEU a montré que, dans ce cas comme dans le nôtre, c'est le triangle équilatéral qui fournit le maximum de I . Ce maximum est kh^2 avec la valeur

$$k = \frac{4 + 3 \log 3}{8}$$

du coefficient k , supérieure à la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$ à laquelle nous ont conduit nos calculs, mais encore légèrement inférieure à l'unité.

Faisons encore, en passant, la remarque suivante :

Si l'on se posait le deuxième problème, celui où triangle APB est inscrit dans une circonférence, en définissant I comme le fait M. BALLIEU, le maximum de I ne serait plus donné par le triangle équilatéral, mais par un triangle dont l'angle P serait légèrement plus ouvert. Ce n'est pas ici le lieu d'en faire la démonstration.

10. *Points en ligne droite.* — Le troisième problème devient particulièrement simple si les trois points P, A, B sont sur un segment rectiligne de longueur h . L'extrémale est la portion AB de ce segment, et le maximum de I exige que A et B soient aux extrémités de ce même segment. Alors P aussi est l'une d'elles, car si P partage h en deux segments p et $q = h - p$, on ce

$$I = \int_0^p + \int_0^q r \, dr = \frac{p^2 + q^2}{2} = \frac{h^2 - 2pq}{2} < \frac{h^2}{2}$$

et cette borne est atteinte pour $p = h, q = 0$. La valeur maximum de I est

$$I = kh^2, \quad k = \frac{1}{2}.$$

C'est la plus petite valeur que puisse recevoir le coefficient k . Comme l'extrémale est rectiligne, notre définition de I devient identique, en ce cas, à celle de M. BALLIEU.

Ce cas se présente, en particulier, si les points P, A, B sont réels.

§ 3. — APPLICATION A LA DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME D'UNICITÉ POUR L'INTÉGRALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE.

11. — *Évaluation préliminaire d'une suite de dérivées.* — La démonstration du théorème d'unicité que nous avons en vue exige, au préalable, certaines évaluations qui font appel aux résultats obtenus dans le paragraphe précédent. Voici le problème :

Soit D un domaine, à contour simple et convexe, de diamètre h . Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans ce domaine. On suppose que cette fonction et sa dérivée s'annulent chacune en un point correspondant de D . Sachant que le module de la dérivée seconde $f''(z)$ admet une borne supérieure u dans D , il s'agit d'en déduire des bornes correspondantes pour les modules de f' et de f dans D .

Supposons que f' s'annule au point P , et soit r la distance du point z au point P . Comme on peut intégrer en ligne droite dans D (supposé convexe), on a

$$f'(z) = \int_P^z f''(z) dz, \quad |f'(z)| \leq ur \leq uh.$$

Supposons ensuite que $f(z)$ s'annule au point A ; on aura, ou point $z = B$ de D ,

$$f(B) = \int_A^B f'(z) dz, \quad |f(B)| \leq uI, \quad I = \int_A^B r ds.$$

L'intégrale de f' , supposée holomorphe, est indépendante du chemin suivi entre A et B dans D . Nous pouvons choisir comme chemin l'extrémale de I , car, l'hyperbole tournant sa convexité vers les centre, est intérieure au triangle APB et à D . Ainsi, nous pouvons

attribuer à I les bornes assignées dans le paragraphe précédent et nous avons, par la formule [19],

$$|f(B)| \leq uI, \quad |f(B)| \leq ukh^2, \quad k = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{7}{8}.$$

Si le domaine D est circulaire, $k = \frac{3\sqrt{3}}{8} < \frac{2}{3}$.

Nous allons étendre le résultat précédent.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le domaine D, connexe, convexe et de diamètre h . On suppose que $f(z)$ et ses $n-1$ premières dérivées s'annulent chacune en un point du domaine. Soit u la borne supérieure du module de la dérivée $n^{\text{ième}}$ dans D. Rangeons par ordre décroissant les dérivées successives de f et terminons par f ; nous formons la suite

$$f^{(n)}, f^{(n-1)}, f^{(n-2)}, f^{(n-3)}, f^{(n-4)}, f^{(n-5)}, \dots$$

Ces dérivées admettent respectivement comme borne de leur module dans D le terme de même rang de la suite récurrente

$$[1] \quad u \cdot 1, u \cdot h, u \cdot hk^2, u \cdot kh^3, uk^2h^4, uk^2h^5, \dots$$

où les trois premiers termes sont donnés par le calcul précédent et où chacun des suivants s'obtient, par le même calcul, en multipliant l'avant-précédent par kh^2 .

Selon que D est quelconque ou à contour circulaire, on fait

$$k = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{7}{8} \quad \text{ou} \quad k = \frac{3\sqrt{3}}{8} < \frac{2}{3}.$$

Si u était nul, tous les termes de la suite [1] seraient nuls et, comme f a son module borné par le dernier terme, f serait identiquement nul.

12. *Théorème d'unicité de M. Ballieu.* — Ce théorème d'unicité concerne l'intégrale d'une équation linéaire. Nous apportons seulement à l'énoncé de M. BALLIEU un supplément de précision. Aux évaluations près, notre démonstration est la même que la sienne.

Nous considérons d'abord l'équation différentielle linéaire homogène

$$[2] \quad \frac{d^n y}{dx^n} + \chi_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \chi_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + \chi_n y = 0,$$

dans les coefficients $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ sont holomorphes dans un domaine D à contour convexe. Voici le théorème: *Une solution $y = f(x)$ de l'équation qui s'annule et dont les $n - 1$ premières dérivées s'annulent aussi dans le domaine D , sera identiquement nulle, à moins que le diamètre h de D ne surpasse la plus petite racine positive h de l'équation*

$$[3] \quad 1 = M_1 h + M_2 k h^2 + M_3 k h^3 + M_4 k^2 h^4 + \dots + M_n k^{\left[\frac{n}{2}\right]} h^n,$$

où M_1, M_2, \dots, M_n sont les bornes supérieures dans D des modules de $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ et où $\left[\frac{n}{2}\right]$, dernier exposant de k , est le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$.

Selon que le domaine D est circulaire ou non, le coefficient k reçoit l'une des valeurs $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ou $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La démonstration est immédiate.

Si $u = 0$, le théorème est démontré par les dernières lignes du n° précédent. Nous supposons donc u différent de zéro.

Le module maximum u du premier terme de l'équation [2] est atteint en un point du domaine D et par conséquent, ne peut être supérieur à la somme des modules maximisés de tous les autres. Si nous multiplions par u tous les termes de l'équation [3], nous obtenons au premier membre le module maximum du premier terme de l'équation [2], et dans le second, la somme des modules maximisés de tous les autres. Supprimons le facteur commun u , le premier membre, 1, de l'équation [3] ne peut surpasser le second membre, d'où le théorème énoncé. C'est sur ce même principe que nous nous étions appuyés dans notre article cité des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* et dans un article du *Journal de Mathématiques pures et appliquées: Sur la détermination d'une intégrale par des valeurs assignées* (1929).

Sans rien changer aux hypothèses concernant le premier membre, considérons maintenant l'équation avec second membre

$$[4] \quad \frac{d^n y}{dx^n} + \lambda_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + \lambda_n y = \lambda.$$

Si cette équation admet deux solutions, leur différence est une solution de l'équation [2] sans second membre. Le théorème d'unicité précédent leur est applicable et peut s'énoncer cette fois sous la forme suivante:

Une solution de l'équation [4] (avec ou sans second membre) est complètement déterminée dans un domaine d'holomorphie Δ des coefficients, par les valeurs que prennent cette solution $f(x)$ et ses $n - 1$ premières dérivées en n points qui leur sont respectivement assignés dans un domaine D contenu dans Δ , convexe et de diamètre h , pourvu que h ne dépasse pas la plus petite racine positive de l'équation [3]. Selon que le domaine D est circulaire ou non, le coefficient k reçoit, dans cette équation, la valeur $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ou la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

RACCOLTE FAUNISTICHE COMPIUTE NEL GARGANO
DA A. GHIGI E F. P. POMINI

III. - MIRIAPODI (*)

PAOLA MANFREDI

SUMMARIVM. — Recesentur ac describuntur Myriapodes regionis Garganae et insularum Diomedearum, inter quos unum genus, una species et tres varietates nova sunt; addit Auctrix quaedam de vi endemismorum in regione Gargana.

Della fauna miriapodologica del Gargano e delle Isole Tremiti pochissimo si sa.

Il VERHOEFF, autore di numerosi studi sui Miriapodi italiani, da lui stesso raccolti nelle sue ripetute accuratissime esplorazioni faunistiche, non si è mai spinto sino alla penisola garganica; e dei Miriapodi di questa regione fa parola in due soli lavori (VERHOEFF 9 e 10), avendo avuto in esame un po' di materiale raccolto dal Dott. Storkán sul Gargano. In detti lavori sono elencate le seguenti specie:

- Glomeris pulchra garganensis* Verh.
- Brachyiulus (Italoiulus) garganensis* Verh.
- Pachyiulus cassinensis aternanus* Verh.
- Schizophyllum sabulosum* L.
- Cryptops garganensis* Verh.
- Lithobius peregrinus* Latz.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi nella riunione privata del 13 gennaio 1947.

In diverse pubblicazioni, l'ATTEMS (1, 2, 3) cita incidentalmente, pure per il Gargano, le seguenti specie:

- Ophiulus italianus* Att.
- Chromatoiulus margaritatus* Fanz.
- Glomeris pulchra craspeda* Att.
- Brachydesmus proximus italicus* Att.
- » *perfidus* Att.
- Schizophyllum sabulosum bilineatum* Verh.
- » » *interruptus* Att.
- » » *extinctus* Latz.
- Pachyiulus flavipes* Koch.
- » *oenologus* Berl.

Per le Tremiti, il CECCONI (4) cita:

- Pachyiulus fuscipes* Koch
- P. communis* Savi (= *P. flavipes* Koch?)
- Brachydesmus superbus* Latz.
- Geophilus flavidus* Koch (= *Olinopodes flavidus* Koch)
- Dignathodon microcephalum* Luc.
- Chaetechelyne vesuviana* Newp.
- Stigmatogaster gracilis* Mein.
- Himantharium gabrielis* L.
- Cryptops anomalans* Newp.
- Cr. hortensis* Leach
- Scolopendra cingulata* Latz.
- Sc. dalmatica* Koch
- Lithobius peregrinus* Latz.
- L. mutabilis* Koch
- Scutigera coleoptrata* L.

Della presente collezione, io già descrissi (MANFREDI 7) i sottoelen-
cati generi, specie e sottospecie nuove:

- Eroonsoma Pominii* mihi
- Cylindroiulus molisius umbrae* mihi
- Brachyiulus cassinensis garganensis* mihi
- Polybothrus Fredericii* mihi
- Lithobius jonicus Ghigii* mihi.

Affinchè questa nota rappresenti uno studio completo dei Miriapodi del Gargano, accanto all'elenco delle specie contenute nella collezione, ripeterò le diagnosi delle forme nuove. Per quanto riguarda le località di cattura e relativa data, ne dò qui l'elenco, onde evitare di ripetere ogni volta la data di raccolta; solo per le stazioni che furono visitate in due tempi, metterò, fra parentesi, il numero (IX), se la cattura si riferisce al settembre 1940; o (1934) se la cattura fu eseguita dal Prof. Ghigi in quell'anno.

Le località esplorate dal Prof. Ghigi nel 1934, dal 1° al 17 agosto, sono: Valle Carbonara, Foresta Umbra, Monte S. Angelo, Varano, Mattinata, Grotta Campana; quelle visitate dal Dott. Pomini, sono: Mattinata, Bosco Ginestra, Foresta Umbra, Alveo S. Egidio, Cagnano Varano, S. Nicandro, S. Menaio, Isola di Varano, dal 12 al 27 aprile 1940, ed ancora Bosco Ginestra, Foresta Umbra e Fonte Sfilze, nel settembre dello stesso anno. Le Isole Tremiti furono esplorate dal Pomini nell'aprile 1940; S. Domino, S. Nicola, il 16 aprile, Caperara il 16 e il 17 dello stesso mese (¹).

DIPLOPODI

Glomeris pulchra garganensis Verh.; Monte S. Angelo, 4 es.; Cagnano Varano, 9 es.; S. Nicandro, 1 es.; S. Domino, 25 es.; S. Nicola, 9 es.; Caperara, 2 es.

I *typi* del Verhoeff erano stati raccolti al Monte S. Angelo; gli esemplari da me esaminati sono tutti alquanto più scuri di quanto risulti dalla descrizione del Verhoeff.

Brachydesmus sp. (forse *proximus italicus* Att.?); Bosco Ginestra 1 maschio giovane.

(¹) Devo far presente che lo studio della collezione era ancora in corso quando l'Acquario di Milano, colpito da numerose bombe incendiarie, durante l'incursione del 13 agosto 1943 fu preda delle fiamme; una parte della collezione del Gargano, che per necessità di revisione avevo ancora in esame, e che perciò non era stata messa al sicuro nel rifugio, andò distrutta. Si trattava di un numero relativamente esiguo di preparati; ma fra di essi si trovavano purtroppo i preparati microscopici dell'unico maschio di *Isobates adriaticus*, e di *Eroosoma Pomini* (*typus*), nonchè altri esemplari, dei quali farò cenno come di specie incerte.

Eroonsoma Pomini mihi; Bosco Ginestra 1 ♂ e 5 ♀.

Colore giallino pallido; lunghezza ♂ mm. 10,5; ♀ mm. 11; larghezza mm. 1,5. Il capo è coperto di brevi setole folte, nella parte anteriore e sul vertice. Antenne lunghe; il 3° articolo è il più lungo; il 4° e il 5° sono uguali; il 6° è poco più lungo del precedente ed è il più grosso; i bastoncelli sensori sono riuniti in una larga depressione; l'8° articolo è appena visibile (fig. 1).



FIG. 1. — *Eroonsoma Pomini* mihi
Antenna

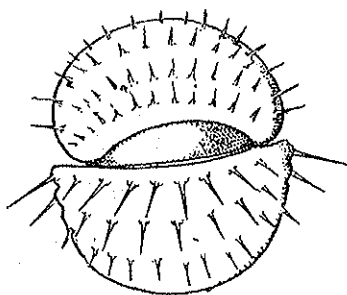


FIG. 2. — *Eroonsoma Pomini* mihi
Collo e 2° tergite

Il collo è adorno di 4 file trasverse di tubercoli con setole; i lati sono arrotondati (fig. 2). Il 2° tergite porta 3 file di tubercoli setolosi; il 3° ne porta 4; i successivi, 4, 5, 6, o 7 file. Le carene laterali sono appena accennate sul 2° somite, in forma di lamelle, sporgenti all'inanzi e sfuggenti all'indietro, con due lunghe setole marginali; pure su questo somite sono accennate deboli carene pleurali. Dal 3° al 18° tergite si riconosce un debole solco trasverso.

La superficie dei tergiti è finemente reticolata.

Coda breve e conica.

♂: zampe con setole lunghe e rade; il prefemore del 3°-8° paio è lungo, claviforme, molto assottigliato nella parte basale, senza ghiandole nè altri contrassegni (fig. 3).

Sternite 5° con una piccolissima lamella a margine arrotondato fra le zampe anteriori.

Apertura gonopodiale ovale; coxe dei gonopodi corte e tondeggianti, lassamente unite, con poche setole; prefemore e femore non sono distinti; nel tibiotalso laminare, alquanto incavato a cucchiaio, decorre il condotto seminale, che sbocca in un brevissimo cono marginale (fig. 4).

Per i caratteri del genere *Eroonsoma*, vedasi il lavoro sopracitato (MANFREDI 7).

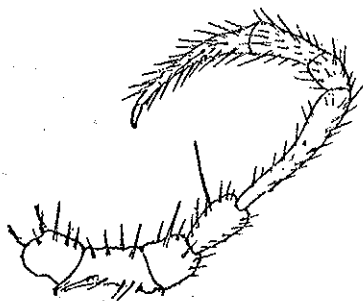


FIG. 3. — *Eroonsoma Pomintii mihi*
Maschio. Zampa del 3° paio

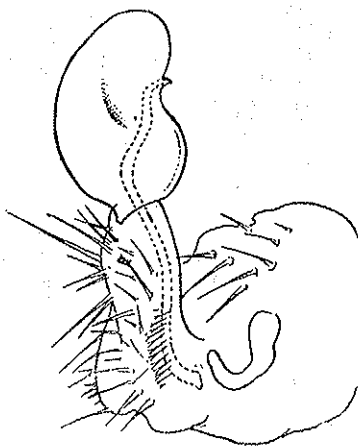


FIG. 4. — *Eroonsoma Pomintii mihi*
Maschio. Gonopodio

Entothalassinum italicum denticulatum Att.; Caperara, 1 ♂.

Questa sottospecie, istituita dall'Attems su materiale del litorale croatico, era già stata raccolta dal Dott. Anelli nella grotta di Putignano, nelle Murge. (MANFREDI 6).

Strongilosomidae, gen. e sp. indeterminate, Foresta Umbra e Bosco Ginestra, alcune ♀♀.

Isobates (Thalasssobates) adriaticus Verh.; Grotta Campaia, 1 ♂ e 2 ♀.

La specie fu descritta dal VERHOEFF (8) su materiale raccolto nella Baia di Buccari, fra grosse pietre situate sotto il livello dell'alta marea. Non conosco le condizioni in cui fu raccolto il presente materiale; comunque, la sua appartenenza alla specie suddetta è certa; l'unica

differenza — veramente di pochissimo conto — sta nella forma delle appendici accessorie dei gonopodi posteriori, che sono alquanto complesse e laciniate (fig. 5). A quanto mi consta, dopo la descrizione del tipo, questo è il primo reperto della specie.

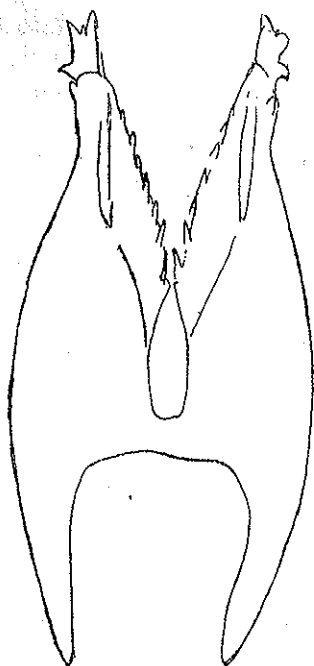


FIG. 5. — *Isobates adriaticus* Verh.
Maschio. Gonopodi posteriori.

Cylindroiulus molisius umbrae mihi; Foresta Umbra, (1934) 1 ♂, (1940) 1 ♂ e 2 ♀.

Colore chiarissimo, su cui spiccano testa e collo marmoreggiati di bruno; fascia interoculare scura; ocelli numerosi, poco rilevati; antenne mediocri.

♂ lunghezza mm. 24; 85 paia di zampe;
♀ mm. 26; 87 paia di zampe.

La striatura dei metazoniti è normale, eguale in ♂ e ♀; i somiti chiarissimi sono anellati di grigio, un po' più scuro al di sopra della linea dei fianchi. I pori repugnatori, debolmente tinti di bruno, sono a contatto con la linea di sutura, che è incavata.

♂: il 2° paio di zampe è provvisto di cuscinetti finemente striati; lo sbocco della ghiandola è situato nel centro dell'anca (fig. 6). Il margine ventrale del 7° pleurotergite (fig. 7) somiglia a quello di *C. pe-latensis* Verh.

Il processo anale è triangolare, corto; la punta non sporge oltre il margine delle valve anali. Processo preanale mediocre, appuntito.

Dalla specie del Verhoeff, la presente subspecie differisce nei gonopodi per i seguenti caratteri:

il promerite è alquanto più stretto alla base; l'angolo *e*, anziché retto, è acuto, e sull'angolo *a* si trovano due o tre dentini (fig. 8); il coxite è di forma notevolmente diversa, e mancante del dente *z*. Brachite e solenomerite somigliano molto a quelli della specie genuina, senza tuttavia identificarsi con essa, sia per la diversa posizione dell'orlo ispessito del brachite — che è nettamente marginale — sia per la forma del solenomerite, il cui apice è finemente striato.

La specie descritta dal Verhoeff su di un ♂ raccolto a Pescosciancio (Molise) non fu ancora ritrovata altrove; sembra dunque trattarsi di specie rara; e tale dev'essere anche la presente varietà, che, tanto dal prof. Ghigi, come dal dott. Pomini fu raccolta in un'unica località, ed in piccolo numero di esemplari.

Leptoiulus trilineatus Koch; Cagnano Varano, 1 ♂ e 1 ♀; Bosco Ginestra 2 ♂, 1 ♀ e 1 giovane.

Specie largamente diffusa nella regione mediterranea orientale.

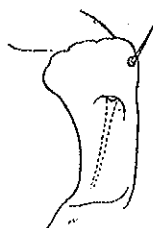


FIG. 6. — *Cyldroiulus molistius umbrae mihi*
Maschio. Anca del 2° paio di zampe

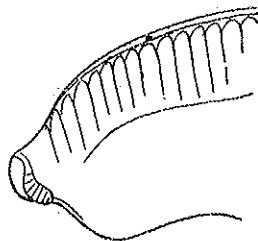


FIG. 7. — *Cyldroiulus molistius umbrae mihi*
Maschio. Margine del 7° pleurotergite

Ophiulus germanicus Verh.; Foresta Umbra (1934) 1 ♂; (1940), 4 ♀, alcuni giovani e larve.

È diffuso in tutta l'Italia.

Pachyiulus flavipes Koch; Foresta Umbra (1934) 1 ♂ e 3 ♀; Varano (1934) 1 ♀, (1940) 2 ♂ e 4 ♀; S. Nicola, 1 ♂ e 9 ♀; S. Domino, 1 ♂ e 8 ♀.

Specie a larghissima diffusione.

Pachyiulus cassinensis garganensis mihi; Monte S. Angelo 5 ♂, 3 ♀, 6 giovani; Mattinata (1934) 1 ♀; Varano (1934) 1 ♂ e 1 ♀; Cagnano Varano, 1 ♂, 1 ♀; S. Nicandro, 3 ♂, 1 ♀; Isola di Varano, 2 ♀; Alveo S. Egidio, 2 ♂, 4 ♀; S. Nicola, 5 ♂, 6 ♀; S. Domino, 6 ♂, 7 ♀; Caperara, 1 ♂, 4 ♀, 3 giovani.

La nuova sottospecie concorda con la specie per la mancanza dei cuscinetti tarsali, per il colore e la striatura dei metazoniti, il numero dei somiti e delle zampe, la posizione dei fori repugnatori; mentre ne

differisce per la forma dei gonopodi, in cui il promerite (fig. 9) somiglia a quello della subsp. *aternanus*, ma il mesomerite ne differisce notevolmente (fig. 10); il pseudoflagello è cortissimo; la lamina frangiata è più lunga del mesomerite; il lembo della sottile lamella sporgente al lato posteriore del telopodite è finemente frangiato. Nel promerite, il gruppetto di setole nel centro della faccia posteriore è coperto, alla base, dalla sottile lamella sporgente.

È questo l'unico *Diplopodo* abbondante e diffuso nella regione.

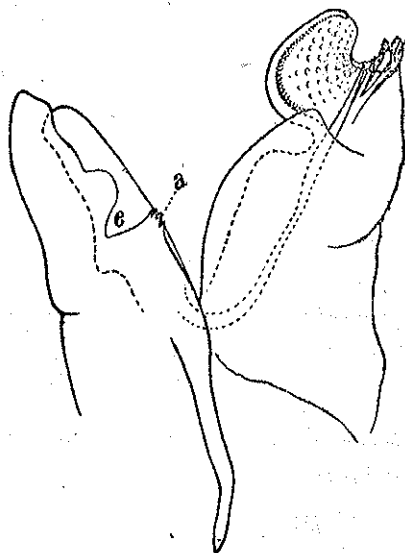


FIG. 8. — *Cylindroiulus molistius umbrae mihi*
Maschio. Gonopodi

Chromatoiulus margaritatus Fanz.; 1 ♀ a S. Menaio.

Specie poco comune, già segnalata per il Gargano.

Schizophyllum sabulosum bilineatum Verh.; Bosco Ginestra, 5 ♀;
Fonte Sfilze, 1 ♀.

È strano che questa specie, diffusissima, e già nota per il Gargano, sia così scarsa nella nostra collezione.

Iulus sp.; Fonte Sfilze, 1 giovane; Foresta Umbra (1934) 3 ♀, (1940) 2 ♀, non riferibili a nessuna delle specie sopraelencate, nè delle altre già note per il Gargano; rimaste indeterminate.

CHILOPODI

Himantarium gabrielis L.; S. Domino, 2 esemplari.

Sembra veramente strano che questa specie, diffusissima e vistosa, manchi nelle raccolte del Gargano e sia rappresentata in numero così esiguo in una sola stazione delle Tremiti.

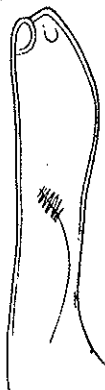


FIG. 9. — *Pachytulus cassinensis garganensis mihi*
Maschio. Promorito



FIG. 10. — *Pachytulus cassinensis garganensis mihi*
Maschio. Meso- e opistomerito

Stigmatogaster gracilis gracilis Mein.; Monte S. Angelo 1 esemplare.

Anche questa è specie diffusissima nell'Italia centrale, e la sua rarità nella presente raccolta appare strana.

Clinopodes flavidus noduliger Verh.; Foresta Umbra (1934 e 1940) 5 esemplari; Bosco Ginestra, 1 esemplare; Alveo S. Egidio, 1 esemplare; S. Domino, 3 esemplari; S. Nicola 3 esemplari; Caperara, 2 esemplari.

Devo segnalare che tutti gli esemplari suddetti differiscono dalla razza del Verhoeff — che, a detta dell'Autore, è la più diffusa in Italia — per i seguenti caratteri: il campo poroso, intero e triangolare sui 5 ultimi sterniti, sul sestultimo è per lo più intero e ovale; ma talvolta appare diviso in due campi distinti; sul septultimo ster-

nite è sempre diviso in due campi. La vescicola della ghiandola venenifera nei piemascelle è due volte e mezzo più lunga che larga.

Un altro esemplare dello stesso genere, ma non della razza *noduliger* (proveniente da S. Domino) è andato perduto prima che avessi potuto effettuarne la determinazione.

Chaetechelyne vesuviana Nwp.; S. Nicandro e S. Domino, 1 esemplare.

Specie diffusissima nella regione mediterranea.

Pachymerium ferrugineum Koch.; S. Menaio, 1 esemplare.

Comune in tutta l'Europa.

Scolopendra cingulata Latr.; Cagnano Varano, 6 adulti e 1 giovane; S. Nicandro, 6 adulti e 1 giovane; Alveo S. Egidio, 11 esemplari; Bosco Ginestra, 2 esemplari; S. Domino, 5 esemplari.

È specie diffusa in tutta l'Italia a sud di S. Marino e dell'Arno.

Scolopendra dalmatica Koch.; Mattinata, alcuni esemplari (perduti nell'incendio); S. Domino 5 adulti e 1 giovane.

Dalla specie del Koch, questi esemplari differiscono lievemente, per i seguenti caratteri: l'orlo laterale dei tergiti esiste solamente sul 20° e 21° tergite; la spina angolare del prefemore delle zampe terminali presenta solo due o tre punte.

Specie comune sul litorale orientale dell'Adriatico (Istria, Dalmazia, Albania, Montenegro) già nota anche per la Calabria (MANFREDI 5) nonchè per la Sardegna.

Cryptops hortensis Leach; Bosco Ginestra 4 esemplari; Foresta Umbra 5 esemplari.

È specie largamente diffusa nelle località montuose e boschive dell'Appennino.

Cryptops sp.; Valle Carbonara, 1 esemplare.

Non ho potuto giungere ad una sicura determinazione specifica, perchè l'unico esemplare manca delle zampe del 21° paio. La lunghezza delle antenne, la forma e la lunghezza dei loro articoli, la presenza di solchi cefalici completi, la forma e lunghezza delle ghan-

dole velenifere forcipulari, la disposizione delle ghiandole coxopleurali dell'ultimo somite, concordano con quelle di *Cr. umbricus* Verh.; però ai solchi del 1° tergite se ne aggiunge uno longitudinale (fig. 11) che manca in *Cr. umbricus* e nell'affine *Cr. anomalans*. Dal *Cr. garganensis* Verh. poi differisce nettamente per avere solchi completi sul capo, per la forma dei solchi del 1° tergite, per il 10° articolo delle antenne 1 $\frac{2}{3}$ volte più lungo che largo, per i pori coxopleurali numerosi, che rimangono molto lontani dai margini superiore, posteriore e inferiore.

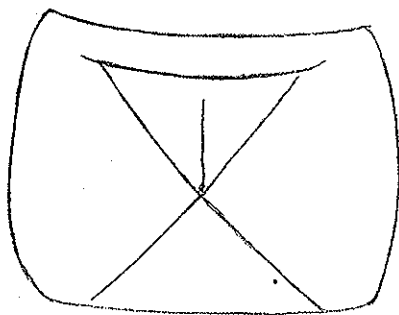


FIG. 11. — *Cryptops* sp.
1° tergite

Lithobius erythrocephalus genuinus Koch.; Mattinata, 1 ♀; S. Nicandro, 2 ♀; Foresta Umbra, 2 ♂, 2 ♀ e alcuni giovani; Bosco Ginestra, 1 ♂; Fonte Sfilze 1 ♂; S. Domino 7 ♂ e 3 ♀; S. Nicola 9 ♂ e 1 ♀; Caperara 6 ♂ e 2 ♀.

È il solo *Lithobius* diffuso e abbondante sul Gargano, e nelle Isole Tremiti; è comunissimo nell'Italia centro-orientale.

Lithobius piceus peregrinus Latz.; Foresta Umbra (1934 e 1940) 9 ♂ e 4 ♀; Bosco Ginestra (IV e IX 1940), 4 ♂ e 7 ♀; S. Domino, 1 ♂.

Diffuso in tutti i paesi adriatici.

Lithobius (Pleuro lithobius) jonicus Ghigii mihi; Mattinata, 2 ♂ e 3 ♀; Alveo S. Egidio 1 ♂.

I caratteri della subspecie sono:

♂ lunghezza mm. 16; ♀ mm. 15.

Colore bruno, con estremo anteriore e posteriore alquanto più oscuri.

Antenne di 36-40 articoli; ocelli 4 (2+1+1) per parte: organo di Tömösvary grande quanto uno degli ocelli minori.

Pori coxali 5, 4, 4, 4, oppure 4, 4, 4, 3.

Le zampe sono alquanto più ricche di spine nelle femmine che nei maschi. La tabella seguente si riferisce ad un maschio. Nel 15° paio del ♂, la tibia, lievemente conica, è un poco ispessita verso

l'interno, ma non presenta alcun processo noduliforme. L'unghia terminale è doppia.

V.	H	tr	P	F	T	D	H	tr	P	F	T
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	a	a
2	—	—	—	—	m	—	—	—	—	a	a
3	—	—	—	—	m	—	—	—	—	a	a
4	—	—	—	m	m	—	—	—	—	ap	a
5	—	—	—	am	m	—	—	—	—	ap	ap
6	—	—	—	am	am	—	—	—	—	ap	ap
7	—	—	m	am	am	—	—	—	—	ap	ap
8	—	—	m	am	am	—	—	—	—	ap	ap
9	—	—	m	am	am	—	—	—	—	ap	ap
10	—	—	m	am	am	—	—	p	p	p	ap
11	—	—	mp	am	am	—	—	mp	p	p	ap
12	—	m	mp	am	am	—	—	mp	p	p	p
13	—	m	mp	am	am	—	—	mp	p	p	—
14	—	m	mp	m	—	—	—	mp	p	p	—
15	—	m	m	m	—	—	—	mp	—	—	—

Il 15° tergite del ♂ differisce per la forma tanto dalla subspecie *buchneri* come dalla subspecie *porosus*, giacchè non presenta intaccatura lungo il margine laterale, alla base dei prolungamenti posteriori, benchè vi si riconosca una breve lista ispessita come in *porosus*. Lungo il margine interno, i prolungamenti si continuano col margine posteriore del tergite senza formare angolo. I finissimi pori sono poco più numerosi che in *buchneri*, e, come in questo, non raggiungono il margine anteriore del segmento (fig. 12).

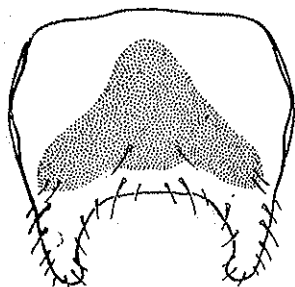


FIG. 12. — *Lithobius jonicus*
Ghiggi mihi
Maschio. 15° tergite

Lithobius sp.; Foresta Umbra, Monte S. Angelo, Bosco Ginestra, Cagnano Varano, S. Nicola; vari esemplari mutilati o immaturi, indeterminabili.

Polybothrus elongatus genuinus Nwp.; Cagnano Varano 1 ♂ e 1 ♀.

Specie a larga diffusione.

Polybothrus (*Parapolybothrus*) *Fredericii* mihi; Bosco Ginestra, 2 ♂; Fonte Sfilze, 1 ♂; Foresta Umbra, 1 ♀ e 1 ♂ giovane.

Lunghezza mm. 22-23; colore castano vivo; capo finemente punteggiato; tutto il corpo molto peloso; tergiti lucentissimi, con punteggiature rade. Tergiti 6, 7, 9, 11, 13 con prolungamenti triangolari; quelli dei tergiti 6 e 7 un po' più corti e larghi dei seguenti; tergite 15 del ♂ profondamente incavato al margine posteriore.

Ocelli 20 per lato (1 + 19); l'organo di Tömösvary è orlato di scuro e grande quanto uno dei minori ocelli. Antenne di 57-60-66 articoli (in un individuo, 58 da un lato e 66 dall'altro); gli articoli 5-10 sono circa $1\frac{1}{2}$ o due volte più larghi che lunghi. L'unghia della 2ª mascella è divisa in varie punte, una delle quali più lunga e acuta delle altre.

Coxosterno dei piemascelle con 8 + 8 denti robusti.

Pori coxali rotondi in 3-4 file, all'interna delle quali spettano i pori più grandi; nelle coxe 12, 13, 14 il poro posteriore della fila interna è alquanto ovale.

Spinulazione delle zampe: 1° paio $\frac{3\ 2\ 1}{3\ 3\ 3}$; 2° paio $\frac{3\ 2\ 2}{3\ 3\ 3}$; 14° paio $\frac{1\ 0\ 3\ 1\ 1}{0\ 1\ 3\ 3\ 1}$; senza spina coxolaterale, con unghia terminale molto grossa, provvista di robusta unghia accessoria; 15° paio $\frac{1\ 0\ 3\ 4\ 1\ 0}{0\ 1\ 3\ 3\ 1}$; con spina coxolaterale; unghia terminale semplice. Le anche dall'8° al 15° paio portano dorsalmente una spina.

Nelle zampe del 15° paio i prefemori sono debolmente clavati, senza solchi dorsali; ad $\frac{1}{3}$ circa dalla base, il margine interno appare lievemente rigonfio, senza ciuffi pelosi; all'estremo distale presenta appena un accenno di sporgenza, mancante di peli e di pori. Non si notano solchi dorsali sulle zampe del 15° paio; sul femore del paio 14° si osserva un solco debolissimo.

I genopodi del ♂ sono molto brevi, nettamente biarticolati, con molte setole.

Il ♂ giovane è lungo mm. 17; molto peloso, con antenne di 46 articoli; 6 + 6 denti al coxosterno; tergiti come l'adulto, il 15° fortemente incavato al margine posteriore. DH dal 10° al 15°; zampe 14 e 15 senza contrassegni; gonopodi brevi, uniarticolati.

La ♀ è lunga mm. 20; molto pelosa; antenne di 60 articoli; occhi 1 + 17; denti 8-1 + 1-8; colore castano; spine delle zampe come il ♂; DH dal 10° al 15° paio. Genitali con 2 + 2 sproni cilindrici ottusi e unghia lunga semplice.

La nuova specie è molto vicina a *Polybothrus herzegowinensis* Verh. e *P. electrinus* Verh.

Scutigera coleoptrata L.; Monte S. Angelo, Mattinata, Caprarola, 1 esemplare.

* * *

Il contributo che questa collezione arreca alle nostre conoscenze sulla fauna del Gargano e delle Isole Tremiti è veramente notevole: oltre ad alcune specie e sottospecie nuove, ben 8 delle forme sopraelencate non erano state osservate dai precedenti autori (mentre 19 delle specie e sottospecie da essi elencate mancano nella presente raccolta).

Mi sembra utile considerare dapprima separatamente la fauna del Gargano e quella delle Tremiti. Sul Gargano una buona parte dei Miriapodi appartiene a specie a larga diffusione (talì *Leptoiulus trilineatus*, *Ophiulus germanicus*, *Pachyiulus flavipes*, *Schizophyllum sabulosum*, tutti i *Geophilomorpha*, *Scolopendra cingulata*, *Cryptops hortensis*, *Lithobius erythrocephalus*, *L. piceus peregrinus*, *Polybothrus elongatus*, e *Scutigera coleoptrata*); ma — salvo *Scolopendra cingulata*, *Clinopodes flavidus*, e *Lithobius erythrocephalus* — non sono così diffusi nè così abbondanti come sarebbe lecito attendersi.

Come si poteva prevedere, parecchie (dodici) sono le forme che il Gargano ha in comune con il litorale dalmata-croato, fra cui notevoli *Isobates adriaticus* e *Scolopendra dalmatica*.

Le 12 specie e sottospecie endemiche (*Glomeris pulchra craspeda*, *Gl. pulchra garganensis*, *Brachydesmus perfidus*, *Eroonsoma Pominii*, *Ophiulus italianus*, *Brachyiulus garganensis*, *Cylindroiulus molisius umbrae*, *Pachyiulus cassinensis garganensis*, *Polybothrus Fredericii*, *Lithobius jonicus Ghigii*, *Cryptops garganensis* e *Cr. sp.*) rappresentano il 34,9 % della fauna garganica. Di questi 12 endemismi, 8 spettano ai Diplopodi — i quali ammontano in totale a 21 — sicchè, per questo gruppo, la percentuale sale a 38 %; i Chilopodi endemici sono 4, su 15 forme presenti, ossia 26,6 %.

Le Isole Tremiti, mancanti di boschi, e coperte quasi per intero di terreni coltivati, non offrono stazioni molto propizie ai Miriapodi; nessuna meraviglia quindi se la fauna è piuttosto scarsa; vi troviamo in totale 19 specie di cui 12 in comune col vicino promontorio (*Glo-*

meris pulchra garganensis, *Pachyiulus cassinensis garganensis*, *Pach. flavipes*, *Scolopendra cingulata*, *Sc. dalmatica*, *Cryptops hortensis*, *Clinopodes flavidus noduliger*, *Chaetechelyne vesuviana*, *Stigmatogaster gracilis*, *Lithobius erythrocephalus*, *Lith. piceus peregrinus*, *Scutigera coleoptrata*), delle quali alcune sono specie a larga diffusione, altre endemiche del Gargano. Degna di particolare nota è la presenza di *Himantarium gabrielis* sulle isole e non sulla penisola; sono pure da mettere in evidenza *Scolopendra dalmatica* ed *Entothalassinum italicum denticulatum*, che le isole hanno in comune con le terre ad oriente dell'Adriatico. Per quanto riguarda la proporzione degli endemismi sulle Tremiti, troviamo 2 sole specie endemiche (*Glomeris pulchra garganensis* e *Pachyiulus cassinensis garganensis*) su un totale di 19 specie presenti (ossia il 10.5 % di endemici); e poichè si tratta di due specie di Diplopodi, — e il numero complessivo dei Diplopodi ammonta a 7 — la percentuale per questo gruppo sale al 33,3 % ed è quindi notevolmente elevata.

Da quanto sopra esposto, possiamo concludere che il presente studio viene a convalidare l'ipotesi già ripetutamente sostenuta da altri autori, che il Gargano e le Isole Tremiti — insieme con le Murge — rappresentino le terre residue di quel continente (Adria) che si estendeva dalla costa orientale a quella occidentale dell'odierno Adriatico, come è dimostrato dalla presenza di specie comuni col litorale dalmato-croato. Ma poichè molte sono anche le specie endemiche, queste ricerche portano una valida conferma all'ipotesi avanzata dal VERHOEFF (11) che il Gargano meriti di essere considerato — almeno per quanto concerne i Miriapodi — come il 7° distretto faunistico dell'Italia centro-meridionale, gli altri essendo 1° Toscana e Appennino settentrionale; 2° Elba, Pelato e Argentario; 3° Italia centro-occidentale; 4° Italia centro-orientale; 5° Italia meridionale; 6° Sicilia.

Milano, Acquario Civico, Ottobre 1946.

I *typi* delle specie descritte nel presente lavoro sono conservati presso il Civico Acquario di Milano (salvo quelli andati perduti per eventi bellici).

Dopo l'incendio dell'Acquario, lo studio della collezione fu condotto a termine nel Laboratorio dell'Istituto Italiano di Idrobiologia Dott. MARCO DE MARCHI, in Varenna, ove ebbi generosa ospitalità sino alla fine della guerra.

BIBLIOGRAFIA

1. ATTEMS CARL, 1926; *Ueber palaearktische Diplopoden*. « Arch. Naturg. », Bd. 92.
2. — 1927; *Myriopoden aus dem nördlichen und östlichen Spanien*. « Abb. Senckenb. Naturf. Gesellschaft, Frankfurt », Bd. 99.
3. — 1939; *Beiträge zur Kenntnis der Juliden*. « Ann. Naturhist. Museum Wien », Bd. 50.
4. CECCONI GIACOMO, 1908; *Contributo alla fauna delle Isole Tremiti*. « Boll. Mus. Zool. Anat. Compar. Torino », vol. 23, n. 583.
5. MANFREDI PAOLA, 1933; *Dolistenus Menozzii; e altri Miriapodi della Calabria*. « Atti Soc. It. Sc. Nat. Milano », v. 72.
6. — 1940; *VI Contributo alla conoscenza dei Miriapodi cavernicoli italiani*. Ibid. v. 79.
7. — 1943; *I Miriapodi italiani (V Contributo)*. Ibid., v. 82.
8. VERHOEFF KARL, 1908; *Ueber Diplopoden*. « Zool. Anz. », Bd. 32.
9. — 1932; *Diplopoden Beiträge (124^o Aufs.)*. « Zool. Jahrb. », Bd. 62.
10. — 1934; *Beiträge zur Systematik und Geographie der Chilopoden*. Ibid., Bd. 66.
11. — 1935; *Ueber Geographie und Oekologie der Diplopoden Mittelitaliens*. « Arch. Naturg. », Bd. 4.

LATERITÀ E ORIENTABILITÀ DELLE VARIETÀ TOPOLOGICHE IMMERSE IN UNA VARIETÀ (*)

MICHELANGELO VACCARO

SYMMARIVM. — Postquam Auctor definivit quid sit «lateritas» alicuius varietatis (vel, generatim, pseudovarietatis, topologicè acceptae) erga aliam varietatem (vel pseudovarietatem) quae eam contineat, quaecumque est diversitas inter utriusque dimensiones, Auctor exponit relationem inter lateralitatem et orientabilitatem alterius varietatis secus priorem varietatem.

Il concetto di faccia di una superficie dello spazio ordinario, noto attraverso la determinazione che se ne fa assegnando un verso alla normale alla superficie di un punto generico di essa, riceve numerosissime applicazioni: esempio tipico è il teorema di STOKES usato specialmente nella fisica matematica. Non appena però si esamina questo concetto dal punto di vista topologico esso si dimostra insoddisfacente. L'esempio del nastro di Möbius mostra appunto che il verso della normale in un punto generico non determina alcuna faccia della superficie. Le superficie per cui ciò succede si dicono unilateri e ad esse per esempio non è applicabile il teorema di STOKES.

Il carattere di bilaterità o unilaterità delle superficie dello spazio è stato in topologia precisato ed esteso alle varietà di dimensione qualsiasi immerse in una varietà ambiente di dimensione superiore di una unità ed è stato fatto vedere inoltre⁽¹⁾ che esso è un

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi nella Tornata dell'8 febbraio 1948.

(¹) Vedi per es. SEIFERT-THRELFALL: *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, 1934; pag. 272.

carattere non intrinseco della varietà, ma relativo alla immersione di essa nella varietà ambiente. Scopo del presente lavoro è di dare una definizione di questo carattere valida anche per le varietà immerse in una varietà ambiente di dimensione qualunque e di mettere in evidenza la sua relazione con l'orientabilità o meno sia della varietà stessa che di quella ambiente.

Come esempio per le linee dello spazio ordinario la nostra definizione porta ad associare ad ogni punto della linea due facce diverse consistenti nelle due possibili maniere, l'una opposta dell'altra, di girare intorno alla linea mantenendosi nelle vicinanze del punto stesso. Questo concetto presenta sotto forma più topologica il concetto di verso elicoidale attorno ad un asse, assumendo ad asse la linea considerata. L'estensione consente così di parlare di verso elicoidale d'una varietà a quattro dimensioni rispetto ad una superficie su essa tracciata, ecc.

1. - Per metterci dal punto di vista più generale supponiamo che tanto la varietà ambiente V^n che la varietà subordinata V^k ($k \leq n$) siano semplicemente *pseudovarietà* dotate di eventuale contorno ossia complessi di celle, di un dato campo di vertici, puri o tali che le loro pareti (celle di dimensione $n-1$ e $k-1$ rispettivamente) stiano al più in due celle base diverse.

Supponiamo inoltre che le pseudovarietà V^n e V^k siano entrambe strettamente connesse ossia *compatte* (si possa cioè in ciascuna di esse andare da una cella base ad ogni altra con una successione di celle base consecutivamente adiacenti) e inoltre che esse siano tali che l'intorno ⁽¹⁾ in V^n di ogni cella base e di ogni parete di V^k sia una *pseudovarietà compatta orientabile*.

Dicesi faccia di una cella base di V^k rispetto a V^n ognuna delle due orientazioni del suo intorno (che abbiamo appunto supposto orientabile).

Data una cella base orientata E di V^k e una delle sue facce in V^n , si prenda una qualsiasi cella base G di V^n contenente la E . La cella $G-E$ è una cella base dell'intorno di E e pertanto riceve dalla faccia

(1) Per intorno di una i -cella E di V^k rispetto a V^n si intende il complesso delle celle differenza tra ogni cella di V^n contenente la E e la cella E stessa.

di E una orientazione. L'orientazione di E e quella di $G-E$ determinano così una orientazione per G data, per esempio, prendendo nell'ordine i vertici di E e poi i vertici di $G-E$, entrambi ordinati secondo le orientazioni prescelte.

Si consideri ora una cella base orientata E_1 di V^k e una delle sue due facce, inoltre un'altra cella base E_2 di V^k adiacente alla precedente e orientata concordemente. Una faccia qualsiasi di quest'ultima cella E_2 si dirà *concorde* alla faccia della precedente allorchè, presa una cella base G_1 di V^n che contiene E_1 e una cella base G_2 di V^n che contiene la E_2 e assunte per queste due celle G_1 e G_2 le orientazioni che loro vengono dalle orientazioni delle rispettive k -celle E_1 e E_2 e dalle facce corrispondenti, queste due orientazioni determinano la stessa orientazione per l'intorno della parete P comune alle due celle base E_1 e E_2 di V^k considerate; *discorda* nel caso contrario.

La pseudovarietà compatta V^k si dirà finalmente *bilatera* o *unilatera* in V^n se si potrà assegnare oppure no una faccia per ogni sua cella base in maniera tale che ogni coppia di facce relative a celle base adiacenti risultino fra loro concordi. Questa definizione è equivalente a quella per cui si ha bilaterità o no secondochè si può, oppure no, trasportare lungo ogni successione ciclica di celle base di V^n consecutivamente adiacenti, una delle due facce in modo che rientri sempre in se stessa.

2. - Poniamo ora in luce le relazioni che esistono tra i due concetti di bilaterità e orientabilità. Per questo scopo ci occorrono alcune definizioni. Diciamo *falda uscente* da V^k ogni coppia di celle date rispettivamente da una $(k-1)$ -cella di V^n parete di V^k e da una qualsiasi n -cella base di V^n che contenga la precedente. Due falde si dicono *adiacenti* allorchè o le loro due n -celle coincidono e le due $(k-1)$ -celle sono contenute in una medesima k -cella di V^n base per la V^k e quindi sono adiacenti o, viceversa, le due n -celle sono adiacenti e le due $(k-1)$ -celle coincidono. Una falda si dice *orientata* allorchè è orientata la sua n -cella. Due falde orientate adiacenti si dicono di *orientazione concorde* allorchè, se le loro due n -celle coincidono, esse hanno anche la stessa orientazione, se invece sono solo adiacenti, le due orientazioni corrispondenti sono concordi. La V^n dicesi *orientabile lungo la V^k* o *no* secondochè è orientabile oppure no la totalità delle falde considerate

uscenti da V^k ossia se si può scegliere o no una orientazione per ogni falda uscente da V^k tale che in ogni coppia di falde adiacenti queste risultino di orientazione concorde. La non orientabilità di V^n lungo la V^k comporta la sua non orientabilità in senso assoluto, ma non viceversa.

Ciò posto, facciamo vedere la stretta relazione che passa tra l'orientabilità di V^n lungo la V^k e la bilaterità di V^k in V^n . Cominciamo ad esaminare il caso in cui V^n è orientabile lungo la V^k . Questa ipotesi significa che possiamo orientare ogni falda uscente da V^k in modo concorde a tutte le falde adiacenti. Supponiamo allora di aver eseguita questa orientazione. Per ogni falda uscente da V^k tale che la sua n -cella contenga di V^k oltre che la parete origine della falda anche una k -cella base di V^k , l'orientazione corrispondente permette di associare a ciascuna delle sue possibili orientazioni di ogni siffatta k -cella una faccia corrispondente ben determinata. In altre parole nel caso in esame ogni k -cella di V^k ha ognuna delle due sue orientazioni associata a una delle sue due facce. Inoltre si verifica il fatto che celle base di V^k adiacenti e con orientazione concorde hanno anche le facce corrispondenti concordi (come si vede immediatamente dalla considerazione di tutte le falde uscenti dalla parete comune alle due celle base).

Da tutto ciò si conclude che *se la V^k risulta orientabile, essa è anche bilatera in V^n e, viceversa, se essa è bilatera è anche orientabile.*

Poniamoci ora nel secondo caso ossia supponiamo che la pseudovarietà ambiente V^n sia non orientabile lungo la V^k (e quindi non orientabile in senso assoluto). Se la V^k risulta invece orientabile non è più possibile trovare per essa un sistema di facce concordi, giacchè altrimenti la V^n sarebbe orientabile lungo di essa: essa è cioè unilatera in V^n . Resta pertanto da esaminare il caso in cui anche V^k è non orientabile. Con considerazioni analoghe alle precedenti si vede che la V^k risulta bilatera solamente quando ogni successione ciclica di celle basi di V^k , consecutivamente adiacenti lungo la quale ci sia orientabilità o meno per la V^n , dà luogo a una corrispondente orientabilità o meno per la V^n lungo una qualsiasi successione ciclica di falde consecutivamente adiacenti ad essa associata (con questa locuzione si intende che ogni $(k-1)$ -cella origine di una falda della successione sia parete comune a due celle della successione precedente).

Si noti che questa proprietà è comune a tutte le possibili successioni di falde associate alla successione di k -celle considerata (in quanto abbiamo supposto orientabili gli interni delle celle basi e delle pareti di V^k) e pertanto basta verificarla su una sola. In ogni altro caso la V^k risulta unilatera.

Riassumendo, se V^n è orientabile lungo V^k , il carattere di orientabilità della V^k coincide con quello della sua bilaterità rispetto a V^n ; se invece V^n risulta non orientabile lungo V^k , questa, se è orientabile, è unilatera in V^n e, se non è orientabile, può essere a seconda dei casi unilatera o bilatera.



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XII - N. 17
pag. 183-198

CONSIDERAZIONI SULL'OVAIA DI CAVIA COBAJA TRATTATA CON COLCHICINA (*)

(Con tre tavole)

GIULIO PERRI

SYMMARIUM. — Colchomycina in caviis iniecta per complures dies (usque ad novem), in singula cc. ad 1/50.000 vel 1/100.000 diluta, haec expertus est Auctor:

1) cellulae folliculi Graaf destruuntur;

2) ovocita ita vitiatur ut abnormiter gignantur veluti morulae: cuius rei causa quaerenda est in inordinato et insueto stimulo in ovocitam, quae iam folliculi cellulis non protegitur.

Putat Auctor dupliciter operari colchicinam: primum destruens cellulas granulosa folliculi, deinde incitans ovulum ad quamdam parthenogenesisim.

Le ricerche sull'azione della colchicina sulle cellule somatiche sono numerose, dopo quelle iniziali di DUSTIN e della sua scuola; scarse invece sono le ricerche che riguardano l'azione dell'alcaloide sulle cellule germinali.

Dei lavori trovati sull'argomento uno solo, LITS (1935) tratta dell'azione della colchicina sulle uova ovariche dell'animale normale. Altri riguardano l'azione sulle uova fecondate di animali inferiori (rana) (KEPPEL e DAWSON) o degli amnioti.

Quando già questo lavoro stava per essere dato alla stampa ho avuto modo di leggere il lavoro di WALDO e VISMATT (1945) in cui si parla dell'effetto della colchicina sulla divisione delle uova di topo. Ma anche in questo caso si tratta di uova già fecondate.

Sembra ad ogni modo dalle ricerche di vari autori che la colchicina sull'uovo fecondato abbia una azione inibitrice sulla divisione:

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Antonio Pensa, nella Tornata ordinaria dell'8 febbraio 1948.

cioè sarebbe dimostrata un'azione statmocinetica anche sull'uovo fecondato.

Ma il problema dell'azione della colchicina sull'uovo ovarico è particolarmente di difficile soluzione perchè si sovrappongono e si confondono con gli eventuali effetti prodotti dalla colchicina, quelli di processi regressivi delle uova, che si svolgono anche di norma indipendentemente dall'azione della colchicina, quale l'astresia follicolare. L'astresia follicolare, fenomeno che si manifesta in tutte le età della vita si fa più evidente quando l'organismo raggiunge la maturità sessuale: e ad essa sono legate lesioni caratteristiche dell'uovo. Ma oltre a questi fenomeni inerenti alla astresia follicolare si possono trovare, nell'ovaio di mammiferi uova che presentano mitosi atipiche, degenerazioni frammentarie dell'ovocita, fatti di pseudo partenogenesi; reperti che nelle uova ovariche sono molto più frequenti nei mammiferi di quanto non sia riportato nei trattati.

È facile capire perciò come i risultati ottenuti col trattamento colchicinico possono essere assai difficilmente interpretabili perchè, indipendentemente dalla colchicina, possono agire sulle uova ovariche ed influire quindi diversamente nella interpretazione dei dati sperimentali, altri fattori quali sono quelli che normalmente determinano l'astresia follicolare e la degenerazione dell'uovo ovarico.

Non posso divulgarmi in questa nota, per esigenze di spazio concesso alla stampa, nell'esposizione della bibliografia che si riferisce al fenomeno di DUSTIN determinato dalla colchicina ed agli argomenti collaterali ai quali ho ora accennato.

La bibliografia non ho trascurato di raccoglierla ma mi riservo di pubblicarla in lavoro più esteso, ad ogni modo rimando alla vasta monografia di ASTALDI, ALLEGRI e MAURI amplissima ed aggiornata fino alla fine del 1947.

È necessario però che io ricordi almeno, il lavoro di LITS (1935) come quello che ha maggiore attinenza colla mia ricerca.

Questo Autore ha messo in evidenza nell'ovaio di topolino trattato con piccole dosi di colchicina (gr. 0,00025 per 20 gr. di peso) due fatti:

1) la risposta della granulosa alla droga, risposta assai intensa con comparsa di una notevole quantità di figure colchiciniche.

2) aumento notevole del numero di mitosi atipiche e di divisione in blastometri dell'ovocita non fecondato in seguito all'iniezione della colchicina, aumento che è di 9-10 volte in confronto al normale.

Tale fenomeno è stato notato dall'autore solo nei follicoli atresici e con un massimo dopo 16 ore dalla iniezione della colchicina.

L'autore conclude che gli pare legittimo pensare che questo aumento di frequenza delle forme di divisione dell'uovo, sia dovuto non solo all'atresia, ma che venga provocato dall'azione eccitomitotica della colchicina.

RICERCHE PERSONALI

Dopo alcuni tentativi per orientarmi sull'effetto della colchicina sulla cavia, sono giunto alla conclusione che una dose di colchicina che avesse effetto e nello stesso tempo potesse essere ripetuta per vari giorni senza uccidere l'animale era la dose di 1 cc. di soluzione 1/50.000 introdotta per via parenterale. Tale dose non sufficientemente tossica per provocare la morte di una cavia di 400-600 gr. poteva ripetersi per 10 giorni consecutivi.

La necessità di prolungare il trattamento per vari giorni era legata allo scopo di assicurare la determinazione delle alterazioni sui vari elementi costitutivi dell'ovaio che avrebbe potuto sfuggire a un trattamento breve.

Le cavie trattate sono state 14 e ciascuna di esse subì il trattamento per un intervallo di tempo variabile da 1 a 9 giorni dopo di che sono state sacrificate; precedentemente erano state isolate dai maschi per almeno 4 mesi.

Le dosi più forti sul 1/5000 - 1/10.000 portavano a morte l'animale dopo 24 ore. La colchicina usata era la colchicina pura cristallizzata Carlo Erba.

Quando il trattamento era di 1 cc. di colchicina in soluzione 1/50.000 si aveva una diminuzione costante di peso (20-50 gr. al dì).

Al giorno stabilito gli animali venivano sacrificati e le ovaie fissate in Susa o sublimato acetico, incluse in paraffina e colorate con ematossilina eosina o ematossilina ferrica di Heidenhain e rosso congo.

RISULTATI DELLE RICERCHE SPERIMENTALI

Tratterò separatamente delle varie formazioni dell'ovaia che sono interessate nel processo:

a) *epitelio germinativo*. - L'epitelio germinativo non sembra risentire alcun effetto delle varie dosi di colchicina; lo stesso può dirsi, per inciso, per i corpi lutei. LITS invece riporta di aver notato lesioni tardive e carico dei corpi lutei.

b) *follicoli cofori primari*. - Negli animali trattati con dosi massimo (1 cc. di sol. 1/10.000), alla nona ora, non si notano alterazioni degne di nota nei follicoli cofori primari; negli animali trattati con dosi minori; ma ripetute per parecchi giorni, si nota che gli ovociti dei follicoli oofori primari hanno nuclei con masse cromatiche addensate e fortemente colorabili che molto ricordano le forme di sinapsi; poco evidente è la membrana nucleare, l'ovoplasma chiaro, spugnoso è contenuto da una pellicola tesa al massimo. Con una certa frequenza si notano in essi follicoli con ovociti aventi 2-4 nuclei come se fosse avvenuta una segmentazione dell'ovocita.

Non ho mai potuto sorprendere mitosi negli ovociti del follicolo ooforo primario.

Le cellule follicolari sono con grande frequenza in metafase colchicina.

Comunque l'aspetto degli ovociti di questi follicoli è ben diverso dall'aspetto normale (fig. 1).

c) *follicoli vescicolosi*. - Le lesioni più caratteristiche si hanno a carico delle cellule della granulosa dei follicoli vescicolari.

Qui vediamo come questo tessuto risenta elettivamente dell'azione carioclasica della colchicina, ma è assai interessante seguire il destino di queste cellule alterate per l'azione di un trattamento colchicinico protratto per un periodo più o meno lungo. Seguendo l'andamento di queste alterazioni e delle successive fasi riparative si può ricostruire abbastanza facilmente il fenomeno.

Sotto un'azione massiva ma di breve durata della colchicina le cellule della granulosa si presentano per il 60-70 % in metafase colchicina. Ammassi di cromosomi al centro della cellula fortemente

colorata, membrana cellulare tesissima; protoplasma chiaro. Si può riconoscere che si tratta di metafasi solo perchè in sezioni in cui il nucleo è preso di profilo si vede che si tratta di piastre equatoriali atipiche; altrimenti non è possibile distinguere i cromosomi gli uni dagli altri (fig. 2).

A mano a mano che l'azione della colchicina si prolunga, l'aspetto delle cellule follicolari si altera sempre più, si fanno sempre più rare le metafasi colchicinee mentre la cavità del follicolo si riempie di detriti cellulari, specialmente di ammassi di cromatina che a poco a poco si colorano metacromaticamente e poi si sbriciolano in granulini.

In breve tempo (2-3 giorni) del follicolo vescicoloso, non rimane che una cavità ripiena di detriti, solo alcune cellule follicolari periferiche addossate alla teca interna, si conservano integre. Se l'ovocita esiste le cellule del cumulo ooforo sono le ultime a dare segni di degenerazione e spesso alcune di esse rimangono attaccate all'uovo che si trova immerso in questo ammasso di detriti cellulari.

Le cellule più esterne, che hanno resistito all'azione della colchicina, se dopo un certo numero di giorni si interrompe il trattamento o si attende a sacrificare l'animale qualche giorno, riprendono a proliferare ma con carattere profondamente diverso da quelli normali. Mentre le cellule follicolari sono cellule ben nette individuate, come conseguenza di questa secondaria proliferazione risulta invece la formazione di sincizii cellulari.

Dalla proliferazione delle cellule follicolari superstiti derivano infatti formazioni sinciziali, plurinucleate che si espandono in mezzo ai detriti cellulari sotto forma di bottoni germinativi, tozzi, mammellonati o allungati a guisa di salsicciotto; si protendono all'interno del follicolo e tendono ad invaderlo. Molto spesso si staccano pezzi di sincizio e noi li troviamo come isolotti di cellule in mezzo al follicolo. Si tratta di masserelle rotondegianti di protoplasma, contenenti 20-30 nuclei senza divisione apprezzabile del citoplasma.

I nuclei hanno aspetto normale, il protoplasma è granuloso. La loro derivazione dalle cellule follicolari superstiti è sicura e facilmente constatabile nelle microfotografie (fig. 3). Se l'osservazione dell'ovaio dopo trattamento colchicinico si fa dopo 7-8 giorni dall'ultima iniezione di colchicina si nota che queste cellule hanno invaso tutto il follicolo che è trasformato in un ammasso solido di cellule, riunite in un grosso

sincizio. Questo è l'aspetto più frequente, ma molte volte l'aspetto finale assunto dai follicoli è diverso ed altrettanto caratteristico. Le cellule follicolari proliferate dopo il trattamento colchicinico invece di assumere un aspetto sinciziale e di penetrare nel follicolo si dispongono sulla superficie interna della cavità disponendosi in più strati irregolari con bottoni e sporgenze variamente sviluppate che deformano la cavità follicolare. Questa disposizione delle cellule è analoga a quell'aspetto che si ha nella atresia follicolare quando il follicolo atresico diventa cistico; ma è assai più irregolare sia per il numero che per la disposizione degli strati.

Osservando alcune di queste formazioni a tipo cistico ci si rende conto del reperto riferito da LEO LOEB. Questo autore (1902, 1903, 1932) descrisse delle formazioni analoghe a quelle da me trovate in ovaie di cavie non trattate in alcun modo e le considerò come formazioni embrionali dovute a partenogenesi di nova ovariche. Dalla documentazione fotografica che il LOEB ha dato di tali formazioni risulta, a mio avviso, che sono simili a quelle da me osservate e precedentemente descritte; ma l'interpretazione di LEO LOEB è secondo me errata e dipende dal fatto che probabilmente l'Autore le ha osservate isolatamente, senza ricercarne l'origine. Probabilmente quelle del LOEB corrispondono a sezioni tangenziali escludenti il lume della cavità follicolare di formazioni aventi lo stesso significato. In queste condizioni la disposizione regolare delle cellule può dare l'illusoria impressione di formazioni embrionali, mentre non si tratta che di stratificazione regolare di cellule follicolari proliferate sotto uno stimolo anormale.

Riassumendo: le cellule follicolari sottoposte per parecchi giorni ad azione di dosi piccole di colchicina si comportano nel seguente modo:

- 1) metafasi colchicinicche numerosissime (40-60 % delle cellule) per cui in due o più riprese quasi tutte le cellule sono passate attraverso questa fase di mitosi atipica. La grande maggioranza delle cellule (80 %) viene distrutta per picnosi, carioressi, cariolisi; i detriti cellulari vengono a riempire così la cavità del follicolo ed in seguito riassorbiti ed eliminati;

- 2) una piccola percentuale di cellule superstiti (15-20 %) che hanno superato questa fase proliferativa, assumendo però caratteri ben diversi da quelli di partenza; si riuniscono spesso in masse sinciziali che

sporgono nella cavità follicolare e la riempiono con successive proliferazioni fino ad obliterarla.

In alcuni casi l'ovocita permane sia pure alterato quasi circondato da queste formazioni.

3) In qualche caso invece le cellule superstiti si dispongono alla periferia in vari strati multipli che rivestono la parete interna del follicolo fino a formare una cavità cistica irregolare.

Ad ogni modo è notevole il fatto che il tessuto della granulosa è assai sensibile all'azione della colchicina.

d) *azione sull'ovocita*. — Per quanto riguarda l'azione della colchicina sull'ovocita essa è assai evidente. Non su tutti gli ovociti agisce la sostanza ma solo su quelli che si trovano in follicoli dei quali il tessuto delle cellule follicolari è già stato profondamente alterato. Queste cellule hanno un'azione trofica e di protezione sull'ovocita. Si capisce quindi come l'ovocita possa risentire direttamente l'azione della colchicina quando esse sono alterate e in gran parte distrutte.

La prima lesione tipica che si nota, nell'ovocita è a carico della zona pellucida. Questa formazione invece di avere un contorno regolare e preciso si presenta ondulata, sfrangiata con finissime digitazioni rivolte verso l'esterno a guisa di raggi, come se il gel da cui è formata tendesse a contrarsi e ad alterarsi.

Le digitazioni assumono colorazioni sempre più basiche nella loro parte più periferica. In stadi più avanzati di alterazione la zona pellucida si presenta seghettata, piegata, rugosa, e poi scompare lasciando l'uovo libero nel fluido del follicolo.

Generalmente quando l'ovocita ha la zona pellucida alterata si hanno in esso le prime alterazioni cromatiche. Raramente queste lesioni si incontrano in uova con zona pellucida integra. Le alterazioni cromatiche sono, in ordine di tempo, le seguenti: in un primo tempo si hanno lesioni caratteristiche di disposizione della cromatina. Non si hanno nell'ovocita metafasi colchicine tipiche. I cromosomi si presentano aggruppati più o meno regolarmente intorno ad un fuso acromatico che può essere normale, ma molto più spesso è atipico, risultandone mitosi pluriolari (fig. 4). Spesso si hanno varie figure mitotiche in uno stesso ovocita, talvolta in un ovocita più di un nucleo.

Considerando le varie alterazioni che si presentano nell'ovocita distribuite nel tempo si può ricostruire il fenomeno nel seguente modo: mitosi atipica con formazione di due, tre, quattro ed anche più aggruppamenti di cromosomi diversi, irregolari di numero e di forma, generalmente rotondeggianti. Ciascuno di questi ammassi di cromosomi a sua volta si comporta come un nucleo e da ciascuno di essi si possono originare altre mitosi contemporanee o successive nello stesso ovo (fig. 5). Si può così arrivare ad avere 5-6 gruppi di cromosomi nello stesso ovocita, spesso raggruppati ad un polo dell'ovo ma talvolta disposti in punti lontani dell'ovocita stesso.

Abbastanza frequentemente si può sorprendere in questo stadio l'emissione di globuli polari in numero vario contenenti ciascuno quantità diverse di cromatina (fig. 6-7). A volte nel globulo polare stesso si notano delle mitosi mentre nell'ovocita si hanno aggruppamenti irregolari di cromatina. A questo stadio segue la lesione più caratteristica e tipica degli ovociti che è la loro frammentazione. L'ovocita cioè, nel quale si hanno varie mitosi e si sono formati vari aggruppamenti di cromosomi, presenta l'ovoplasma diviso in porzioni proporzionali alla massa di cromatina sì che l'uovo viene a presentarsi frammentato in elementi irregolari nucleati come se stesse dividendosi in blastomeri per formare una morula (fig. 8).

In ciascuno di questi elementi si possono notare mitosi oppure nuclei completi (fig. 9) che ricordano i blastomeri.

Questi nuclei col progredire dell'azione della colchicina perdono di colorabilità e si fanno evanescenti; nei giorni più avanzati di trattamento si notano ovociti suddivisi irregolarmente in elementi dei quali solo una parte presentano un nucleo, più spesso contengono ombre di nuclei evanescenti oppure cromosomi isolati nel citoplasma (fig. 9-10).

Se si fa un grafico riportando sulle ordinate i giorni di trattamento e sulle ascisse la percentuale di elementi che si trovano nelle ovaie trattate si notano le seguenti particolarità.

Iniziando il trattamento abbiamo che circa il 45 % dei follicoli vescicolari presentano un ovocita, questo numero sotto il trattamento colchicinico cade fino a 17-20 %, percentuale che si mantiene fino alla fine del trattamento raggiungendo il minimo, con la 5ª giornata di trattamento. Il numero delle mitosi segue lo stesso andamento con

un massimo al 1° giorno e un minimo nella 5ª giornata, per risalire ancora verso la 8ª-9ª giornata. Per le segmentazioni invece il fenomeno è inverso. Basso, inizialmente 25 %, sale per raggiungere un massimo di 60 %, nella 3ª giornata, mentre le mitosi diminuiscono; scende notevolmente tra la 5ª e la 6ª giornata al 45 % e si mantiene su questa linea fino alla fine del trattamento.

Questo andamento permette di chiarire un fatto: le mitosi sono seguite con ritardo di circa 1-2 giorni dalla comparsa delle segmentazioni. Il che vuol dire che a mano a mano che le mitosi si manifestano, a distanza di due giorni si ha la massima percentuale di segmentazioni. Questo fatto si accorda con quanto sostengono WALDO e WIMSATT circa un'azione inibente della colchicina sulla divisione cellulare. Ciò è abbastanza logico se si pensa che in metafase la cellula si arresta per parecchie ore.

L'azione della colchicina ha alterato gravemente la vitalità degli ovociti diminuendone il numero, quelli che resistono evolvono verso la segmentazione dopo aver attraversato lo stadio di una mitosi, più o meno regolare.

Tali dati non hanno valore assoluto data la difficoltà di racchiudere o definire complessi fenomeni biologici in limiti matematici, certamente però aiutano ad interpretare il susseguirsi del fenomeno nel tempo. I dati sono desunti dal conteggio di non meno di 70-80 follicoli per ciascun ovaio, contati su sezioni lontane l'una dall'altra per evitare nei limiti del possibile di conteggiare due o più volte uno stesso follicolo.

Concludendo si può ricostruire l'azione della colchicina sugli elementi dell'ovaio in questo modo:

Nelle primissime ore l'azione si svolge prevalentemente a carico delle cellule follicolari della granulosa che vengono gravemente alterate (picnosi, ressi, lisi del nucleo) e in gran parte distrutte.

Viene così ad essere isolato l'ovocita che risente dell'azione diretta dell'alcaloide non più protetto dalle cellule follicolari e dal cumulo coforo.

Le prime lesioni sull'ovocita riguardano la zona pellucida che si ritrae e si altera in maniera caratteristica. Seguono mitosi anormali pluripolari e la cromatina dell'ovocita si divide irregolarmente sotto lo stimolo tossico della colchicina.

Alle mitosi seguono le segmentazioni dell'ovoplasma attorno ai vari gruppi di cromosomi a formare delle pseudo-segmentazioni irregolari dell'ovocita che abbiamo descritto.

Che anche queste cellule risultanti dalla segmentazione o pseudo-blastomeri abbiano capacità proliferativa e che la segmentazione tenda a progredire è un fatto chiaro dimostrato dalla presenza anche in esse di mitosi.

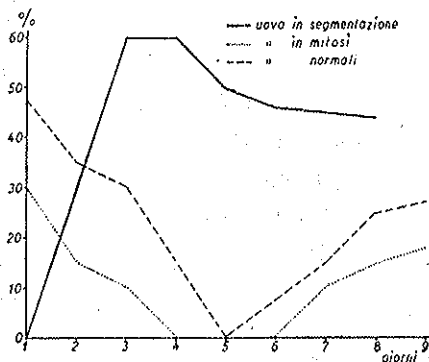


FIG. 13.

Nel frattempo le cellule della granulosa che sono rimaste vitali hanno ripreso a proliferare assumendo il carattere di un sincizio e come tali tendono a circondare la cavità irregolare del follicolo, le rivestono disponendosi in vari strati ed assumendo un aspetto che può essere come abbiamo detto, se non se ne conoscesse l'origine, scambiato per formazioni embrionali quali sono state descritte da LEO LOEB.

Da questo insieme di dati si direbbe che la colchicina può agire effettivamente sulle cellule della linea germinale femminile e cioè sugli ovociti ma solo dopo che sono state distrutte le barriere difensive dell'ovocita stesso (granulosa, cumulo coforo, zona pellucida).

Resta ora da vedere come avvenga il fenomeno e se questa azione della colchicina sia analoga a qualche fattore che anche in altre circostanze e in condizioni normali può determinare nell'ovaia fatti simili.

Abbiamo, infatti visto che è possibile notare alterazioni del genere di quelle da me descritte, però con frequenza assai minore, in folli-

coli atresici di ovaie normali, e in ovaie di animali trattati con prolano o con urina di donna gravida, ed anche in questo caso le alterazioni ovulari sono accompagnate da atresia follicolare.

Non è possibile pensare che i fatti da me osservati dopo l'azione della colchicina non siano legati direttamente all'azione della colchicina; per convincersi di questo basta guardare la percentuale altissima di ovociti che presentano tali lesioni. Ma innanzi tutto la colchicina agisce esaltando un fenomeno che si verifica nell'ovaia anche in condizioni normali oppure sotto l'influenza di altre sostanze (quale ad es. il prolano) e cioè l'atresia follicolare che assume però nel caso specifico dell'azione della colchicina, proporzioni imponenti e caratteristiche particolari. Si tratta di una atresia rapidissima e profonda in conseguenza della quale l'ovocita viene a trovarsi esposto all'azione della colchicina da un lato e di tutte le sostanze anormali che si formano per la distruzione massiva di cellule della granulosa.

Questi due fatti tendono ad agire in maniera potente e contemporanea sull'ovocita la cui potenzialità mitotica viene deviata verso forme alterate da questi stimoli abnormi a cui è sottoposto ormai staccato come è dal complesso dei sistemi regolatori dell'organismo.

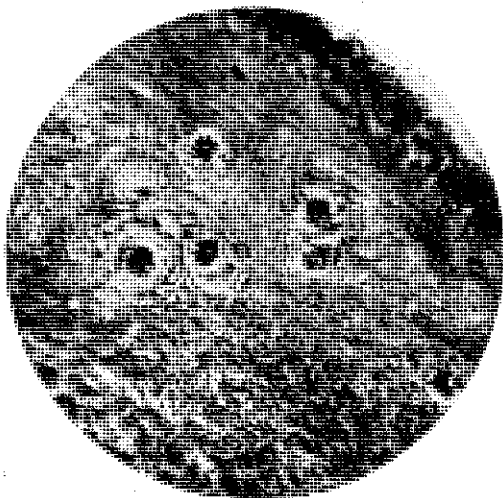


FIG. 1.

Omal II. Obiettivo 45. Aspetto delle uova dei follicoli primarii. Cavia N. 7, giorni di trattamento 9. Susa Em. Eosina.

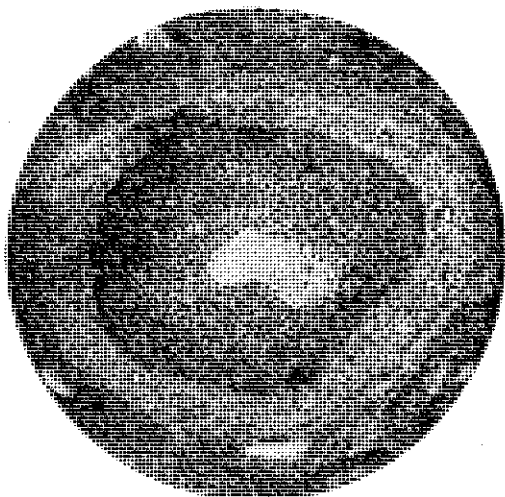


FIG. 2.

Omal II. Obiettivo 10. Aspetto delle cellule della granulosa del follicolo dopo trattamento con colchicina. Cavia N. 2, Susa Em. Eos.

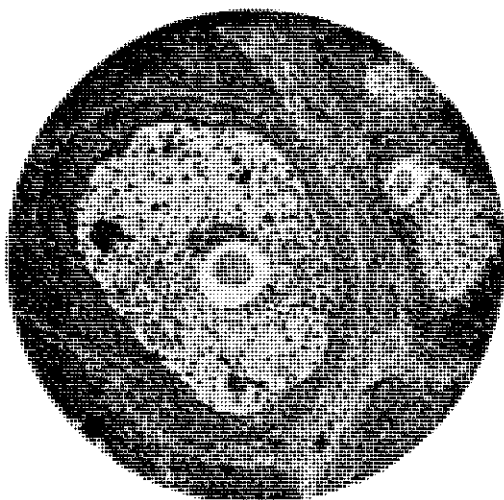


FIG. 3.

Isoletti di cellule ad aspetto sinciziale derivate dalla proliferazione delle cellule della teca interna. Cavia N. 5. Susa Em. Ferriem. Omal 2, obiettivo 10.

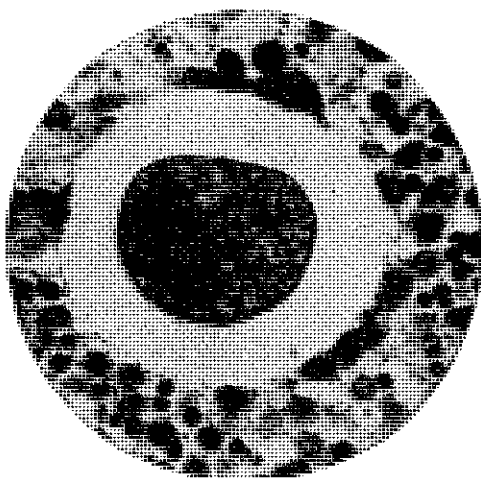


FIG. 4.

Omal III. Obiettivo 75. Mitosi pluripolare in uovo ovarico trattato con colchicina. Cavia cobaya. Susa Em. Eosina. Cavia N. 9.

BIBLIOGRAFIA

- AMOROSA E. C., « Nature », CXXXV, 226. 1935.
- ASAMI G., « Anat. Rec. », XVIII, 323. 1920.
- ASTALDI, ALLEGRI e MAURI, « Il Farmaco », ottobre 1947.
- ATHIAS M., « Anat. Anz. », XXXIV, 1, 5. 1909.
- « Arch. Anat. Micr. », XXV, 403. 1929.
- ALLEN E., SMITH G. M. e GARDNER W. V., « Endocrinology », XXI, 412, 413. 1937.
- « Am. Jour. of Anat. », LXI, 321. 1937.
- BASTENIE P. e ZYLBERSZAX S., « C. R. Ass. Biol. », CXXVII, 822. 1938.
- BALBIANI E., « C. R. Ac. Sc. », LXIII. 1864.
- BONNET E., « Erg. Anat. Entw. », IX. 1899.
- BOUIN P., « C. R. Soc. Biol. », LII, 17. 1900.
- BRANCA A., « La Cellule », XXXIV, 53. 1924.
- « C. R. Ass. Anat. », XVII, 59. 1922.
- BUJARD E. e ICKOWCZ M., « Bull. Hist. Applic. », XII, 373. 1935.
- BUSHNELL R. J., « Anat. Rec. (suppl.) », LXXII, 97. 1938.
- BRANCA A., « Biol. », XXXV, 325. 1926.
- BRUES A. M., « J. of Physiology », LXXXVI, 63. 1936.
- BRUES A. M. e COHEN A., « Biochem Hour », XXX, 1363. 1936.
- BRUES A.M. e JACKSON E. B., « Am. J. Cancer. », XXX, 504. 1937.
- CLEARING P. A., « Jour. Path and Bact », XLIV, 469. 1937.
- COSTANTIN TH., « Bull. Hist. appl. », XVII, 97. 1940.
- CARNOT P. e MAY R. M., « C. R. Soc. Biol. », CXXVIII, 641. 1938.

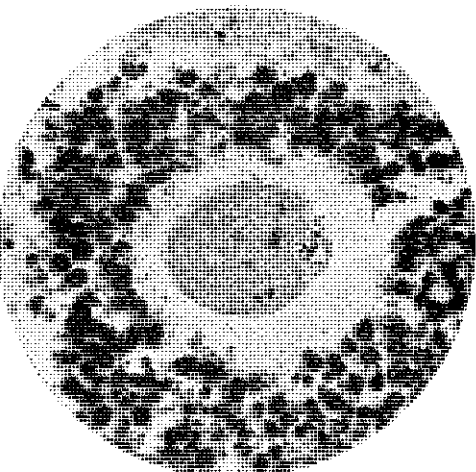


FIG. 5.

Omal III. Obiettivo 45. Ammassi di cromosomi sparsi nel citoplasma dell'ovocita alcuni dei quali depositi in mitosi. Cavia n. 9. Em. Ferriera, Susa.

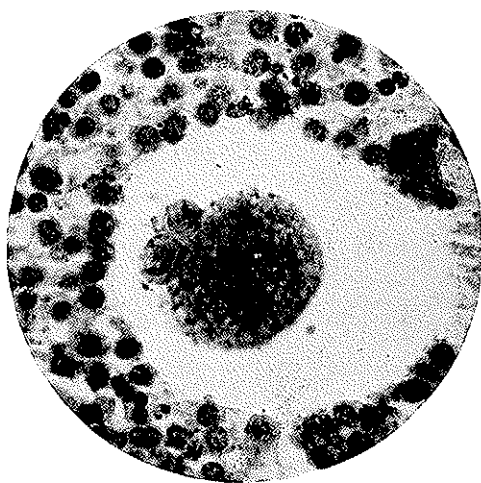


FIG. 6.

Globuli polari. Omal III. Obiettivo 45. Residui di cromosomi nel citoplasma. Cavia N. 7. Susa Em. Ferriera.

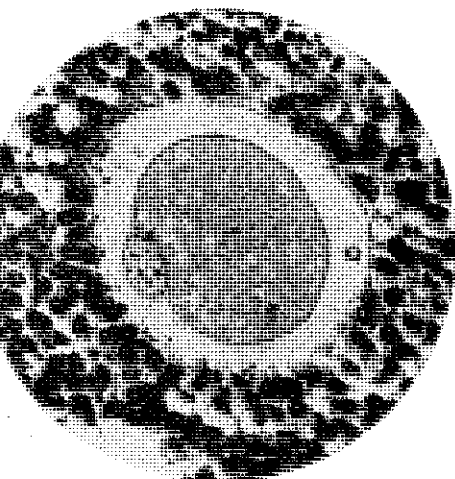


FIG 7.

Globuli polari. Cavia 7. Omal III. Obiettivo 45. Susa Em. Eosina.



FIG 8.

Segmentazione di uovo in porzioni alcune nucleate. Omal II. Obiettivo 20. Susa Em. Eosina. Cavia 5.

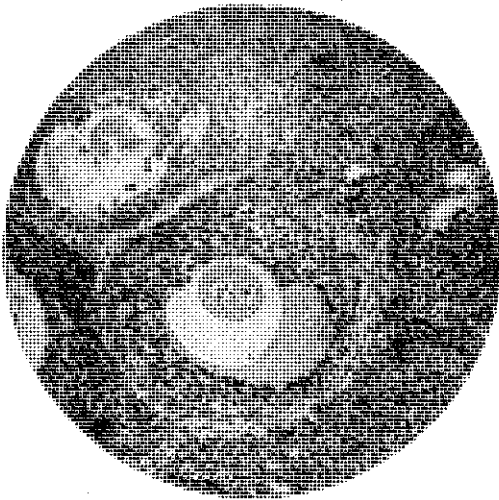


FIG. 9.

Ovocita binucleato. Susa ematossilina eosina.
Cavia 4. Susa emat. Eosina Oculare. Omal II.
Obiettivo 10.

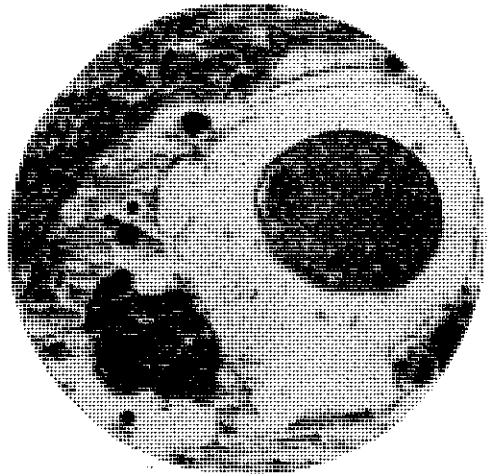


FIG. 10.

Cromosomi ammassati ad un polo o sparsi nel
citoplasma. Nella cavità del follicolo ammassi
di cellule rigenerate dalla teca interna, a carat-
tere sinciziale. Omal III. Obiettivo 45. Susa Em.
Ferrica. Cavia 9.

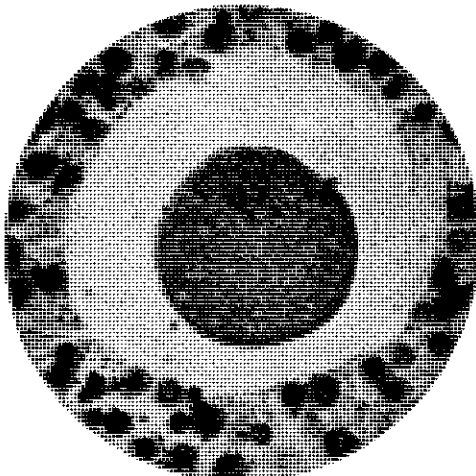


FIG. 11.

Globuli polari, ammasso di cromosomi nel cito-
plasma. Cavia 3. Omal III. Obiettivo 75. Susa
Em. Eosina.

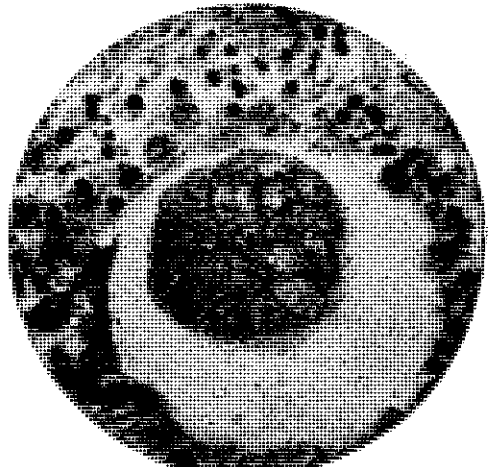


FIG. 12

Segmentazione di uovo in varie porzioni ineguali
con piccoli ammassi di cromosomi sparsi nel ci-
toplasma. Cavia 9. Omal III. Obiettivo 45. Susa
Em. Ferrica.

BIBLIOGRAFIA

- AMOROSA E. C., «Nature», CXXXV, 226. 1935.
- ASAMI G., «Anat. Rec.», XVIII, 323. 1920.
- ASTALDI, ALLEGRI e MAURI, «Il Farmaco», ottobre 1947.
- ATHIAS M., «Anat. Anz.», XXXIV, 1, 5. 1909.
- «Arch. Anat. Micr.», XXV, 403. 1929.
- ALLEN E., SMITH G. M. e GARDNER W. V., «Endocrinology», XXI, 412, 413. 1937.
- «Am. Jour. of Anat.», LXI, 321. 1937.
- BASTENIE P. e ZYLBERSZAX S., «C. R. Ass. Biol.», CXXVII, 822. 1938.
- BALBIANI E., «C. R. Ac. Sc.», LXIII. 1864.
- BONNET E., «Erg. Anat. Entw.», IX. 1899.
- BOUIN P., «C. R. Soc. Biol.», LII, 17. 1900.
- BRANCA A., «La Cellule», XXXIV, 53. 1924.
- «C. R. Ass. Anat.», XVII, 59. 1922.
- BUJARD E. e ICKOWCZ M., «Bull. Hist. Applic.», XII, 373. 1935.
- BUSHNELL R. J., «Anat. Rec. (suppl.)», LXXII, 97. 1938.
- BRANCA A., «Biol.», XXXV, 325. 1926.
- BRUES A. M., «J. of. Physiology», LXXXVI, 63. 1936.
- BRUES A. M. e COHEN A., «Biochem Hour», XXX, 1363. 1936.
- BRUES A.M. e JACKSON E. B., «Am. J. Cancer.», XXX, 504. 1937.
- CLEARING P. A., «Jour. Path and Bact», XLIV, 469. 1937.
- COSTANTIN TH., «Bull. Hist. appl.», XVII, 97. 1940.
- CARNOT P. e MAY R. M., «C. R. Soc. Biol.», CXXVIII, 641. 1938.

- CAVALLERO C., «Tumori», XXV, 506. 1939.
- «Arch. it. Med. Sper.», II, 389. 1938.
- COURNEI R., «Arch. Anat. Hist. Embr.», II, 455. 1923.
- COURNEI R. e OBERLUNG, «Boll. Soc. Anat.», 724. 1923.
- CHAPELLIER A., «C. R. Soc. Biol.», XVI, 543. 1909.
- CLARK E. B., «The Anat. Rec.», XXV, 313. 1923.
- CHAMPY, «C. R. Soc. Biol.», XCVI, 1103. 1927.
- DIXON V. E., London, 1906 pag. 95.
- DUSTIN A. P., «C. R. Soc. Biol.», LXXXV, 23. 1921.
- DIXON W. E. e MALDE W., «J. Physiol.», XXXVII, 50. 1903.
- DUSTIN A. P., «Arch. Anat. Mier.», XXI, 37. 1929.
- DUSTIN e CHODKOWSKY K., «C. R. Ass. Anat.», 170. 1937.
- DUSTIN A. P., HAVAS L. e LITS F., «C. R. Ass. Anat.», XXXII, 177. 1937.
- DER STRICHT V., «Verh. Anat. Gesell.», 1901 pag. 108.
- DEMPSEY F. V., «Am. J. Physiol.», CXX, 126. 1937.
- «Anat. Rec.», LXXXV, 223. 1939.
- ENGLE E. T., «Anat. Rec.», 341. 1927.
- «Am. Jour.», XXXIX. 1927.
- GUINOCHE M., «Bull. Hist. Appliquee», XVIII, 213. 1941.
- HAÄGSTRÖM P., «Act. Gynec. Scand.», I. 1922.
- HARTMANN C., «Am. Jour. Anat.», XXXVII, 1. 1926.
- HENNEGUY F., «C. Ren.», CXVI. 1893.
- «Jour. de l'Anat. et de la Physiol.», XXX, 43. 1864.
- JCKOWICZ M., «C. R. Soc. Biol.», CXIX, X, 34. 1935.
- KINGENY H. M., «Biol. Bull.», CCXL, 243. 1914.
- KRAFKA J. Jr., «Anat. Rec.», XIX, 21. 1939.
- KINGSBURY B. F., «The Am. Jour. Anat.», CXV, 309. 1939.
- KAMPEINER O. F., «Am. Jour. Anat.», XLIII, 45. 1929.

- LITS F. J., «C. R. Soc. Biol.», CXV, 1421. 1934.
- «C. R. Soc. Biol.», CXVIII, 393. 1935.
- LOEB L., «Jour. Med. Res.», VI, 39. 1901.
- «The Anat. Rec.», LI, 372. 1932.
- MYERS H. I., YOUNG W. C. & DEMPSEY E. W., «The Anat. Rec.», LXV, 381, 401. 1936.
- MAC DONALD E. & LOG J. A., «The Ant. Jour. Anat.», LV, 343. 1934.
- MAYER CH., «C. R. Ass. Anat.», XXV, 402. 1932.
- NEWMANN H. H., «Biol. Bull.», XXV, 1913.
- PAFF G. H., «Am. J. Anat.», LXIV, 331. 1939.
- PALADINO G., «Mon. Zool. It.», V, 140. 1894.
- SNEIDER M. E., «The Anat. Rec.», LXX, 13. 1937.
- SEYLE H., «The Anat. Rec.», LXXV, 59. 1939.
- SMITH SENTIMA C., «Am. Jour. of. Anat.», XXXV, 254. 1925.
- SANSOM «Jour. of. Anat.», LV, 1. 1920.
- YOUNG W. C., DEMPSEY W., MYERS H. I. & HAQUIST C. W., «Am. Jour. Anat.», LXIII, 457. 1938.
- PETHNARI, «C. R. Soc. Biol.», XCII, 1294. 1925.
- WALDO C. M. & WUNSATT W. A., «Anat. Rec.», XCIII, 363. 1945.

LA TEORIA INVARIANTIVA DEL SISTEMA DIFFERENZIALE FORMATO DA DUE EQUAZIONI LINEARI DI ORDINE QUALUNQUE (*)

NOTA PRIMA

ARMANDO CHIELLINI

SUMMARY. — Nunc primum determinatur completum systema invariantium differentialium, quod attinet ad systema differentiale lineare, constans ex duabus aequationibus ordinis n . Hanc autem determinationem Auctor ostendit fieri posse per simplicem indeterminatorum coefficientium processum, antea posita quadam reducta eiusdem systematis forma.

1. - Consideriamo il sistema differenziale lineare

$$[1] \quad \begin{cases} A Y^{(n)} + B Z^{(n)} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} P_{1i} Y^{(n-i)} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} Q_{1i} Z^{(n-i)} = 0 \\ C Y^{(n)} + D Z^{(n)} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} P_{2i} Y^{(n-i)} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} Q_{2i} Z^{(n-i)} = 0 \end{cases}$$

sotto l'ipotesi che il determinante $\Omega(x) = AD - BC$ non sia identicamente nullo. In due miei precedenti lavori trattai degli invarianti differenziali relativi ad un sistema di due equazioni differenziali lineari del secondo ordine ⁽¹⁾; mi propongo ora di svolgere una ricerca ana-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Ugo Amaldi l'11 novembre 1948.

⁽¹⁾ CHIELLINI: *Sugli invarianti del sistema differenziale formato da due equazioni lineari ed omogenee del secondo ordine*. «Rendiconti Seminario Facoltà di Scienze di Cagliari», Vol. 10, fasc. 4, 1940; *Ancora sugli invarianti del sistema formato da due equazioni differenziali del secondo ordine e su classi di sistemi riducibili a coefficienti costanti*. «Pontificia Accademia Scientiarum, Commentationes», Vol. VI, n. 10, anno VI, 1942.

loga, per il caso generale di un ordine n qualunque, per mostrare la intima analogia di tale ricerca con quella relativa alle equazioni lineari.

Il WILCZYŃSKI⁽¹⁾, come già feci osservare brevemente nei due precitati lavori, stabilisce un effettivo sistema completo di invarianti lineari, per il caso $n=2$, mediante un procedimento quanto mai laborioso e pervenendo ad invarianti assai più complicati di quelli da noi ottenuti.

2. - Sotto l'ipotesi che il determinante $\Omega(x) = AD - BC$ non sia identicamente nullo, potremo sempre scrivere il sistema [1] sotto la forma esplicita

$$[2] \quad \begin{cases} Y^{(n)} + \sum_1^n \binom{n}{k} p_{1k} Y^{(n-k)} + \sum_1^n \binom{n}{k} q_{1k} Z^{(n-k)} = 0 \\ Z^{(n)} + \sum_1^n \binom{n}{k} p_{2k} Y^{(n-k)} + \sum_1^n \binom{n}{k} q_{2k} Z^{(n-k)} = 0, \end{cases}$$

dove i coefficienti $p_{ik} = p_{ik}(x)$, $q_{ik} = q_{ik}(x)$ sono funzioni della x , derivabili quanto occorre. Mediante il cambiamento di funzione incognita

$$Y(x) = \lambda(x) \cdot y(x), \quad Z(x) = \mu(x) \cdot z(x)$$

è sempre possibile, mediante operazioni di sola derivazione e sostituzione, ridurci al caso in cui sia $p_{11} = q_{21} = 0$; basterà prendere λ e μ soddisfacenti alle condizioni

$$\tilde{p}_{11} = \frac{n}{\lambda} (\lambda' + p_{11} \lambda) = 0 \quad \tilde{q}_{21} = \frac{n}{\lambda} (\mu' + q_{21} \mu) = 0$$

cioè

$$\lambda = e^{-\int p_{11} dx}, \quad \mu = e^{-\int q_{21} dx}$$

⁽²⁾ WILCZYŃSKI: *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, Teubner-Lipsia, 1906, Cap. IV.

Potremo quindi senz'altro partire dalla così detta *forma ridotta*

$$[3] \quad \begin{cases} Y^{(n)} + * + \binom{n}{2} p_{12} Y^{(n-2)} + \dots + p_{1n} Y + \\ \quad + \binom{n}{1} q_{12} Z^{(n-1)} + \binom{n}{2} q_{12} Z^{(n-2)} + \dots + q_{1n} Z = 0 \\ Z^{(n)} + \binom{n}{1} p_{21} Y^{(n-1)} + \binom{n}{2} p_{22} Y^{(n-2)} + \dots + p_{2n} Y + \\ \quad + * + \binom{n}{2} q_{22} Z^{(n-2)} + \dots + q_{2n} Z = 0 \end{cases}$$

ed eseguire su di essa il cambiamento di funzioni e di variabile definito da

$$Y = \alpha y, \quad Z = \alpha z; \quad \xi = \varphi(x) \quad (1).$$

Cominciamo ad eseguire da prima il cambiamento delle funzioni incognite e, per semplicità e brevità di scrittura, ci riferiremo alla sola prima equazione; sostituendo o raccogliendo opportunamente risulta

$$\alpha y^{(n)} + \binom{n}{1} \alpha' y^{(n-1)} + \binom{n}{2} (\alpha'' + p_{12} \alpha) y^{(n-2)} + \dots + \\ + \binom{n}{1} q_{11} \alpha z^{(n-1)} + \left\{ \binom{n}{1} \binom{n-1}{1} q'_{11} \alpha' + \binom{n}{2} q_{12} \alpha \right\} z^{(n-2)} + \dots = 0;$$

(1) Teniamo presente che tali trasformazioni formano un gruppo continuo, infinito, nel senso di Lie e che è il più ampio gruppo di trasformazioni puntuali che lasci invariata la forma del sistema lineare.

È opportuno poi, allo scopo di poter eseguire i necessari confronti e vedere in ciò che il caso generale differisce da quello di $n=2$, riportare i risultati principali ottenuti nei miei precitati lavori, ritrascritti con le notazioni generali adottate nel presente; il sistema completo di invarianti per $n=2$ è dato da

$$\begin{cases} s_1^{(1)} = q_{11} \\ s_2^{(1)} = q_{12} - q'_{11} \\ s_4^{(1)} = 2 q_{11} q''_{11} - 3 (q'_{11})^2 - 4 q_{11}^2 p_{12} \end{cases} \quad \begin{cases} s_1^{(2)} = p_{21} \\ s_2^{(2)} = p_{22} - p'_{21} \\ s_4^{(2)} = 2 p_{21} p''_{21} - 3 (p'_{21})^2 - 4 p_{21} q_{22} \end{cases}$$

al quale sistema si aggiunge l'invariante di peso 2

$$r_2 = p_{12} - q_{22}$$

nel caso che sia nullo q_{11} o p_{21} . Se poi tanto q_{11} che p_{21} sono nulli, si ha l'altro sistema di invarianti

$$\begin{cases} s_2^{(1)} = q_{12} \\ s_6^{(1)} = 4 q_{12} q''_{12} - 5 (q'_{12})^2 - 16 q_{12}^2 p_{12} \end{cases} \quad \begin{cases} s_2^{(2)} = p_{22} \\ s_6^{(2)} = 4 p_{22} p''_{22} - 5 (p'_{22})^2 - 16 p_{22}^2 q_{22} \end{cases}$$

cambiamo ora variabile ponendo $\xi = \varphi(x)$. Se teniamo presente la nota formula dello SCHLÖMILCH

$$\frac{d^n}{dx^n} = \sum_1^n \frac{A_{nk}}{k!} \frac{d^k}{d\xi^k}$$

dove le A_{nk} sono funzioni del tipo $f_n(\xi', \xi'', \dots, \xi^{(n-k+1)})$, di peso n , se facciamo la convenzione di attribuire a $\xi^{(p)}$ e $(\xi')^p$ lo stesso peso p .

Eseguendo la sostituzione ed ordinando risulta

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{A_{nn}}{n!} \frac{d^n y}{d\xi^n} + \left\{ \frac{\alpha A_{n,n-1} + n \alpha' A_{n-1,n-1}}{(n-1)!} \right\} \frac{d^{n-1} y}{d\xi^{n-1}} + \\ & + \left\{ \frac{\alpha A_{n,n-2} + n \alpha' A_{n-1,n-2} + \binom{n}{2} (\alpha'' + p_{12} \alpha) A_{n-2,n-2}}{(n-2)!} \right\} \frac{d^{n-2} y}{d\xi^{n-2}} + \dots \\ & \dots + n \alpha q_{11} \frac{A_{n-1,n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1} z}{d\xi^{n-1}} + \\ & + \left\{ \frac{n q_{11} \alpha A_{n-1,n-2} + \binom{n}{2} (2 q_{11} \alpha' + q_{12} \alpha) A_{n-2,n-2}}{(n-2)!} \right\} \frac{d^{n-2} z}{d\xi^{n-2}} + \dots = 0 \end{aligned}$$

e analogamente per l'altra equazione.

Potremo scrivere simbolicamente il risultato complessivo della trasformazione nella maniera seguente

$$\left[\begin{aligned} & \frac{\alpha A_{nn}}{n!} \frac{d^n y}{d\xi^n} + \frac{\sum_1^n \left\{ \sum_0^h \binom{n}{k} A_{n-k,n-k} (\alpha + p_1)^{(k)} \right\}}{(n-h)!} \frac{d^{n-h} y}{d\xi^{n-h}} + \\ & + \frac{\sum_1^n \left\{ \sum_1^h \binom{n}{k} A_{n-k,n-k} (\alpha + q_1)^{(k)} \right\}}{(n-h)!} \frac{d^{n-h} z}{d\xi^{n-h}} = 0 \\ & \frac{\alpha A_{nn}}{n!} \frac{d^n z}{d\xi^n} + \frac{\sum_1^n \left\{ \sum_1^h \binom{n}{k} A_{n-k,n-k} (\alpha + p_2)^{(k)} \right\}}{(n-h)!} \frac{d^{n-h} y}{d\xi^{n-h}} + \\ & + \frac{\sum_1^n \left\{ \sum_0^h \binom{n}{k} A_{n-k,n-k} (\alpha + q_2)^{(k)} \right\}}{(n-h)!} \frac{d^{n-h} z}{d\xi^{n-h}} = 0, \end{aligned} \right] \quad [3_1]$$

purchè si facciano le convenzioni

$$\alpha^0 = \alpha, \alpha^n = \alpha^{(n)} \quad \begin{cases} (\alpha + p_1)^0 = \alpha, & p_1^0 = 0, & p_1^k = p_{1k}, & q_1^k = q_{1k} \\ (\alpha + q_2)^0 = \alpha, & q_2^0 = 0, & q_2^k = q_{2k}, & p_2^k = p_{2k} \end{cases} \quad (1)$$

Affinchè il sistema trasformato assuma la forma ridotta, dovremo annullare il coefficiente di $\frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-1}}$ nella prima equazione e quello di $\frac{d^{n-1}z}{d\xi^{n-1}}$ nella seconda, il che porta alla equazione di condizione

$$\alpha A_{n,n-1} + n\alpha' A_{n-1,n-1} = 0$$

o anche, tenendo presenti le espressioni di $A_{n,n-1}$ e $A_{n-1,n-1}$ date nella nota ⁽²⁾, all'altra

$$[4] \quad \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{(n-1)}{2} \frac{\xi''}{\xi'} = 0.$$

⁽¹⁾ Le [3₁] del testo estendono, sulla maniera più semplice possibile ad un sistema di due equazioni differenziali di ordine n la formula analoga da noi stabilita per il caso di una sola equazione lineare (vedi CHIELLINI: *Sulla effettiva riduzione di un'equazione differenziale lineare ed omogenea alla forma ridotta di Laguerre-Forsyth*. « Rendic. Sem. Facoltà di Scienze di Cagliari », Vol. VIII, fasc. 1, 1938).

⁽²⁾ Mediante un procedimento ricorrente consigliato dal WILCZYŃSKI (*loc. cit.*, pag. 19 e segg.) e da lui applicato nel caso di $k=1$, $k=2$, otteniamo per i primi valori dell'indice, le seguenti espressioni, che, come si vede, vanno rapidamente complicandosi, ma che crediamo utile riportare perchè non ancora calcolate e perchè sono necessarie nello svolgimento dei calcoli effettivi:

$$\begin{aligned} A_{n,1} &= \xi^{(n)}, \quad A_{n,n} = n! (\xi')^n, \quad A_{n,n-1} = (n-1)! \left\{ \binom{n}{2} \xi'' (\xi')^{n-2} \right. \\ A_{n,n-2} &= (n-2)! \left\{ \binom{n}{3} \xi''' (\xi')^{n-3} + 3 \binom{n}{4} (\xi'')^2 (\xi')^{n-4} \right\} \\ A_{n,n-3} &= (n-3)! \left\{ \binom{n}{4} \xi^{(4)} (\xi')^{n-4} + 10 \binom{n}{5} \xi''' \xi'' (\xi')^{n-5} + 15 \binom{n}{6} (\xi'')^3 (\xi')^{n-6} \right\} \\ A_{n,n-4} &= (n-4)! \left\{ \binom{n}{5} \xi^{(5)} (\xi')^{n-5} + 5 \binom{n}{6} [3 \xi^{(4)} \xi'' + 2 (\xi''')^2] (\xi')^{n-6} + \right. \\ &\quad \left. + 105 \binom{n}{7} \xi''' (\xi'')^2 (\xi')^{n-7} + 105 \binom{n}{8} (\xi'')^4 (\xi')^{n-8} \right\} \\ A_{n,n-5} &= (n-5)! \left\{ \binom{n}{6} \xi^{(6)} (\xi')^{n-6} + 7 \binom{n}{7} [3 \xi^{(5)} \xi'' + 5 \xi^{(4)} \xi'''] (\xi')^{n-7} + \right. \\ &\quad \left. + 70 \binom{n}{8} [3 \xi^{(4)} \xi''^2 + 4 (\xi''')^2 \xi''] (\xi')^{n-8} + 1260 \binom{n}{9} \xi''' (\xi'')^3 (\xi')^{n-9} + \right. \\ &\quad \left. + 945 \binom{n}{10} (\xi'')^5 (\xi')^{n-10} \right\} \\ A_{n,n-6} &= (n-6)! \left\{ \binom{n}{7} \xi^{(7)} (\xi')^{n-7} + 7 \binom{n}{8} [4 \xi^{(6)} \xi'' + 8 \xi^{(5)} \xi'''] (\xi')^{n-8} + \right. \\ &\quad \left. + 14 \binom{n}{9} [27 \xi^{(5)} \xi''^2 + 90 \xi^{(4)} \xi''' \xi'' + 20 (\xi''')^3] (\xi')^{n-9} + 6300 \binom{n}{10} (\xi''')^2 (\xi'')^3 (\xi')^{n-10} + \right. \\ &\quad \left. + 17325 \binom{n}{11} \xi''' (\xi'')^4 (\xi')^{n-11} + 10395 \binom{n}{12} (\xi'')^6 (\xi')^{n-12} \right\}. \end{aligned}$$

3. - Se allora dividiamo entrambe le equazioni del sistema trasformato per il loro primo coefficiente $\frac{\alpha A_{nn}}{n!} = \alpha(\xi')^n$ ed indichiamo i nuovi coefficienti delle equazioni stesse con

$$\binom{n}{k} P_{ik}, \quad \binom{n}{k} Q_{ik} \quad (i=1, 2)$$

avremo, per i primi valori dell'indice

$$\left\{ \begin{aligned} P_{12} &= \frac{1}{(\xi')^2} \left\{ \frac{n-2}{3} \frac{\xi'''}{\xi'} + \frac{(n-2)(n-3)}{4} \left(\frac{\xi''}{\xi'} \right)^2 + (n-2) \frac{\alpha' \xi''}{\alpha \xi'} + \frac{\alpha''}{\alpha} + p_{12} \right\} \\ P_{13} &= \frac{1}{(\xi')^3} \left\{ \frac{n-3}{4} \frac{\xi^{IV}}{\xi'} + \frac{(n-3)(n-4)}{2} \frac{\xi''}{\xi'} \frac{\xi'''}{\xi'} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{8} \left(\frac{\xi''}{\xi'} \right)^3 + \right. \\ &\quad + (n-3) \frac{\alpha' \xi'''}{\alpha \xi'} + \frac{3(n-3)(n-4)}{4} \left(\frac{\xi''}{\xi'} \right)^2 \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{3(n-3)}{2} \frac{\alpha'' \xi''}{\alpha \xi'} + \\ &\quad \left. + \frac{3(n-3)}{2} p_{12} \frac{\xi''}{\xi'} + \frac{\alpha'''}{\alpha} + 3 p_{12} \frac{\alpha'}{\alpha} + p_{13} \right\} \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{1}{\xi'} q_{11} \\ Q_{12} &= \frac{1}{(\xi')^2} \left\{ (n-2) q_{11} \frac{\xi''}{\xi'} + 2 \frac{\alpha'}{\alpha} q_{11} + q_{12} \right\} \\ Q_{13} &= \frac{1}{(\xi')^3} \left\{ (n-3) q_{11} \frac{\xi'''}{\xi'} + \frac{3(n-3)(n-4)}{4} q_{11} \left(\frac{\xi''}{\xi'} \right)^2 + 3(n-3) q_{11} \frac{\alpha' \xi''}{\alpha \xi'} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(n-3)}{2} q_{12} \frac{\xi''}{\xi'} + 3 q_{11} \frac{\alpha''}{\alpha} + 3 q_{12} \frac{\alpha'}{\alpha} + q_{13} \right\} \\ Q_{14} &= \frac{1}{(\xi')^4} \left\{ (n-4) q_{11} \frac{\xi^{IV}}{\xi'} + 2(n-4)(n-5) q_{11} \frac{\xi''}{\xi'} \frac{\xi'''}{\xi'} + \right. \\ &\quad + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2} q_{11} \left(\frac{\xi''}{\xi'} \right)^3 + 4(n-4) q_{11} \frac{\alpha' \xi'''}{\alpha \xi'} + 2(n-4) q_{12} \frac{\xi'''}{\xi'} + \\ &\quad + 3(n-4)(n-5) q_{11} \frac{\alpha'}{\alpha} \left(\frac{\xi''}{\xi'} \right)^2 + \frac{3(n-4)(n-5)}{2} q_{12} \left(\frac{\xi''}{\xi'} \right)^2 + 6(n-4) q_{11} \frac{\alpha'' \xi''}{\alpha \xi'} + \\ &\quad \left. + 6(n-4) q_{12} \frac{\alpha' \xi''}{\alpha \xi'} + 2(n-4) q_{13} \frac{\xi''}{\xi'} + 4 q_{11} \frac{\alpha'''}{\alpha} + 6 q_{12} \frac{\alpha''}{\alpha} + 4 q_{13} \frac{\alpha'}{\alpha} + q_{14} \right\} \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

Introduciamo a questo punto la così detta funzione trasformatrice

$$\eta = \frac{\xi''}{\xi'}$$

da cui anche, per la [4]

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{n-1}{2}\eta ;$$

derivando successivamente si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi''}{\xi'} = \eta, \quad \frac{\xi'''}{\xi'} = \eta' + \eta^2, \quad \frac{\xi^{IV}}{\xi'} = \eta'' + 3\eta\eta' + \eta^3 \dots \\ \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{n-1}{2}\eta, \quad \frac{\alpha''}{\alpha} = -\frac{n-1}{2}\eta' + \frac{(n-1)^2}{4}\eta^2, \\ \frac{\alpha'''}{\alpha} = -\frac{n-1}{2}\eta'' + \frac{3(n-1)^2}{4}\eta\eta' - \frac{(n-1)^3}{8}\eta^3 + \dots \end{array} \right.$$

da cui sostituendo nelle espressioni precedenti, dopo calcoli un po' laboriosi, ma privi di ogni difficoltà, risulta

$$[5] \left\{ \begin{array}{l} P_{12} = \frac{1}{(\xi')^2} \left\{ \frac{-2(n+1)\eta' + (n+1)\eta^2 + 12p_{12}}{12} \right\} \\ P_{13} = \frac{1}{(\xi')^3} \left\{ \frac{-(n+1)\eta'' + 3(n+1)\eta\eta' - (n+1)\eta^3 - 12p_{12}\eta + 4p_{13}}{4} \right\} \\ \dots \end{array} \right.$$

$$[6] \left\{ \begin{array}{l} Q_{11} = \frac{1}{\xi'} q_{11} \\ Q_{12} = \frac{1}{(\xi')^2} \{ q_{11}\eta + q_{12} \} \\ Q_{13} = \frac{1}{(\xi')^3} \left\{ \frac{-2(n+3)q_{11}\eta' + (n+9)q_{11}\eta^2 - 12q_{12}\eta + 4q_{13}}{4} \right\} \\ Q_{14} = \frac{1}{(\xi')^4} \left\{ \frac{-2(n+2)q_{11}\eta'' + 2(4n+11)q_{11}\eta\eta' - (3n+15)q_{11}\eta^3 - 2(n+5)q_{12}\eta' + (n+23)q_{12}\eta^2 - 12q_{13}\eta + 2q_{14}}{2} \right\} \\ \dots \end{array} \right.$$

e formule analoghe si avrebbero per i coefficienti della seconda equazione, scambiando la lettera p con la lettera q e il primo indice 1 con l'indice 2.

4. - Stabilite così le formule [5] e [6], per poter risolvere la questione proposta e cioè quella di determinare un sistema completo di invarianti, facciamo le seguenti considerazioni:

Poichè ogni equazione del sistema ridotto contiene $2n-1$ coefficienti, avremo in totale $2(2n-1)$ coefficienti e quindi per poter stabilire una teoria invariantiva completa dovremo determinare altrettanti $2(2n-1)$ invarianti differenziali lineari.

Un semplice esame delle [5], riguardanti i coefficienti P_{1k} della prima equazione (e delle analoghe riguardanti i coefficienti Q_{2k} della seconda) ci fa vedere che se ne possono immediatamente ottenere $2(n-1)$, osservando che tali relazioni coincidono perfettamente con quelle che si hanno per la determinazione di un sistema completo di invarianti, relativi alle equazioni lineari di una sola funzione incognita⁽¹⁾. E d'altra parte, è naturale che così avvenga, se solo teniamo presente la natura delle equazioni costituenti il nostro sistema differenziale; infatti in ognuna di tali equazioni il complesso dei termini in y è del tutto indipendente da quello dei termini in z , a causa della *linearità* delle equazioni stesse, così che sarà possibile scindere la ricerca degli invarianti in due parti: quella riguardante i coefficienti in y e quella riguardante i coefficienti in z . D'altra parte i termini in y della prima equazione (e quelli in z della seconda) formano una ordinaria equazione differenziale lineare di ordine n .

Ne consegue che gli invarianti relativi a questi coefficienti si otterranno senz'altro da quelli delle equazioni lineari.

Per ragioni di omogeneità e di economia di simboli, indicheremo questa volta con la sola lettera $\theta^{(i)}$, affetta da un indice, tali invarianti e quindi potremo senz'altro scrivere il primo gruppo

(¹) Confronta per es., il nostro lavoro citato a pag. 199, nota (¹).

di $2(n-1)$ invarianti

$$[I_1] \left\{ \begin{aligned} \theta_3^{(1)} &= p'_{13} - \frac{3}{2} p'_{12} \\ \theta_4^{(1)} &= p_{14} - 2p'_{13} + \frac{6}{5} p''_{12} - \frac{3(5n+7)}{5(n+1)} p_{12}^2 \\ \theta_5^{(1)} &= p_{15} - \frac{5}{2} p'_{14} + \frac{15}{7} p''_{13} - \frac{5}{7} p'''_{12} - \frac{10(7n+13)}{n+1} p_{12} \theta_3^{(1)} \\ &\dots \dots \dots \\ \theta_{3,1}^{(1)} &= 6 \theta_3^{(1)} [\theta_3^{(1)}]^n - 7 [\theta_3^{(1)}]^2 - \frac{108}{n+1} p_{12} [\theta_3^{(1)}]^2 \end{aligned} \right.$$

$$[I_2] \left\{ \begin{aligned} \theta_3^{(2)} &= q_{23} - \frac{3}{2} q''_{22} \\ \theta_4^{(2)} &= q_{24} - 2q'_{23} + \frac{6}{5} q''_{22} - \frac{3(5n+7)}{5(n+1)} q_{22}^2 \\ \theta_5^{(2)} &= q_{25} - \frac{5}{2} q'_{24} + \frac{15}{7} q''_{23} - \frac{5}{7} q'''_{22} - \frac{10(7n+13)}{n+1} q_{22} \theta_3^{(2)} \\ &\dots \dots \dots \\ \theta_{3,1}^{(2)} &= 6 \theta_3^{(2)} [q_{23}^{(2)}]^n - 7 [q_{23}^{(2)}]^2 - \frac{108}{n+1} q_{22} [q_{23}^{(2)}]^2 \quad (1) \end{aligned} \right.$$

5. - Rimangono da determinare ancora $2n$ invarianti lineari, che indicheremo con la lettera $\mathfrak{S}^{(i)}$, anche questa volta affetta da un indice, e a questo scopo cominciamo con l'osservazione che le [6] ci fanno subito vedere come q_{14} (e analogamente p_{21}) sia un invariante relativo di peso 1, così che potremo scrivere

$$\mathfrak{S}_1^{(1)} = q_{11} \quad , \quad \mathfrak{S}_1^{(2)} = p_{21} \quad ;$$

(1) WILCZYŃSKI: *loc. cit.*; MONTALDO: *La determinazione effettiva degli invarianti differenziali lineari di un'equazione differenziale lineare dell'ordine n.* «Rend. Semin. Facoltà di Scienze di Cagliari», Vol. VIII, fasc. 4, 1938.

se poi deriviamo la prima delle [6] rispetto alla x risulta

$$\frac{dQ_{11}}{d\xi} \xi' = -\frac{\xi''}{(\xi')^2} q_{11} + \frac{1}{\xi'} q'_{11} = \frac{1}{\xi'} (-\eta q_{11} + q'_{11})$$

cioè $\frac{dQ_{11}}{d\xi} = \frac{1}{(\xi')^2} (-q_{11} \eta + q'_{11})$, da cui segue senz'altro, per la seconda delle [6]

$$Q_{12} - \frac{dQ_{11}}{d\xi} = \frac{1}{(\xi')^2} (q_{12} - q'_{11}).$$

Si ottiene così una seconda coppia di invarianti di peso 2:

$$\mathfrak{I}_2^{(1)} = q_{12} - q'_{11}, \quad \mathfrak{I}_2^{(2)} = p_{22} - p'_{21}$$

e rimangono da determinare $n-2$ coppie di invarianti, relativi ai coefficienti P_{2k} e Q_{1k} , il che otterremo, come si è già accennato in principio, mediante un procedimento di coefficienti indeterminati del tutto analogo a quello consigliato dallo SCHLESINGER⁽¹⁾ per le equazioni differenziali lineari in una funzione incognita e già da me applicato ai sistemi lineari, per il caso di $n=2$; tale procedimento, oltre al vantaggio di richiedere calcoli un po' laboriosi, ma di nessuna difficoltà concettuale, presenta l'altro di dimostrarci contemporaneamente la effettiva esistenza di un sistema completo di invarianti.

Però, prima di procedere a questa ricerca è necessario premettere una opportuna semplificazione delle [6] stesse, per poter ottenere lo scopo⁽²⁾.

Introduciamo i rapporti

$$\bar{Q}_{1k} = \frac{Q_{1k}}{Q_{11}}, \quad \bar{q}_{1k} = \frac{q_{1k}}{q_{11}}$$

⁽¹⁾ Confronta SCHLESINGER: *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*. Band II, Theil I, § 181 e segg. Teubner, Lipsia.

⁽²⁾ Per semplicità di calcoli ci riferiremo esclusivamente ai coefficienti q_{1k} , chè, analogamente si potrebbe procedere con i p_{2k} ; solo nel risultato finale scriveremo le formule per entrambe le equazioni.

ed allora, a partire dalla seconda equazione, le [6] divengono

$$[8] \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{Q}_{12} &= \frac{1}{\xi'} \{ \eta + \bar{q}_{12} \} \\ \bar{Q}_{13} &= \frac{1}{(\xi')^2} \left\{ -\frac{(n+3)}{2} \eta' + \frac{n+9}{4} \eta^2 - 3 q_{12} \eta + \bar{q}_{13} \right\} \\ \bar{Q}_{14} &= \frac{1}{(\xi')^3} \left\{ -(n+2) \eta'' + (4n+11) \eta \eta' - \frac{(3n+15)}{2} \eta^3 - (n+5) \bar{q}_{12} \eta' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n+23}{2} \bar{q}_{12} \eta^2 - 6 \bar{q}_{13} \eta + \bar{q}_{14} \right\} \quad (1) \end{aligned} \right.$$

alle quali è necessario aggregare un'altra relazione, che si ottiene nella maniera seguente: deriviamo logicamente, rispetto alla x , la prima delle [6] e si ottiene

$$\frac{d \log Q_{11}}{d \xi} = \frac{1}{\xi} \left\{ \frac{d \log q_{11}}{d x} - \eta \right\}$$

da cui, ponendo per brevità

$$\bar{R}_{11} = \frac{d \log Q_{11}}{d \xi}, \quad \bar{r}_{11} = \frac{d \log q_{11}}{d x}$$

segue l'ulteriore relazione cercata

$$[8_1] \quad \bar{R}_{11} = \frac{1}{\xi'} (-\eta + \bar{r}_{11}).$$

Ciò fatto, per determinare un primo nuovo invariante, consideriamo le altre relazioni

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d \bar{R}_{11}}{d \xi} &= \frac{1}{(\xi')^2} \{ -\eta' + \eta^2 - \bar{r}_{11} \eta + \bar{r}'_{12} \} \\ \frac{d \bar{Q}_{12}}{d \xi} &= \frac{1}{(\xi')^2} \{ -\eta' + \eta^2 - \bar{q}_{12} \eta + \bar{q}'_{12} \} \\ \bar{R}_{11} \bar{Q}_{12} &= \frac{1}{(\xi')^2} \{ \eta^2 - \bar{q}_{12} \eta - \bar{r}_{11} \eta + \bar{r}_{11} \bar{q}_{12} \}, \end{aligned} \right.$$

(1) Tale semplificazione, oltre al vantaggio di abbassare di un'unità l'esponente del modulo di trasformazione (ξ') e quindi di condurci a calcoli più semplici, presenta quello di far sparire esplicitamente q_{11} , così che le [8] acquistano un aspetto assai analogo a quello delle p_{1k} .

dopo di che, indicando con A, B, C, D, E dei coefficienti numerici, per ora del tutto arbitrarii, calcoliamoci l'espressione:

$$J = \bar{Q}_{13} + A \frac{d\bar{Q}_{12}}{d\xi} + B \frac{d\bar{R}_{11}}{d\xi} + C \bar{R}_{11} \bar{Q}_{12} + D \bar{R}_{11}^2 + E \bar{Q}_{12}^2;$$

avremo senz'altro

$$[9] \quad J(\xi) = \frac{1}{(\xi')^2} \left\{ J(x) - \left(\frac{n+3}{2} + A + B \right) \eta' + \right. \\ \left. + \left(\frac{n+9}{4} + A + B + C + D + E \right) \eta^2 - (A + C + 2E + 3) q_{12} \eta - (B + C + 2D) r_{11} \eta \right\}$$

e vediamo se è possibile di determinare i coefficienti, in guisa che si abbia

$$A + B + \frac{n+3}{2} = 0, \quad A + B + C + D + E + \frac{n+9}{4} = 0, \quad A + C + 2E + 3 = 0, \quad B + C + 2D = 0.$$

Eseguito i calcoli otteniamo

$$A = -\frac{n+9}{4}, \quad B = -\frac{n-3}{4}, \quad C = \frac{n-3}{4}, \quad D = E = 0$$

ed allora dalla [9] si deduce che l'espressione

$$\bar{q}_{13} - \frac{n+9}{4} \bar{q}'_{12} - \frac{n-3}{4} \bar{r}'_{11} + \frac{n-3}{4} \bar{r}_{11} \bar{q}_{12}$$

è un invariante relativo di peso 2. Introducendo in questa la [7] ed eseguendo i calcoli segue che

$$\mathfrak{I}_4^{(1)} = q_{11} q_{13} - \frac{n+9}{4} q_{11} q'_{12} + \frac{n+3}{2} q'_{11} q_{12} - \frac{n-3}{4} q_{11} q''_{11} + \frac{n-3}{4} (q'_{11})^2$$

è un nuovo invariante relativo di peso 4; analogamente poi avremo l'altro invariante di peso 4

$$\mathfrak{I}_4^{(2)} = p_{21} p_{23} - \frac{n+4}{9} p_{21} p'_{22} + \frac{n+3}{2} p'_{21} p_{22} - \frac{n-3}{4} p_{21} p''_{21} + \frac{n-3}{4} (p'_{21})^2.$$

Procedendo in maniera analoga potremo trovarci un'altra coppia di invarianti, riguardanti i coefficienti $Q_{1,4}$ e $P_{2,4}$ e così di seguito.

6. - Ottenuti così i vari invarianti relativi ai coefficienti $Q_{1,k}$ e $P_{2,k}$, è da fare un'osservazione che ci semplifica, per il caso di $n \geq 3$, notevolmente il calcolo degli invarianti $\theta_k^{(2)}$; infatti per ottenere un sistema completo relativo ai coefficienti $P_{1,k}$ e $Q_{2,k}$ (com'è ben noto dalla teoria delle equazioni lineari) dobbiamo aggiungere agli invarianti lineari $\theta_3^{(2)}, \theta_4^{(2)}, \dots, \theta_n^{(2)}$, che sono in numero di $2(n-2)$ altri due invarianti di peso 8 (non più lineari) e cioè le così dette *quadriderivate* $\theta_{3,1}^{(2)}$ di $\theta_3^{(2)}$, ottenendosi così appunto i $2(n-1)$ invarianti necessari.

Però nel caso dei sistemi, non appena n è maggiore di 2, possiamo sostituire alle quadriderivate di $\theta_3^{(2)}$ quelle di $\mathfrak{S}_1^{(1)} = q_{11}$, $\mathfrak{S}_1^{(2)} = p_{21}$, che, essendo invarianti di peso 1, daranno luogo a quadriderivate di peso 4, invece che di peso 8. Infatti, ricordando il risultato fondamentale di FORSYTH, relativo alla quadriderivata $\theta_{m,1}$ di un invariante θ_m :

$$\theta_{m,1} = 2m \theta_m \theta_m'' - (2m+1) (\theta_m')^2 - \frac{12m^2}{n+1} p_2 \theta_m^2,$$

che risulta di peso $2(m+1)$, otterremo senz'altro i due nuovi invarianti di peso 4

$$\theta_{1,1}^{(1)} = 2q_{11} q_{11}'' - 3(q_{11}')^2 - \frac{12}{n+1} q_{12} q_{11}^2, \quad \theta_{1,1}^{(2)} = 2p_{21} p_{21}'' - (p_{21}')^2 - \frac{12}{n+1} q_{22} p_{21}^2 \quad (1)$$

che converrà sostituire agli altri $\theta_{3,1}^{(2)}$

7. OSSERVAZIONE. - Il procedimento tenuto cade evidentemente in difetto, se $q_{1,1}$ si annulla; ma in tal caso le [6] diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{12} = \frac{1}{(\xi')^2} q_{12} \\ Q_{13} = \frac{1}{(\xi')^3} \{ -3q_{12} \eta + q_{13} \} \\ Q_{14} = \frac{1}{(\xi')^4} \left\{ -(n+5)q_{12} \eta' + \frac{n+23}{2} q_{12} \eta^2 - 6q_{13} \eta + q_{14} \right\} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

(1) Questi invarianti sono quelli da noi ottenuti direttamente [vedi nota (1), pag. 201] nella ricerca degli invarianti differenziali relativi ad un sistema di 2 equazioni lineari del 2° ordine.

ed allora si procederà con $q_{1,2}$ e $Q_{1,2}^{(1)}$ come, nel caso precedente, si è proceduto con q_{11} e $Q_{1,1}$; avremo

$$\frac{d Q_{1,2}}{d \xi} = \frac{1}{(\xi')^3} \{-2 q_{1,2} \eta + q'_{1,2}\}$$

da cui senz'altro, l'invariante relativo di peso 3

$$S_3^{(1)} = q_{1,2} - \frac{3}{2} q'_{1,2} \quad (2)$$

Dopo di che si introdurrebbero le espressioni

$$R_{1,2} = \frac{d \log Q_{1,2}}{d \xi}, \quad r_{1,2} = \frac{d \log q_{1,2}}{d x}$$

da cui

$$R_{1,2} = \frac{1}{\xi'} \{-2 \eta + r'_{1,2}\},$$

e i rapporti

$$\bar{Q}_{1k} = \frac{Q_{1k}}{Q_{1,2}}, \quad \bar{q}_{1k} = \frac{q_{1k}}{q_{1,2}}$$

per mezzo dei quali otterremmo le espressioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Q}_{1,3} = \frac{1}{\xi'} \{-3 \eta + \bar{q}'_{1,3}\} \\ \bar{Q}_{1,4} = \frac{1}{(\xi')^2} \left\{ -(n+5) \eta' + \frac{n+23}{2} \eta^2 - 6 \bar{q}_{1,3} \eta + \bar{q}'_{1,4} \right\} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. ;$$

dopo si procederebbe in maniera del tutto analoga al caso generale. Si troverebbe per esempio che

$$\bar{q}_{1,4} = \frac{(n+23)}{6} \bar{q}'_{1,3} - \frac{n-13}{4} \bar{r}'_{1,2} + \frac{n+13}{12} \bar{r}_{1,2} \bar{q}_{1,3}$$

(1) Risulta che $q_{1,2}$, in questo caso è un invariante di peso due.

(2) In generale, se fosse $q_{11} = q_{12} = \dots = q_{1,k-2} = 0$, $q_{1,k-1} \neq 0$ si avrebbe l'invariante $s_k^{(1)} = q_{1k} - \frac{k}{2} q'_{k-1}$. È poi quasi superfluo osservare che se $q_{11} = 0$, $q_{12} \neq 0$ ci serviremmo di q_{12} per stabilire la quadriderivata $q_{2,1}^{(1)}$ di peso sei. Se invece anche q_{12} fosse zero, potremmo servirci, a questo scopo, indifferente-mente di q_{13} o di q_3 (che la quadriderivata risulterebbe ugualmente di peso 8).

risulta un invariante relativo di peso due e che sostituendo ai rapporti $\bar{r}_{12}, \bar{q}_{13}, \bar{q}_{14}$ le loro espressioni, si avrebbe un invariante relativo di peso quattro per $q_{1,4}$ e così di seguito. Ma non crediamo necessario dilungarci ulteriormente su di ciò.

8. - Stabilita nei numeri precedenti la maniera di ottenere un sistema di invarianti relativi, dimostriamo, anche per i sistemi, il così detto *Teorema di chiusura* o *Teorema di Laguerre-Forsyth*:

Dati gli invarianti

$$\theta_m^{(1)}, \theta_m^{(2)}; \mathfrak{S}_m^{(1)}, \mathfrak{S}_m^{(2)}$$

come funzioni arbitrarie delle x e le due quadriderivate del primo dei $\mathfrak{S}^{(i)}$ ($i=1, 2$) diverso da zero, restano completamente determinati i coefficienti del sistema differenziale [3].

Infatti dagli invarianti $\mathfrak{S}_m^{(i)}$ otteniamo senz'altro, per via ricorrente, i q_{1k}, p_{2k} e dalle due quadriderivate di $\mathfrak{S}^{(i)}$ i due coefficienti p_{12}, q_{22} , dopo di che, sempre per via ricorrente, dagli invarianti $\theta_k^{(i)}$, avremo i p_{1k} e q_{2k} .

Se ne deduce che il sistema di invarianti da noi ottenuto costituisce un *sistema fondamentale*; da esso potremo allora ottenere immediatamente il corrispondente sistema fondamentale di *invarianti assoluti*, ponendo per esempio

$$J_k^{(i)} = \frac{\theta_k^{(i)}}{\{\mathfrak{S}_1^{(i)}\}^k}, \quad J_k^{(i)} = \frac{\mathfrak{S}_k^{(i)}}{\{\mathfrak{S}_1^{(i)}\}^k} \quad (1)$$

In una prossima nota vedremo come si possano utilmente sfruttare gli invarianti lineari, da noi costruiti, per lo studio dell'integrazione dei sistemi differenziali lineari.

(1) Se il primo dei $\mathfrak{S}^{(i)}$ diverso da zero fosse $\mathfrak{S}_k^{(i)}$ considereremo i rapporti $\frac{\{\theta_m^{(i)}\}^k}{\{\theta_k^{(i)}\}^m}$.

CONTRIBUTO ALLA CONOSCENZA DELLA FAUNA DEL LAGO DI SCANNO (ABRUZZO) (*)

GIANNA LANZI

SUMMARIVM. — Percensentur species planctonicae et bentonicae, quae ab A. Ghigi, F. P. Pomini, et ab Autrice ipsa in Betifulensi lacu (nunc « Lago di Scanno » vocatur), qui in Sannio situs est. Investigationes biometricae comparativae peractae sunt de *Ancylastro fluviatili* deque *Salmones*.

Salendo da Anversa verso Scanno, per la strada carrozzabile che si addentra tortuosa fra le ripide pendici di nude montagne calcaree bianche e grigie, si costeggia il Sagittario, che scende dalla montagna e scorre sul fondo ineguale del profondo burrone che le sue acque rapide sono riuscite a scavare nella solida roccia.

Sono queste le cosiddette « Gole del Sagittario », lunghe ben 12 km. e imponenti nel loro profilo netto e aspro: immane opera di erosione fluviale.

La Valle del Sagittario fa parte dei Peligni Sulmonesi che racchiudono nelle loro vallate, strette e riparate, molti graziosi e ridotti paeselli, come quello di Scanno, dove le tradizioni si tramandano di generazione in generazione e, sia per ciò che riguarda il genere di vita, le usanze religiose e il costume stesso delle donne, rimasto inalterato, si notano nette tendenze orientali. Sembra infatti che gli antichi Peligni, abitatori di questa zona, provenissero dalla Persia.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi nella Tornata ordinaria dell'8 febbraio 1948.

Il paese di Scanno situato in provincia di Aquila a m. 1030 s. m., e che dista dal lago km. 1,5 in linea d'aria, è disteso su uno sprone che, dalla Serra di Carapale, si deprime verso la valletta del Tasso, ed è chiuso da ripide pendici che ne limitano l'orizzonte; anche la vista del lago è impedita da una collinetta che prende il nome di Sant'Egidio.

Il lago a m. 930 s. m. a Sud della conca di Sulmona è, dopo il prosciugamento del Fucino, il maggior lago dell'Abruzzo.

Si presenta come una coppa verde racchiusa dalle più elevate catene dell'Appennino Centrale: a SO la Montagna Grande col Monte Argatone (m. 2151) e a NE il Monte Genzana di m. 2176.

È un tipico lago di frana. Sul fianco SO del Monte Genzana si nota infatti la zona di distacco dei materiali di frana, che si sono depositati in basso a formare un ampio macereto che, sbarrando il corso del Tasso, ha dato luogo così alla formazione del bacino lacustre che occupa una superficie media di kmq. 1,1199.

Il macereto, rivestito in parte di vegetazione, è tuttora riconoscibile per la deposizione caotica dei massi e dei detriti che formano altre piccole conche periodicamente ripiene d'acqua, come il Cupaglione, il Lago Buono, e il Laguccio che si possono considerare derivazioni del Lago di Scanno.

Riguardo all'età della frana, a parte le varie leggende sull'argomento, è parere concorde di tutti i geologi che sia avvenuta in epoca non storica.

La forma del lago di Scanno è abbastanza regolare: quasi di rettangolo; solo nella parte meridionale il Monte S. Egidio forma un promontorio che separa due insenature di diversa grandezza.

Principale immissario del lago è il torrente Tasso che raggiunge in piena ordinaria la portata di mc. 8 al secondo, segue Fosso Cunicelle e infine Fosso Terratta con una portata minima.

* * *

Le acque del lago hanno oscillazioni termiche molto ampie, specialmente negli strati superficiali e risentono molto delle variazioni della temperatura ambiente; durante l'inverno congela spesso lungo le rive, di rado completamente; la temperatura media è di 21°5'.

La profondità massima è di m. 33, mentre la media è di m. 24,50. Si verificano due periodi di piena in rapporto alle precipitazioni: uno maggiore da aprile a maggio ed uno minore da novembre a dicembre.

La trasparenza delle acque è piuttosto limitata e il fatto è dovuto, almeno in parte, alla decomposizione dei detriti organici offerti dalla macroflora acquatica abbondante soprattutto lungo le rive delle insenature meridionali.

Le sponde del lago presentano i più svariati aspetti: mentre presso il vecchio Santuario della Madonna del Lago, si notano annose querce che ombreggiano spiagge sassose, nella parte meridionale si rinven- gono angoli solitari con filari di ontani; le rive rocciose sono coro- nate da rade ginestre e le strisce piane presentano un orlo di folti canneti.

Il presente lavoro tende ad ampliare le conoscenze sulla fauna di questo Lago.

Già nel 1923 il prof. ALESSANDRO GHIGI riportò da una escursione in quella parte della regione abruzzese alcuni materiali raccolti nel lago.

Le ricerche furono continuate dallo stesso GHIGI e dal dott. FRAN- CESCO PRO POMINI nell'estate del 1940.

Io fui a Scanno nel luglio 1942 e fra l'agosto e il settembre del 1943 e ne riportai materiale zoologico vario, che ho sottoposto ad at- tento esame e che forma, insieme ai materiali precedentemente raccolti dal GHIGI e dal POMINI, l'oggetto di questa breve trattazione.

PLANCTON (1)

Una parte importante delle mie ricerche e del mio studio riguarda il plancton del lago.

Ho cominciato ad eseguire pescate in condizioni normali di tem- peratura, con lago assolutamente calmo ed illuminato dal sole.

I carichi planctonici comprendevano:

FLAGELLATI

Ceratium hirundinella Lang.

(1) Ringrazio La Dr. Lidia Pirocchi che ha riveduto le determinazioni del materiale planctonico.

ROTIFERI

Anuraea quadrata Ehrbg.

Anuraea falculata Ehrbg.

Asplanchna priodonta Gosse.

Filinia longiseta Ehrbg.

Brachionus calyciflorus o *Br. pala* Ehrbg.

Brachionus bakeri O. F. Müller.

Brachionus mehleri O. F. Müller, che diversifica dalla forma descritta dagli Autori poichè presenta le due spine maggiori anteriori seghettate.

Keratella cochlearis Gosse.

Keratella cochlearis Gosse. var. *tecta* Gosse.

Polyarthra trigla Ehrbg.

Monostyla lunaris Ehrbg.

Monostyla quadridentata Ehrbg.

Pedalia mira Barrois.

CLADOCERI

Daphnia pulex De Geer.

Daphnia magna Strauss.

Simocephalus vetulus O. F. Müller.

Ceriodaphnia quadrangula O. F. Müller.

Chydorus sphaericus O. F. Müller.

Bosmina longirostris O. F. Müller.

Diaphanosoma brachyurum Lievin.

COPEPODI

Macrocylops albidus Jurine.

Cyclops strenuus Fischer. in tutte le forme di sviluppo.

Cyclops albidus Jurine.

Per studiare la distribuzione delle varie specie, ho stabilito diverse stazioni di pescata a profondità varie e a differenti distanze dalla riva.

Nelle acque superficiali la vita è scarsissima: vi è materiale inerte galleggiante fra il quale appaiono spoglie di Copepodì e alcuni Flagellati, quasi tutti con principî di scissione.

A due metri di profondità si comincia ad avere carichi abbondanti con Flagellati numerosi, Alghe unicellulari, alcuni Naupli e, solo eccezionalmente, Copepodì adulti.

L'elemento dominante di queste pescate è dato tuttavia dai Rotiferi. Sono presenti tutte le forme elencate con maggiore abbondanza per i *Brachionidi*, le *Filinia* e *Polyarthra* e specialmente le *Asplanchna* che ho trovato in gran numero in ogni stazione di raccolta traendone conferma della loro adattabilità in qualsiasi ambiente.

Bosmina longirostris è quasi sempre presente, ma in numero molto scarso. Alla profondità di m. 2,5 l'aspetto del materiale raccolto è quasi simile al precedente.

Mentre a m. 3 o 4 di profondità si ha prevalenza netta di Cladoceri e di Flagellati, pur rimanendo presenti tutte le forme precedenti, alla profondità di m. 5 o 6 il quadro della popolazione si fa alquanto più scarso, con discreto numero di Rotiferi, rari Flagellati e fanno la loro comparsa i Copepodì.

A m. 7 di profondità l'orizzonte cambia completamente: si hanno forme adulte di Copepodì fra molto detrito vegetale, mentre sono presenti, ma scarsi, Flagellati e Cladoceri.

Aumentando la profondità il carico si fa via via più abbondante, arricchendosi di altre forme di Rotiferi e precisamente: delle *Anuraea quadrata* e *falculata*; prevalgono ancora i Copepodì adulti fra i quali numerose le femmine ovigere e i Naupli.

Tale quadro resta pressochè immutato alla profondità di 15 metri e oltre.

Ho compiuto altre pescate a varie profondità avvicinandomi alla riva ed ho notato fra i Cladoceri abbondanza di *Daphnia magna* e *Daphnia pulex*.

Da quanto precede ho tratto la conclusione che in alto lago, con acque illuminate dal sole, il carico si arricchisce, specialmente per ciò che riguarda la presenza dei Copepodì, in ragione diretta alla profondità, mentre nelle zone più prossime alla riva, in ombra, *Cyclops* adulti e Naupli appaiono anche in zone relativamente superficiali.

Ciò conferma il fototropismo delle società limnetiche, con relativi spostamenti verticali ed orizzontali verso le zone oscure e profonde, o verso i recessi ombrosi della riva, quando le acque sono illuminate dal sole: fatto già dimostrato e documentato da RINA MONTI nelle sue ricerche sulla « vita dei laghi alpini », e da altri Autori.

Probabilmente vi è anche un fenomeno di reotropismo negativo poichè nelle zone di corrente (foci degli immissari) le pescate planctoniche hanno dato esito negativo.

In complesso la fauna planctonica del lago di Scanno è abbondante e particolarmente ricca di Rotiferi, sia qualitativamente che quantitativamente e il cui numero notevole dipende dal fitoplancton che costituisce il loro alimento favorito: vivono infatti di preferenza sullo strato di alghe natanti di cui si nutrono.

Oltre a questo, a costituire la massa principale dei piccoli animali pelagici che formano il pascolo favorito dei pesci, entrano in larga misura i Copepodi ed i Cladoceri con poche specie ma con abbondanza di individui.

Da notare inoltre fra i Protozoi, numerosi Flagellati fra i quali il *Ceratium hirundinella* ed altre forme non bene identificate.

Concludendo: il plancton del Lago di Scanno è scarsamente ricco di specie; in complesso la maggioranza di queste specie conta numerosi individui, onde esso appare quantitativamente ricco e spiega l'acclimazione e il grande sviluppo numerico di *Coregonus* che, come vedremo più innanzi, vi sono stati importati.

BENTOS

Per quanto riguarda il Benthos ho rinvenuto abbondante materiale variamente distribuito:

PORIFERI ⁽¹⁾

Ephidatia mülleri Lichberkuhn., poche croste raccolte dal GHIGI e dal POMINI sotto ai sassi della riva meridionale.

(1) Ringrazio il Prof. CELSO GUARESCHI, il quale ha avuto la cortesia di determinare le due specie di spugne.

Ephidatia fluviatilis Lichberkuhn., una sola ramificazione intensamente verde raccolta dal GHIGI su una foglia di *Carex* lungo la riva sottostante M. Genzana.

DISCOFORI ⁽¹⁾

Glossosiphonia stagnalis Linneo.

Trocheta subviridis Dutrochet.

Ambedue le specie si rinvennero su tutta la riva occidentale ricca di canne, sotto ai sassi, aderenti ai fusti delle canne stesse.

MOLLUSCHI PROSOBRANCHI ⁽²⁾

Bythinia tentaculata Linneo. Le sue dimensioni sono molto ridotte, non raggiungendo che mm. 5-6 di lunghezza di fronte ai 10-15 mm. che si possono considerare la grandezza normale di tale specie. Non di rado si trova su pietre sommerse accanto a depositi gelatinosi di uova tenacemente fissate. Il tratto di riva preferito da questa specie è quello compreso fra le foci di Fosso Cunicelle e del Tasso e, oltre il Promontorio di S. Egidio, del Torrente Terratta, mentre va facendosi sempre meno frequente fino a mancare del tutto nella riva settentrionale.

MOLLUSCHI POLMONATI

Limnaea Radix ovata Draparnaud. Mentre di solito la dimensione di questa *Limnaea* varia da un minimo di 13 a un massimo di 33 mm., quelle trovate a Scanno raggiungono raramente i 15 mm., mentre la maggioranza oscilla fra i 12 e i 13 mm. Questa *Limnaea* è distribuita su tutta la riva del lago ed è ricoperta molto spesso di limo, come se preferisse tenersi nascosta; sulle brevi spiagge sassose e lungo le rive rocciose gli esemplari sono in numero ridotto.

⁽¹⁾ Ringrazio la Dott. LYDIA DEQUAL BALDASSERINI che ha avuto la cortesia di determinare le sanguisughe.

⁽²⁾ Le determinazioni dei molluschi sono state controllate dal Prof. CARLO PIERSANTI, che ringrazio vivamente.

Limnaea peregra O. F. Müller. Ha dimensioni ancora minori della precedente. Si trova solo nella zona compresa fra le foci di Fosso Cunicelle e il torrente Tasso, cioè dove le acque hanno carattere torrentizio.

Limnaea auricularia Linneo. Si trova sempre insieme alla *Limnaea peregra*.

Limnaea (Galba) truncatula O. F. Müller. Si trova sempre in numero ridotto nella conca di S. Egidio e sulla sponda occidentale, spesso fuori dall'acqua e su erbe e piante acquatiche.

Planorbis (Tropidiscus) carinatus O. F. Müller. Numeroso e uniformemente distribuito sulla riva del lago; è di media grandezza: arriva frequentemente ai 15 mm. di diametro e 3 o 4 di spessore. Ho notato che le forme viventi in acqua corrente sono più leggere e trasparenti.

Succinea putres Linneo. Trovata esclusivamente nella parte meridionale del lago in un tratto di riva nettamente paludoso, su piante acquatiche, sovente anche a fior d'acqua.

Succinea pfafferi Rossmassler. Si rinviene insieme alla precedente nella stessa zona.

Ancylastrum fluviatile O. F. Müller. Mi sono soffermata in modo particolare sullo studio di questo piccolo mollusco, sulla sua morfologia, sul suo modo di vita.

La sua conchiglia si presenta, negli esemplari di Scanno, con l'apice appuntito, curvo all'indietro e leggermente a sinistra; l'apertura ovale è leggermente più larga nella parte anteriore; l'interno è biancastro, debolmente madreperlaceo; l'esterno presenta ben evidenti le strie circolari di accrescimento.

Dall'apertura sporge il piede ampio, mediante il quale l'animale si fissa stabilmente alle roccie e ai sassi resistendo, nei punti di corrente, alla forza dell'acqua. Ricerca la semioscurità e infatti l'ho rinvenuto sempre aderente ai sassi nella loro parte inferiore.

Ho eseguito inoltre uno studio biometrico tendente a rilevare le differenze nei caratteri della conchiglia, fra la popolazione di *Ancylastrum* del lago di Scanno (Abruzzo) ed una popolazione del Piemonte.

Il numero degli esemplari studiato è stato di 300 per l'Abruzzo e 78 per il Piemonte. Questi ultimi raccolti nella Valle Cannobina (Prov. di Novara); valle che si estende da Cannobio sul Lago Maggiore a Finero che si trova ad una altitudine di circa m. 700 sul livello del mare.

Già durante la misurazione, ho notato una differenza notevole nella consistenza della conchiglia, risultando più fragile quella del Piemonte in confronto a quella di Scanno. Ciò dipende evidentemente dai terreni che racchiudono i bacini dove tali molluschi sono stati raccolti. Infatti le catene montagnose che circondano il lago di Scanno sono in prevalenza calcaree, la roccia sulla quale sono stati trovati gli esemplari della Valle Cannobina è una roccia scistoso-cristallina.

In correlazione con la diversità d'ambiente si avrebbe dunque una diversa calcificazione della conchiglia.

Per definire meglio tale differenza ho determinato il peso delle conchiglie delle due popolazioni di *Ancylastrum*. Tali pesi mi hanno dato come media etg. 0,52 per la conchiglia di Scanno e etg. 0,40 per quella del Piemonte, confermando la maggiore fragilità di quest'ultima rispetto alla prima.

Per rilevare differenze nella forma della conchiglia ho eseguito sui singoli esemplari le seguenti misure:

Larghezza massima dello stoma: indicata con la lettera A.

Lunghezza massima dello stoma: indicata con la lettera B.

Distanza massima dall'umbone all'orlo dello stoma nella parte concava: indicata con la lettera C.

Distanza massima dall'umbone all'orlo dello stoma nella parte convessa: indicata con la lettera D.

Di tali misure ho calcolato i rapporti: $\frac{A}{B}$ e $\frac{D}{C}$ e infine dei valori delle singole misure e dei rapporti ho determinato la media aritmetica.

Osservando comparativamente i valori delle medie delle singole misure, si nota che nella popolazione del Piemonte tali valori sono costantemente superiori a quelli della popolazione dell'Abruzzo, risultando così una conchiglia di dimensioni maggiori per il Piemonte.

Le medie dei rapporti $\frac{A}{B}$ e $\frac{D}{C}$ indicano che le conchiglie degli esemplari d'Abruzzo presentano una forma meno schiacciata delle altre, per cui l'umbone è meno alto rispetto al piano della bocca.

Riassumendo: con molta probabilità, la variabilità riscontrata della popolazione di Scanno fa pensare che questa sia composta di diversi ecotipi, cosa facilmente spiegabile dal fatto che gli esemplari sono stati raccolti in diversi punti della riva del lago che non presenta le stesse caratteristiche d'ambiente.

In ultima analisi la popolazione di Scanno presenta conchiglia di dimensioni minori, guscio più resistente e forma meno schiacciata, più convessa e variabile.

Riguardo al colore si presentano più giallastre quelle del Piemonte, mentre quelle di Scanno sono quasi bianche.

Non esistono differenze sensibili nella forma del peristomio.

Questi dati consiglierebbero di eseguire una più accurata ricerca biometrica sugli *Ancylastrum* di diverse stazioni italiane per accertare se questa specie possa essere distinta in razze locali; occorrerà inoltre scegliere esemplari completamente adulti.

CROSTACEI

Potamobius fluviatilis (Fabr.). Rinvenuto lungo il corso del Torrente Tasso.

LARVE ACQUATICHE DI INSETTI

Efemerotteri fam. *Baetidae*.

Plecotteri fam. *Nemuridae*, gen. *Protonemura*.

Tali larve sono molto numerose specialmente sulle rive degli immissari.

Tricotteri fam. *Limnophilidae*, gen. *Limnophilus*. Per quanto riguarda, in genere, la distribuzione delle larve acquatiche di insetti, ho notato che esse si trovano su tutte le rive del lago, ad eccezione delle sponde rocciose, ma, mentre le larve di Efemerotteri si incontrano in acque tranquille, quelle dei Tricotteri abitano tanto le pietre del fondo, quanto quelle investite dal filo della corrente, e non sono rare nelle acque di sfocio.

Le larve di Plecotteri si trovano abitualmente in acque calme, tuttavia non mancano anche in acqua corrente.

Alcuni esemplari raccolti dal GHIGI sono infatti caratteristici per la forma convessa che ha assunto l'addome per meglio ade-

rire ai piccoli fusti o ai ciottoli rotondeggianti che servono loro di sostegno, e aumentare così la resistenza alla forza della corrente.

Più scarse sono le larve di:

Odonati fam. *Agrionidae*, gen. *Agrion*.

PESCI

Salmo ghigii Pomini. Le caratteristiche della trota di Scanno sono state descritte dal compianto Dott. FRANCESCO PIO POMINI nel suo lavoro: « Ricerche sui *Salmo* dell'Italia Peninsulare ». Tale trota viene considerata dall'Autore come specie distinta poichè per quanto riguarda la colorazione, il rapporto della lunghezza totale del capo per la lunghezza della mascella e i valori medi delle unità della colonna vertebrale, risulta diversa dalle altre trote italiane.

Gli esemplari vennero raccolti dal POMINI nei due maggiori immissari del lago: il torrente Tasso e Fosso Cunicelle che egli chiama rispettivamente Sagittario Superiore e Rio del Piano.

È evidente che, se la diversa denominazione del Fosso Cunicelle non porta a nessuna conseguenza, non altrettanto si può dire per la errata denominazione del torrente Tasso ritenuto dall'Autore un tratto del Sagittario.

Il POMINI infatti scrive: « ...ebbi occasione di pescare un centinaio di trote nel corso superiore del Sagittario che è immissario ed emissario del lago di Scanno ».

Partendo da questo presupposto l'Autore confronta gli esemplari da lui raccolti con quelli del medio corso del Sagittario (presso Sulmona) descritti da HENKING, e constata che, pur non essendo identici, le differenze non sono rilevanti e che quindi si possono ritenere appartenenti allo stesso modello differenziatosi in relazione alla diversità ambientale che i vari tratti del fiume (a monte e a valle del lago) presentano.

In contraddizione a ciò, gli studi morfologici della zona hanno dimostrato, come ho già accennato, che il lago di Scanno è un bacino chiuso, privo quindi di emissario. Inoltre le sorgenti del Sagittario sono a circa due e più km. a valle del lago e, se pur

sembra accertato che siano in parte alimentate da acque provenienti dal lago stesso, tali acque vi giungono per infiltrazione e non permettono quindi il passaggio di trote dal bacino di Scanno a quello del Sagittario e viceversa.

Ci troviamo quindi di fronte a due bacini ben distinti, popolati da *Salmo* appartenenti ad una stessa specie, forse distinta in due razze locali, diversa da quelle del resto dell'Italia; inoltre poichè non esistono notizie di immissione di trote nel Sagittario e neppure nei corsi d'acqua a monte del lago di Scanno, il problema è interessante e meriterebbe una accurata ricerca da parte degli ittiologi.

Attualmente nel lago di Scanno la trota è piuttosto rara, forse in seguito all'intorbidamento delle acque, conseguenza del diboscamento.

Scardinius erythrophthalmus Linneo o Scardola conosciuto in paese col nome di Antico. Non se ne conosce la data di immissione.

Cyprinus carpio Linneo immessa nel 1813.

Tinca vulgaris Cuvier. Fu immessa dal lago Fucino nel 1813 ed ha attecchito molto bene.

Barbus barbus Cuvier immesso nella stessa epoca della specie precedente è in via di scomparsa.

Coregonus elveticus Fatio. Chiamato localmente Orione, fu immesso nel 1926 con avanotti ricavati da riproduttori dei laghi laziali (Bolsena, Bracciano e Vico). La specie vi si è acclimata bene tanto che negli anni successivi venne eseguito l'allevamento artificiale sul posto. Attualmente è il pesce più abbondante che si trovi nel lago.

Anguilla vulgaris Flem. è stata immessa nel 1863 ma è in via di scomparsa.

Da quanto precede risulta che l'unico pesce indigeno è la trota.

BIBLIOGRAFIA

- BALDI E., *Note zoologiche sopra alcuni laghi della Presanella*. «Memorie del Museo di Storia Naturale della Venezia Tridentina», vol. I, fasc. 3-4. Trento, 1932.
- *Relazione preliminare sulle ricerche al Lago di Tovel*. «Studi Trentini di Scienze Naturali». Annata XIV, fasc. 3, 1938.
- BRAUER A., *Die süsswasserfauna Deutschlands*. Jena, 1909.
- CHEMIN E., *Les mollusques d'eau douce*. Parigi, 1926.
- COLLAROSSO e MANCINI, *Storia di Scanno e guida della Valle del Sagittario*. Aquila, 1921.
- GERMAIN L., *La faune de France (Mollusques)*. Paris, 1913.
- MAGRINI G. P., *Limnologia (Studio scientifico dei laghi)*. Milano, 1907.
- MONTI R., *La vita negli alti laghi alpini*. «Natura», vol. I, Pavia 1910.
- *La circolazione della vita nei laghi*. «Rivista mensile di Pesca», anno IV, 1907.
- *Limnologia comparata dei laghi insubrici*. «Atti Congr. Intern. di Limnologia teorica applicata». Roma, 1929.
- PASQUINI P., *La distribuzione orizzontale e verticale del plancton del lago Trasimeno in estate e sue variazioni*. «Rivista di Biologia», vol. V, fasc. I, 1923.
- *Per una maggior conoscenza della fauna pelagica del lago Trasimeno*. «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei», vol. 33, 2. Sem., fasc. 1-2, 192.
- *Nuova serie di ricerche sul plancton del lago Trasimeno*. «Boll. dell'Ist. di Zoologia dell'Università di Roma», vol. II, 1941.
- POMINI F. P., *Ricerche sul Salmio dell'Italia Peninsulare*. «Atti Soc. Ital. di Scienze Naturali», vol. 80. Milano, 1941.
- RICCARDI R., *Il lago di Scanno*. «Boll. della Soc. Geogr. Ital.», vol. VI, n. 3.
- TANTURRI G., *Il lago di Scanno nell'Abruzzo Anteriore*. «L'Italia Agricola». Milano, 1881.
- WESEMBERG-LUND, *Biologie der Süsswassertiere*. Vienna, 1939.

RACCOLTE FAUNISTICHE COMPIUTE NEL GARGANO
DA A. GHIGI E F. P. POMINI

IV. — ARACNIDI (*)

LODOVICO DI CAPORACCIO

SUMMARIVM. — Species 66 Arachnidarum in monte Gargano et in insulis Diomedeis lectae enumerantur: quattuor species novae describuntur.

Delle varie regioni d'Italia (che è essa stessa uno degli stati meno studiati dal punto di vista aracnologico), le Puglie sono certo una delle regioni delle quali l'aracnofauna è meno conosciuta.

Dell'aracnofauna pugliese infatti, a parte la classica citazione della « Tarantola » in Linneo, noi sappiamo quanto ci dicono il CAPUTO (*De Tarantula anatome et morsu, Cp. I par. unicus, Phalang. species omnes in Apulia et in Hydruntina provincia cogniterum numerantur*, Lycii, 1741), il quale senza dar loro un nome, elenca alcune specie, sette delle quali furono identificate da CANTONI (*Di alcuni aracnidi di Puglia. « Boll. Scientifico », n. 1, Pavia 1882*); il SERAO (*Della Tarantola o sia Falangio di Puglia. Napoli, 1742*), il quale cita un ragno riconoscibile per il *Latrodectus tredecimguttatus* Rossi; il PERAGNA (*Institut. Entomologicae, Napoli, 1792*) che cita sotto il nome di *Aranea argentea*, la *Argiope lobata* (Pall.); il CANTONI (op. cit.) il quale elenca 39 specie di Altamura e una delle Puglie senza specificazione di località; il KUL-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi nella Tornata ordinaria dell'8 febbraio 1948.

CZYNSKI (*Fragmente Arachn. V, viii, Arachnoidea nonnulla in insulis Diomedeis... lecta* « Bull. Acad. Cracovie », 1907) il quale elenca 5 specie delle Tremiti; ed io stesso *Aracnidi cavernicoli delle Puglie* (Le grotte d'Italia. a. 2, vol. III, 1938) che ne elenca 7. Tenendo conto delle specie elencate da più di un autore, le specie fin qui note delle Puglie sono 55: numero, come si vede, veramente esiguo. Mi pare valga la pena di dare qui l'elenco di queste specie, chiamandole con i nomi loro spettanti in base allo stato attuale dell'aracnologia:

<i>Nemesia cecconii</i> Kulez.	<i>Araneus cucurbitinus</i> Cl.
<i>Amurobius erberi</i> L. K.	<i>Araneus redii</i> Sol.
<i>Eresus ruficapillus</i> C. L. K.	<i>Araneus adiantum</i> Wlck.
<i>Dysdera crocata</i> C. L. K.	<i>Cyclosa sierrae</i> E. S.
<i>Dysdera erythrina</i> Walch.	<i>Meta merianae</i> (Sol.)
<i>Harpactes strandi</i> di Cap.	<i>Haplodrassus dalmatensis</i> (L. K.)
<i>Holocnemus pluchii</i> (Sol.)	<i>Nomisia exornata</i> (C. L. K.)
<i>Textrix denticulata</i> (Olv.)	<i>Nomisia molendinaria</i> (L. K.)
<i>Tegenaria parietina</i> (Frer.)	<i>Chiracanthium angulitarse</i> E. S.
<i>Pisaura mirabilis</i> (Cl.)	<i>Thomisus albus</i> (Gm.)
<i>Lycosa tarantula</i> (Rossi)	<i>Synaema globosum</i> (F.)
<i>Hogna radiata</i> (Ltr.)	<i>Xysticus robustus</i> (H.)
<i>Alopecosa albofasciata</i> (Brullé)	<i>Salticus scenicus</i> (Cl.)
<i>Arctosa perita</i> (Ltr.)	<i>Salticus simonii</i> Kulez.
<i>Arctosa cinerea</i> (F.)	<i>Heliophanus aeneus</i> (H.)
<i>Oxyopes heterophthalmus</i> Ltr.	<i>Heliophanus melinus</i> L. K.
<i>Oxyopes lineatus lineatus</i> Ltr.	<i>Philaeus chrysops</i> (Poda)
<i>Oxyopes lineatus occidentalis</i> Kulez.	<i>Menemerus semilimbatus</i> (H.)
<i>Leptyphantes tenebricola</i> (Wid. & Reuss)	<i>Menemerus taeniatus</i> (L. K.)
<i>Theridium pictum</i> (Walck.)	<i>Evarcha falcatus</i> (Cl.)
<i>Teutana triangulosa</i> (Walck.)	<i>Thyene imperialis</i> (W. Rossi)
<i>Steatoda bipunctata</i> (L.)	<i>Dicranolasma diomedea</i> Kulez.
<i>Asagena phalerata</i> (Panz.)	<i>Trogulus coriziformis</i> C. L.
<i>Latrodectus tredecimguttatus</i> (Rossi)	<i>Lacinius horridus</i> (Panz.)
<i>Nesticus eremita italicus</i> di Cap.	<i>Metaphalangium propinquum</i> (Lc.)
<i>Argiope lobata</i> (Pal.)	<i>Eudasylobus gestroi</i> (Th.)
<i>Metargiope brünnichii</i> (Sol.)	<i>Zacheus crista</i> (Brullé)

Data l'esiguità del numero delle specie note di questa regione, mi riuscì assai gradito l'invito, fattomi dal chiar.mo prof. Ghigi, direttore dell'Istituto di Zoologia dell'Università di Bologna, di studiare una raccolta di Aracnidi fatta nel 1940 nel Gargano dal dott. Pomini. Trattasi di 66 specie, numero non grande, ma pur sempre superiore a quello delle specie fin qui conosciute della regione e tanto più interessante, inquantochè il Gargano e le Tremiti, ove il Pomini raccolse, zona che per tanti rispetti si differenzia nettamente dal resto delle Puglie, erano note, aracnologicamente, solo per il già citato lavoro del Kulczynski sulle Tremiti. A tale proposito è da rilevare che nessuna delle forme trovate da Kulczynski, tutte, salvo *Cyclosa sierrae* e *Salticus simonii* Kulcz. peculiari delle isole (*Nemesia cecconii* Kulcz., *Oxyopes lineatus occidentalis* Kulcz., e *Dicranolasma diomedae* Kulcz.) è stata ritrovata dal dott. Pomini. Il quale ha, invece trovato ben quattro forme nuove, il che naturalmente accresce valore alla sua raccolta.

Da quel che risulta da questa raccolta, la fauna aracnologica del Gargano ha, come è naturale, caratteri nettamente mediterranei: alcune poche specie fin qui non note dell'Italia peninsulare, ma solo dell'Italia settentrionale o dell'Europa centrale, si trovano anche in Spagna [*Bathypantes gracilis* (Bl.), *Maso sundevalli* (Wotr.), *Zelotes longipes* (L. K.)] ed è perciò certo che si ritroveranno anche nell'Italia peninsulare; altrettanto dicasi di due specie [*Zelotes mutabilis* (E. S.) la determinazione del quale però non è assolutamente sicura essendo fatta su esemplari giovani, e *Chiracanthium angulitarse* E. S.] fin qui note solo di Corsica; una sola specie, *Pardosa lugubris* (Walck.) sembra raggiungere nel Gargano il limite meridionale della propria diffusione.

Faccio seguire l'elenco delle località ove il Pomini raccolse e l'elenco delle specie raccolte; in questo, i numeri posti dopo l'elencazione delle specie corrispondono ai numeri dell'elenco delle località. Le specie già note delle Puglie sono precedute da un asterisco (*): sono 13, sicchè 53 forme risultano nuove per la regione pugliese, portando a 108 le forme note di questa regione.

ELENCO DELLE LOCALITÀ

1. - Mattinata. 18 aprile 1940.
2. - Alveo del Lago S. Egidio, 17 aprile 1940.
3. - Lago S. Egidio, giugno 1940.
4. - Foresta Umbra, giugno 1940.
5. - Foresta Umbra, settembre 1940.
6. - Grotta del Tasso in Foresta Umbra, giugno 1940.
7. - Grotta di Digestori in Foresta Umbra, giugno 1940.
8. - Grotta di Monte Nero, giugno 1940.
9. - Ginestra, settembre 1940.
10. - Bosco Ginestra, 20 aprile 1940.
11. - Sfilze, settembre 1940.
12. - Jacotenenti, settembre 1940.
13. - S. Nicandro Garganico, 25 aprile 1940.
14. - Cagnano Varanico, 22 aprile 1940.
15. - Rive del Varano, 23 aprile 1940.
16. - Isola del Varano, 22 aprile 1940.
17. - S. Menaio, 17 aprile 1940.
18. - Isole Tremiti, Caprara, 13 aprile 1940.
19. - Isole Tremiti, S. Donnino, 16 aprile 1940.
20. - Isole Tremiti, S. Nicola, 16 aprile 1940.

ELENCO DELLE SPECIE RACCOLTE

1. - *Euscorpius carpathicus* (C. L. K.) 1 ♀ (1), 6 ♀ (2), 2 ♂ (4), 1 ♀ (5), 3 ♂ ♀ (11), 9 ♂ ♀ (13), 1 ♀ (14), 14 ♂ ♀ (18), 9 ♂ ♀ (19), 2 ♀ (20). Hab.: Europa meridionale, Africa settentrionale.
2. - *Chthonius tetrachelatus* (Preyssl.) 2 es. (4). Hab.: Europa.
3. - *Microbisium manicatum* (L. K.) Vari es. (4). Hab.: Grecia, Italia centrale, Francia meridionale, Spagna.
4. *Dictyna latens* (F.) 1 ♂ (4). Hab.: Europa, tutta la regione mediterranea.
5. - *Dictyna arundinacea* (L.) ♀ (9) Hab.: Europa, Asia palearctica.
6. - *Dysdera ninnii* Can. 1 ♀ (2) Hab.: Dalla Francia meridionale all'Ungheria e Dalmazia.

* 7. *Dysdera crocota* C. L. K. 3 ♂ ♀ (1), 2 ♀ (10), 3 ♀ (14) 1 ♀ (17), 4 ♂ ♀ (18), 3 ♀ 19. Hab.: Regione mediterranea, Isole Atlantiche, America settentrionale, Giappone, Cile, Sud Africa.

8. - *Dysdera flagellifera* sp. n. 1 ♂ (13).

♂ Corporis totius long. mm. 7.92; cephalothoracis mm. 3.6, ejus latitudo mm. 2.66, frontis mm. 1.67; abdominis longitudo mm. 4.32, pedum I paris mm. 11.15 (femoris mm. 2.9, patellae mm. 1.2, tibiae mm. 2.4, metatarsi mm. 2.25, tarsi mm. 0.8); II mm. 10.5 (2.4 + 1.2 + 2.25 + 2.4 + 0.8); III mm. 8 (1.65 + 0.8 + 1.6 + 2 + 0.7); IV mm. 10.7 (2.4 + 1.1 + 2.25 + 2.66 + 0.8); palporum mm. 4.55.

Cephalothorax brunneorufus, coriaceus, non punctatus nec reticulatus.

Oculi medii superi conniventes, a lateralibus dimidio eorum radio remoti. Laterales aequales et conniventes, antichi inter se eorum diametro remoti. Diametrus lateralium diametrum mediorum quinta parte superat.

Sternum coriaceum, brunneorufum ut partes oris. Pedes rufoaurantiaci.

Femora I, II et III aculeo parvo subapicali anteriore, IV 3 aculeis subbasalibus superioribus parvis. Patellae muticae. Tibiae et metatarsi I et II mutici. Tibiae III et IV serie inferiore anteriore 3 aculeorum, aculeo inferiori posteriori apicali et utrinque 2 aculeis lateralibus, uno basali, altero medio. Metatarsus III verticillo subbasali 3, medio 4 aculeorum; IV verticillo subbasali 3, medio 4, subapicali 2 aculeorum superiorum, apicali 3 aculeorum inferiorum.

Abdomen griseum.

Bulbus (fig. 1) *D. crocotae* similis, sed apice processu ensiformi, qui in flagellum desinit, qua re facile distinguitur.

Invenit speciei huius ♂ dom. Pominius loco S. Nicandro Garganico dicto, die VII a. K. Maj. A. D. 1940.

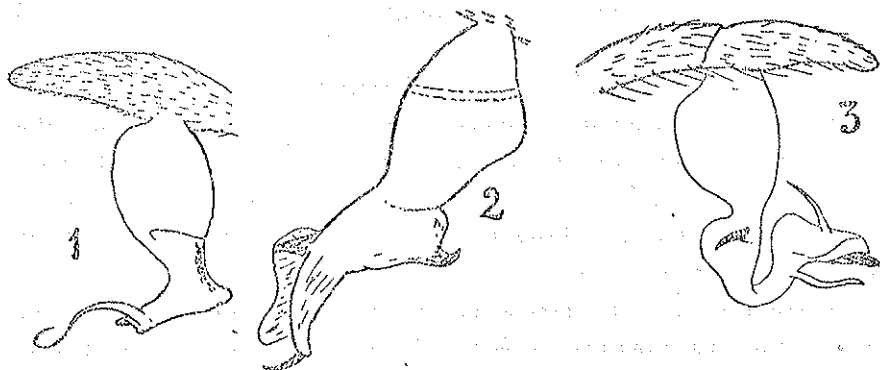
9. - *Dysdera pominii* sp. n. 1 ♂ (20).

♂ Corporis totius longitudo mm. 8, cephalothoracis mm. 3.4; ejus latitudo mm. 2.66, frontis mm. 1.85; abdominis longitudo mm. 4.6; pedum I paris mm. 10 (femoris mm. 2.4, patellae mm. 1.52, tibiae mm. 1.75, metatarsi mm. 2.1, tarsi mm. 0.53); II mm. 10.10 (1.75 + 1.46 + 2.1 + 2.66 + 0.53); III mm. 7.36 (1.6 + 1.1 + 1.2 + 1.73 + 0.53); IV mm. 9 (2.26 + 0.95 + 1.6 + 2.1 + 0.53); palporum mm. 4.1

Cephalothorax et sternum obscure rufobrunnea, coriacea et creberrima punctata (puncta praesertim in alcohole visibilia).

Oculi superi inter se et cum lateralibus anticis conniventes; laterales antici inter se spatio eorum diametro quarta parte minore remoti. Diametrum superiorum inter se aequalium diametro lateralium septima parte minus.

Pedes palpique laete rufo-aurantiaci. Tibiae III et IV aculeo parvo apicali inferiori anteriori; metatarsi III et IV subtus apice 3 aculeis minimis; coeterum pedes inermes. Abdomen griseosericeum.



Bulbus (fig. 2) postice calchare acuto, subtus apophysi parva acuta, antice loro membranaceo.

Cum *D. ninnii* Can. conferri potest sed ab ea forma bulbi differt.

Speciei huius invenit ♂ dom. Pominius, cui species est dicata, insula Diomedea S. Nicola dicta, die XVI a. K. Maj. A. D. 1940.

10. - *Dasumia diomedea* sp. n. 1 ♂ (18); 1 ♀ iuv. (11).

♂. Corporis totius long. mm. 7.7, cephalothoracis mm. 2.9, ejus latitudo mm. 2.4, frontis mm. 1.46; abdominis longitudo mm. 4.8; pedum I paris (desunt); II mm. 11.7 (femoris mm. 2.53, patellae mm. 1.46, tibiae mm. 2.8, metatarsi mm. 2.8, tarsi mm. 0.66); III mm. 8.35 (2.13 + 1.15 + 1.61 + 2 + 0.66); IV mm. 11 (2.9 + 1.2 + 2.4 + 2.66 + 0.66); palporum mm. 3.75.

Cephalothorax rufus, ut sternum et partes oris, finissime grauloso-coriaceum.

Oculi laterales postici cum anticis et mediis superis conniventes; diametrum eorum diametrum coeterorum, inter se aequalium, sexta parte

superat. Antici inter se spatio eorum diametro tertia parte minore remoti.

Pedes rufi. Femur II desuper 4 aculeis in serie parum regulari; coeterum pedes II mutici. Femur III et IV desuper serie posteriore binorum et anteriore 3 aculeorum. Patellae III aculeo anteriori. Tibiae III et IV subtus aculeo subbasali, aculeo medio et pare aculeorum apicali, et utrinque 3 aculeis lateralibus; metatarsi III subtus aculeo subbasali, aculeo medio et pare aculeorum apicali, et utriusque 3 aculeis lateralibus; metatarsi IV ut III sed utrinque 4 aculeis lateralibus.

Abdomen griseose riceum.

Palpi bulbus (fig. 3) valde magis complexus quam in coeteris speciebus generis, apice dilatatus, fere foliaeformis, et ibi duabus apophysis acutis teretibus, quarum una superior, altera autem inferior; praeterea calcare magno medio.

Speciei huius invenit ♂ dom. Pominius insula Diomedea Caprara dicta idibus Aprilis A. D. 1940. Probabiliter speciei huic pertinet ♀ iuv. in sylva Sfilze in monte Gargano inventa, mense Sept. ejusdem anni, quae cum ♂ omnino congruere videtur.

11. - *Tegenaria sylvestris* L. K. 1 ♀ iuv. (10). Non essendo adulta, l'identificazione non è sicura; tanto più che la tibia I ha, oltre all'aculeo inferiore mediano, un aculeo basale laterale. Tutti gli altri caratteri concordano. Hab.: Europa centro-meridionale.

12. - *Coelotes ghigii* sp. n. 1 pull. (4); 1 ♀ iuv. (10).

♀ iuv.: Corporis totius long. mm. 6.45: cephalothoracis mm. 3, ejus latitudo mm. 2.35; abdominis longitudo mm. 3.45; pedum I paris mm. 9.15 (femoris mm. 2.27, patellae mm. 0.9, tibiae mm. 1.6, metatarsi mm. 1.6, tarsi mm. 1.3); II mm. 8.45 (2.1 + 0.9 + 1.47 + 1.47 + 1.05); III mm. 7.74 (1.72 + 1.1 + 1.2 + 1.47 + 0.9); IV mm. 10.78 (2.4 + 1 + 1.9 + 2.53 + 1.35); palporum mm. 3.4.

Cephalothorax convexus, fulvobrunneus sat obscurus. Chelae valde geniculatae, brunneorufae ut sternum et partes oris, margine inferiore tridentato.

Oculi in seriebus fere rectis, antica postica brevior, laterales aequi et conniventes. Medii superi inter se eorum diametro, a lateralibus et a mediis anticis paullo minus remoti, idest spatio diametro mediorum anticorum aequo. Medii antici inter se spatio eorum diametro quarta

parte minore, a lateralibus eorum radio remoti. Diametrum lateralium est diametro mediorum anticorum et superiorum eadem ratione ut 7:4:5.

Pedes fulvobrunnei, femoribus 3, tibiis metatarsisque 2 annulis brunneonigris. Femora desuper 3 aculeis longis; patellae III et IV desuper aculeo longo; tibiae I et II subtus utrinque 3 aculeis, III et IV utrinque subtus 3 et lateribus 2 aculeis. Metatarsi I et II utrinque 3 aculeis inferioribus; III et IV desuper 1, utrinque lateralibus 2, subtus antice 2, subtus postice 3 aculeis et verticillo apicali 5 aculeorum. Aculei sat graciles.

Abdomen brunneofulvum sine ulla pictura visibili.

Cum speciei huius adulti mihi cogniti non sint, tamen eam describendam esse putavi; pedibus annulatis enim imprimis ab aliis speciebus generis differt.

Invenit speciei huius, dom. clar. A. Ghigi, Athenaeo Bononiensi Professore dicatae, ♀ iuv. dom. Pomini in sylva Ginestra in Monte Gargano, die XI a. K. Maj. a. D. 1940, et pullum in sylva Umbra, mense Junio.

13. - *Tectrix caudata* L. K. 1 ♀ (19). Hab.: Europa meridionale.

* 14. - *Pisaura mirabilis* (Cl.) 1 ♂ (4); 1 pull. (9); 3 ♂ ♀ (10); 1 ♂ iuv. (12); 1 ♀ (17); Hab.: Regione mediterranea, Isole Atlantiche, Europa ed Asia centrali.

15. - *Trochosa ruricola* (Degeer) 1 ♀ (2); 1 ♀ (4); 1 ♀ (5); 1 ♀ (c); 3 ♂ ♀ (10); 2 ♀ iuv. (19). Hab.: Europa, Asia centrale, Siberia.

16. - *Pirata piraticus* (Cl.) 1 ♂ iuv. (2). Hab.: Europa, Asia, Palestina.

17. - *Alopecosa trabalis* (Cl.) 1 ♀ (19). Hab.: Europa settentrionale, occidentale e centrale, Italia, Crimea, Turkestan.

* 18. - *Alopecosa albofasciata* (Brullé) 3 ♀ (1); 1 ♀ (2); 3 ♀ (13). Hab.: Regione Mediterranea, Turkestan.

19. - *Pardosa strigillata* E. S. 1 pull. (5); 1 ♂ iuv. (19); 1 ♀ (20). Hab.: Penisola Iberica ed Italia; isole Italiane, Albania, Dodecanneso.

20. - *Pardosa lugubris* (Walck.) 1 ♀ (1); 1 ♀ (10). Hab.: Europa settentrionale, occidentale, centrale, orientale, Italia settentrionale, Siberia.

* 21. - *Oxyopes heterophthalmus* Latr. 3 pull. (1); 1 ♀ (4). Hab.: Regione Mediterranea, Europa ed Asia centrali, Inghilterra.

* 22. - *Oxyopes lineatus lineatus* Latr. 3 pull. (9). Hab.: Regione Mediterranea, Mesopotamia, Asia centrale.

23. - *Lithyphantes paykullianus* (Walck.) 1 ♀. Hab.: Regione Mediterranea, Caucaso, Turkestan.

* 24. - *Nesticus eremita italicus* di Cap. Varie ♀ e pull. (6); 6 ♀ e pull. (7); varie ♀ et pull. (8). Hab.: Grotte di tutta l'Italia.

25. - *Linyphia clathrata* (Snd.) 1 ♀ (9), 1 ♀ (12). Hab.: Europa, Siberia occidentale, America settentrionale.

26. - *Bathyphantes gracilis* (Bl.) 2 ♂ ♀ (4). Hab.: Spagna, Francia, Corsica, Europa centrale, Inghilterra.

27. - *Nematogmus sanguinolentus* (Walck.) 1 ♀ (4). Hab.: Italia centrale, Italia settentrionale e centrale, Albania, Algeria, Giappone.

28. - *Maso sundevalli* (Wstr.) 1 ♀. Hab.: Europa centrale e settentrionale, Inghilterra, Spagna.

* 29. - *Metargiope brünnichii* (Scl.) 6 ♂ ♀ (12). Hab.: Regione Mediterranea, Europa centrale, Giappone.

30. - *Meta segmentata* (Cl.) 1 ♀ iuv. (1); vari ♂ ♀ iuv. (5); 2 ♂ ♀ (9); vari ♂ ♀ inv. (12). Hab.: Europa.

31. - *Meta menardi* (Ltr.) 2 ♀ (6); 2 ♀ (7). Hab.: Grotte d'Europa, Tunisia, Madagascar.

32. - *Mangora acalypha* (Walck.) 6 ♀ (4); 1 ♀ (9); 1 ♀ (12); 2 ♀ iuv. (17). Hab.: Regione Mediterranea, Europa centrale.

33. - *Cercidia prominens* (Wstr.) 1 ♀ (4). Hab.: Europa.

34. - *Araneus angulatus* Cl. 1 ♀ (5). Hab.: Europa, Algeria, Asia centrale, America settentrionale.

35. - *Araneus diadematus* Cl. 5 ♂ ♀ (4); 6 ♀ (9); 2 ♀ (11); 7 ♂ ♀ (12); 1 ♀ iuv. (5). Hab.: Europa, Asia paleartica, America settentrionale.

36. - *Araneus quadratus* Cl. 1 ♂ (9). Hab.: Europa, Siberia.

37. - *Araneus cornutus* Cl. 2 ♀ (16); 5 ♀ e iuv. (17). Hab.: Olartico.

38. - *Araneus bituberculatus* Walck. 1 ♂ (1); 1 ♀ (19). Hab.: Regione Mediterranea, Europa centrale.

* 39. - *Araneus cucurbitinus* Cl. 1 ♂ iuv. (4). Hab.: Europa, Regione Mediterranea, Isole Atlantiche, Asia centrale, Giappone.

* 40. - *Araneus adiantus* Walck. 1 ♀ (1); 4 pull. (3); 2 ♀ (4). Hab.: Palearctica.

41. - *Araneus sturmi* (H) 1 ♀ (4). Hab.: Europa.
- * 42. - *Araneus redii* (Sel.) 2 ♂ ♀ (1); 3 pull. (9); 1 pull (12); 2 ♀ (20). Hab.: Palearctica.
43. - *Drassodes pubescens* (Th.) 2 ♀ iuv. (2); 3 ♀ iuv. (13); 1 ♀ iuv. (14); 1 ♀ iuv. (20). Hab.: Europa.
44. - *Haplodrassus severus* (C. L. K.) 1 ♂ (1). Hab.: Regione Mediterranea.
45. - *Zelotes barbatus* (L. K.) 1 ♀ iuv. (13); 1 ♀ iuv. (14). Hab.: Europa meridionale, Africa settentrionale.
46. - *Zelotes mutabilis* (E. S.) 1 ♀ iuv. (19). Trattandosi di un giovane, la determinazione non è sicurissima. Il colore delle zampe concorda bene con la descrizione. Hab.: Corsica.
47. - *Zelotes longipes* (L. K.) 1 ♂ (14). Hab.: Europa centrale, Inghilterra, Spagna, Isole Atlantiche, Siberia.
48. - *Zelotes pedestris* (L. K.) 1 ♂ iuv. (20). Hab.: Europa.
49. - *Poecilochroa conspicua* (L. K.) 1 ♀ (13). Non vi è dubbio sulla determinazione di questa ♀, l'epigine della quale è tipica: l'addome però è del tutto concolore: non so se si tratti di anomalia o di varietà. Hab.: Francia, Europa centrale, Italia, Dalmazia, Russia meridionale, Turkestan.
50. - *Gnaphosa lugubris* (C. L. K.) 2 ♂ ♀ iuv. (2). Hab.: Europa, S. Elena.
51. - *Clubiona compta* (C. L. K.) 1 ♀ (4). Hab.: Europa, Algeria.
52. - *Clubiona neglecta* (Cbr.) 1 ♀ iuv. (15). Hab.: Europa.
53. - *Chiracanthium mildei* L. K. 1 pull. (4). Hab.: Regione Mediterranea.
54. - *Chiracanthium pelasgicum* (C. L. K.) 1 ♀ iuv. (11); 1 ♀ (19). Hab.: Regione Mediterranea.
- * 55. - *Chiracanthium angulitarse* E. S. 1 pull. (11). Non sono del tutto certo di questa determinazione, trattandosi di esemplare troppo giovane; peraltro la specie è già stata trovata nelle Puglie. Hab.: Corsica, Puglie.
56. - *Scotina coelans* (Bl.) 1 pull. (4). Hab.: Europa centrale, Inghilterra, Italia settentrionale.
57. *Olios spongitaris* (L. Duf.) 1 ♀ iuv. (9), Hab.: Europa meridionale. Africa minore, Canarie.

* 58. *Thomisus albus* (Gm.) 1 ♂ (17). Hab.: Europa ed Asia centr., Siberia Giappone e Cina settentr., Regione mediterranea.

59. - *Misumena vatia* (Cl.) 1 ♀ (4); 2 ♀ e pull. (5). Hab.: Olartico.

* 60. - *Synaema globosum* (F.) 2 ♀ e iuv. (1); 2 ♀ (3); 1 ♀ iuv. (4); 7 pull. (9); 2 pull. (11); 12 ♂ ♀ pull. (17). Hab.: Regione mediterranea, Europa e Asia centrale, Siberia.

61. *Xysticus kochi* Th. 2 ♂ ♀ (4); 2 ♀ iuv. (12). Hab.: Europa, Tunisia, Transcaucasia.

62. - *Xysticus sabulosus* (H.) 1 ♀ iuv. (9). Hab.: Europa, Tunisia, Asia centrale.

63. - *Philodromus glaucinus* (E. S.) 1 ♀ iuv. (4). Hab.: Regione Mediterranea.

64. - *Heliophanus kochi* (E. S.) 1 ♀ (4). Hab.: Europa meridionale, Marocco.

65. - *Heliophanus cupreus* Walek. 5 ♀ iuv. (9). Hab.: Europa, Transcaucasia.

66. - *Nemastoma argenteolunulatum* Can. 4 es. (11). Hab.: Italia peninsulare.

DIATOMEAE DEL DEPOSITO QUATERNARIO
DI CRISOSTOMATACEE
ALLE TRE FONTANE PRESSO ROMA (*)

(Con tre figure)

VITO ZANON

SUMMARIVM. — Auctor enumerat diatomeas inventas in depositu quaternario alluvionali ad dexteram fluminis Tiberis apud «Tres Fontes» ad meridiem Urbis: describit speciem novam.

Diedi già notizia⁽¹⁾ dell'esistenza di un deposito di Crisostomatacee esistente presso l'Abazia delle Tre Fontane a Sud di Roma. In questo strato facente parte di una trincea messa in luce per i lavori di sbancamento di una collinetta per l'accesso a quella che doveva essere l'Esposizione Universale del 1942 (E 42), oltre i suddetti microorganismi vi trovai anche delle Diatomee. Non così numerose di specie come le Crisostomatacee, ma sufficienti per darci un'idea dell'origine di queste alluvioni.

Fu il Chiar.mo Prof. CARMELO MAXIA della Università di Roma che mi invitò a fare colà un sopralluogo in sua compagnia e raccogliere materiale di studio.

Egli ha già illustrato l'interessante formazione geologica in un accurato lavoro⁽²⁾ dal quale, oltre lo schizzo di sezione geologica fatto

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Gola il 26 novembre 1948.

(1) ZANON V., *Saggio di sistematica delle Crisostomatacee. - Deposito quaternario di Crisostomatacee in Roma.* «Acta» Pont. Acad. Scient., vol. XI, n. 4, pagg. 43-62.

(2) MAXIA C., *Contributo alla geologia della regione delle Tre Fontane (Roma).* «Boll. Uff. Geol. d'Italia», anno 1943, vol. LXVIII, P. I. Geol., Nota V, Roma 1945.

« Questo rilievo — dice il MAXIA nel citato lavoro — raggiunge l'altezza di circa m. 40 e sovrasta la breve spianata circostante per una ventina di metri. La piccola altura è costituita prevalentemente da una serie di strati piroclastici, tra i quali se ne trovano intercalati alcuni di rocce elastiche, a grana fine, e tre straterelli tripolacei diatomeiferi, tutti in giacitura suborizzontale.

La collina delle Tre Fontane si eleva da un basamento di tufi grossolani, arenacci, che passano sotto le alluvioni recenti ed attuali della pianura; la serie termina superiormente con uno spesso strato di tufo pomiceo gialliccio, non molto consistente, che può essere considerato come un'alterazione o un affinamento del tufo giallo litoide immediatamente sottostante.

Il versante meridionale del rilievo è stato completamente asportato dai lavori di scavo che hanno dato luogo ad una trincea la cui fronte orientata circa N.O.-S.E. per una lunghezza di circa 50 m. guarda il piazzale antistante il Palazzo della Civiltà.

Passo ora alla descrizione stratigrafica e litologica presentata dalla detta trincea, che è riprodotta, schematizzata, dall'annessa figura 2.

Dall'alto al basso si osserva la seguente successione:

14. Tufo giallo litoide (m. 5 di spessore)
13. Tufo grossolano, argilloso, incoerente (m. 3)
12. Sabbia vulcanica (m. 0,70)
11. Tufo incoerente bianchiccio (m. 0,50)
10. Cenere vulcanica nerastra (m. 0,10)
9. Pozzolana rossa (m. 2)
8. Tre straterelli diatomeiferi, alternati con altri straterelli argillosi (m. 0,35 complessivamente)
7. Tufo terroso rosso o grigiastro (m. 1)
6. Conglomerato pomiceo (cosidetto *granturco*, m. 0,20)
5. Tufo granulare leucitico grigio (m. 3) passante a
4. Tufo granulare leucitico giallastro (m. 0,10)
3. Argilla marnosa, giallognola (m. 0,50)
2. Tufo a elementi grossolani poco coerenti (m. 0,10)
1. Detrito di cava.

Questa la descrizione dello spaccato della collinetta emergente dal piano a livello circa della Via Laurentina.

Qualche cosa degli strati inferiori a questa collinetta si è potuto osservare in un ulteriore sopralluogo fatto insieme al Prof. MAXIA. Al limite meridionale della spianata osservammo, in una piccola trincea, o meglio in un gradino fiancheggiante una strata incavata dalle acque

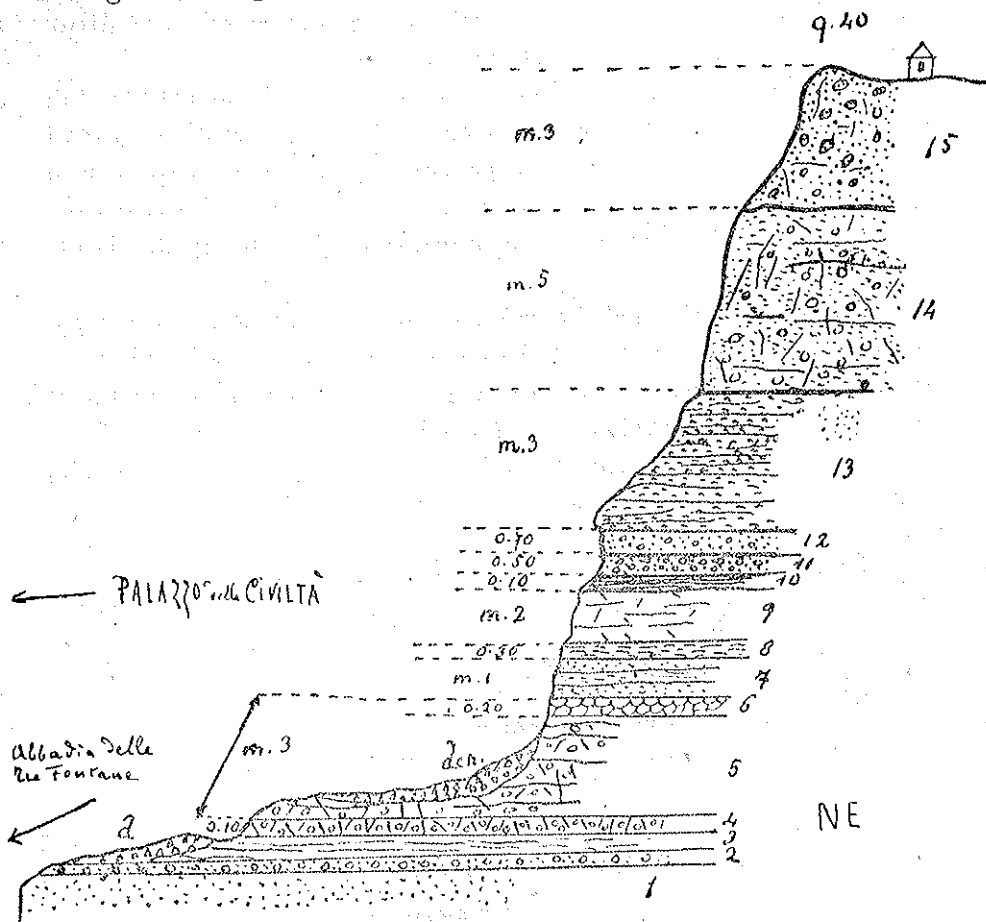


FIG. 2.

piovano, degli straterelli intercalati al tufo. Qua e là si vedevano distintamente dei sottili strati di torba nera ed omogenea, all'esame riscontrata poi priva di fossili macro e microscopici, dello spessore di circa mezzo centimetro, e meno ancora, residuo forse di animalucoli privi di scheletro, e sotto di questa qualche centimetro di tripoli con pochissime Diatomee e privo di Crisostomatacee, ma ricco di placche silicee di vegetali.

È noto che nel sottosuolo di Roma questi strati di tripoli sono molteplici di frammezzo ai tufi. Se ne sono osservati fino a cinque a diverse profondità. Indice di acque stagnanti interrate a diverse riprese da alluvioni di materiali vulcanici. Ma non tutti sono di tale natura.

Lo strato di tripoli oggetto di questo studio (n. 8 della sezione) si presenta poco omogeneo, vale a dire che a diverse altezze è fogliettato, leggero e di un bianco quasi puro; in altre invece di un bianco più sporco, dovuto al mescolamento con materiali vulcanici, fra cui laminette di mica oscura, che lo rendono più pesante; altrove commisto a residui vegetali più scuri non identificabili, con qualche velo di sostanza nera; nonchè, disseminati qua e là, leggeri veli o globuli di sostanza rossa ferruginosa dovuta al ferro di origine certamente organica, vale a dire quel ferro che negli stagni e nei fossi è accumulato dal *Bacterium ferrugineum* anticamente ritenuto erroneamente per una Diatomea, chiamata allora *Gallionella ferruginea*.

È questo l'ambiente tipico in cui vegetano numerose le Crisostomatacee, mentre rare vi sono le Diatomee. Se le troviamo commiste nello strato in istudio, significa che l'alluvione, oltre che spazzare gli stagni a Crisostomatacee hanno trasportato anche le Diatomee da altri ambienti a loro più confacenti.

Lo strato n. 7 ad esso immediatamente inferiore, allo stato asciutto si presenta di color bianco sporco, di consistenza terrosa e friabile, composto di elementi vulcanici, fra i quali potei riscontrare, perchè nettamente spiccanti per il loro color nero in mezzo al bianco, frammenti di qualche millimetro di grandezza di una sostanza vetrosa, trasparente a margini taglienti ed aguzzi, probabilmente ossidiana.

In mezzo a questo rinvenni una falange di grosso vertebrato, molto ben conservata e silicizzata, con il tessuto spugnoso ben visibile, appartenente probabilmente a un Cervo. Essa misura mm. 51 di lunghezza, mm. 23 di altezza all'estremità inferiore; mm. 16 all'estremità superiore; 17 mm. di spessore alle due estremità e mm. 13 nel mezzo.

Questo rinvenimento dimostra che non solo lo strato in cui esso si trova è prodotto di fluitazione dell'acque del Tevere, ma anche tutta la serie degli strati componenti la collina è della stessa origine. Fenomeno eguale a quello che si riscontra alle sponde dell'Aniene, dove

anche le enormi masse di tufo litoide, sono evidentemente di origine elastica.

Vedi su questo argomento due miei studi recenti ⁽¹⁾.

Nel caso presente dunque non si tratta di Diatomee e Crisostomataceae sviluppatesi in laghetti o stagni formatisi sopra uno strato di materiale piroclastico e poi riempiti da altre alluvioni. Questi giacimenti di tripoli o di farina fossile hanno ordinariamente la forma di lenti. Qui invece abbiamo tutto materiale di trasporto disposto a strati e lo dimostrano pure le Diatomee specialmente le più lunghe e più grosse che si rinvencono allo stato frammentario.

Nella zona cosiddetta dell'E 42 non sono rari i ritrovamenti di giacimenti più o meno importanti di farina fossile, venuti in luce negli importanti lavori di sbancamento ivi compiuti.

Del resto è rinomato, per lo studio che ne fece il CLERICI, il deposito di Monte del Monte del Finocchio, località poco lontana dalla regione qui in istudio, e anch'esso già demolito dai lavori di sterro per la stessa Esposizione.

(1) ZANON V., *Giacimento di farina fossile nella bassa valle dell'Aniene «Sedia del diavolo» (Roma)*. «Comment.» Pont. Acad. Scient., Anno VIII, Vol. VIII, n. 14. Roma, 1944; *Elementi d'acqua dolce e marina in un calcare farinoso nella zona della «Sedia del diavolo» in Roma*. «Acta» Pont. Acad. Scient., Vol. IX, Anno IX, n. 11, pag. 133-148.

ELENCO DELLE DIATOMEE DEL TRIPOLI A CHRISTOMATACEE DELLE TRE FONTANE.

Abbreviazioni: d. = d'acqua dolce; sm. = d'acqua salmastra; m. = marina; r. = raro; fr. = frequente; frr. = molto frequente; abb. = abbondante; oligh. = oligohalobia; mesoh. = mesohalobia; haloph. = halophila; a. f. = acque ferme; a. c. = acque correnti; episf. = epitifica; lit. = litorale o di fondo; indiff. = indifferente.

N.	VARIETÀ	d.	sm.	m.	OSSERVAZIONI
1	<i>Amphora ovalis</i> Ktz.	fr.	fr.		lit., oligh., a. f.
2	" <i>perpusilla</i> Grun.	r.			idem
3	" <i>veneta</i> Ktz.	r.	r.		idem
4	<i>Anomoeoneis sphaerophora</i> Ktz.	fr.	fr.		haloph., lit., a. f.
5	<i>Caloneis alpestris</i> (Grun.) Cl.	r.			indiff., lit., a. f.
6	" <i>formosa</i> (Greg.) Cl.	r.	r.		mesh., lit., a. f.
7	" <i>silicula</i> (Ehr.) Cl.	r.			oligh., lit., a. f.
8	" var. <i>truncatula</i> (Grun.) Cl.	r.			idem
9	" <i>Trium Fortium</i> sp. n. mihi	r.			idem
10	<i>Campylodiscus noricus</i> Ehr. var. <i>hibernica</i> Ehr.	r.	r.		oligh., epif., a. f.
11	<i>Cocconeus placentula</i> Ehr.	abb.			idem
12	" var. <i>euglypta</i> (Ehr.)				idem
13	<i>Cymatopleura solea</i> (Bréb.) W. Sm. Cl.	r.			oligh., lit., a. f.
14	" <i>elliptica</i> (Bréb.) W. Sm.	r.	r.		idem
15	<i>Cymbella aspera</i> (Ehr.) Cl.	fr.			oligh., epif., indiff., a. f.
16	" <i>affinis</i> Ktz.	fr.			idem

ELENCO DELLE DIATOMEI DEL TIROPOLI A CRISOSTOMACEE DELLE TRE FONTANE.

N.	VARIETÀ	d.	sm.	m.	OSSERVAZIONI
17	<i>Cymbella helvetica</i> Ktz.	fr.			oligh., epit., indiff., a. f.
18	<i>Diploneis ovalis</i> (Hilse) Cl. var. oblongella (Naeg.) Cl. .	r.			lit., oligh., a. f.
19	» <i>puella</i> (Schum.) Cl.	r.			idem
20	» <i>subovalis</i> Cl.	r.			idem
21	<i>Epithemia argus</i> Ktz.	fr.			oligh., indiff., epif., a. f.
22	» <i>turgida</i> (Ehr.) Ktz.	fr.	fr.		idem
23	» » var. granulata Ehr.	fr.	fr.		idem
24	» <i>zebra</i> (Ehr.) Ktz.	fr.	fr.		idem
25	» » var. saxouica (Ktz.) Grun.	fr.	fr.		idem
26	<i>Eumolia gracilis</i> (Ehr.) Babb.	fr.			halophoba, litor., a. f., a. c.
27	» <i>pectinalis</i> (Ktz.) Babb.	fr.			idem
28	» <i>tenella</i> (Grun.) Hustedt	fr.			idem
29	» <i>valida</i> Hustedt	r.			idem
30	<i>Fragilaria virescens</i> Ralfs	r.			oligh., lit., a. f., a. c.
31	<i>Gomphonema acuminatum</i> Ehr.	fr.			oligh., epif., a. f.
32	» » var. Brébissoni (Ktz) Cl.	fr.			idem
33	» <i>angustatum</i> Babb. var. productum Grun. .	fr.			idem
34	» <i>bohemicum</i> Reich. et Frike.	r.			idem

ELENCO DELLE DIATOMEI DEL TRIPOLI A CRISTOMATACEE DELLE TRE FONTANE.

N.	VARIETÀ	d.	sm.	m.	OSSERVAZIONI
35	<i>Gomphonema constrictum</i> Ehr. var. capitata (Ehr.) Cl.	fr.			oligh., epif., a. f.
36	» <i>gracile</i> Ehr.	fr.			idem
37	» <i>intricatum</i> Ktz. var. pumila Grun. . . .	fr.			idem
38	» » var. vibrio (Ktz.) Cl.	fr.			idem
39	» <i>lanceolatum</i> Ehr. var. insignis (Greg.) Cl.	fr.			idem
40	» » forma turris Hustedt	fr.			idem
41	» <i>longiceps</i> Ehr. var. montana (Schem.) Cl.	fr.			idem
42	» » var. subclavata Grun.	fr.			idem
43	» <i>olivaceum</i> Ktz. var. calcarea Cl.	fr.			idem
44	» » var. subelliptica Cl.	fr.			idem
45	<i>Hantzschia amphioeys</i> (Ehr.) Grun.	fr.	fr.		oligh., lit., a. f.
46	» » forma capitata Hust.	fr.			idem
47	<i>Melosira granulata</i> (Ehr.) Ralfs.	fr.			idem
48	» <i>italica</i> (Ehr.) Ktz.	abb.			idem
49	<i>Navicula anglica</i> Ralfs.	r.			idem
50	» <i>bacillum</i> Ehr.	r.			idem
51	» <i>cincta</i> (Ehr.) Ktz.	r.			haloph., lit., a. f.
52	» » var. Heufleri Grun.	r.			idem

ELENCO DELLE DIATOMEE NEL TRIPOLI A CRISTOMATACEE DELLE TRE FONTANE.

N.	VARIETÀ	d.	sm.	m.	OSSERVAZIONI
53	<i>Navicula confervacea</i> Ktz.	r.			oligoh., lit., a. f.
54	» <i>crucicula</i> (W. Sm.) Donk.	fr.			idem
55	» <i>cuspidata</i> Ktz.	r.			idem
56	» <i>dicephala</i> (Ehr.) W. Sm.	fr.			idem
57	» <i>exigua</i> (Greg.) O. Müller	fr.			idem
58	» <i>incerta</i> Grun.				mesoh., lit., a. f.
59	» <i>oblonga</i> Ktz.	fr.	r.		oligh., lit., a. f.
60	» <i>plicata</i> Donkin				mesoh., lit., a. f.
61	» <i>protracta</i> Grun.				heloph., lit., a. f.
62	» <i>pusilla</i> W. Sm.				mesoh., lit., a. f.
63	» <i>radiosa</i> Ktz.	r.	r.		oligh., lit., a. f.
64	» <i>rostellata</i> Ktz.	r.			idem
65	<i>Nidulum iridis</i> (Ehr.) Cl.	r.			idem
66	» <i>productum</i> (W. Sm.) Cl.	r.			idem
67	<i>Nitzschia amphibia</i> Grun.	fr.			idem
68	» var. <i>ocutiuscula</i> Grun.	fr.			idem
69	» <i>filiformis</i> (W. Sm.) Hustedt	fr.			oligh., lit., a. c., a. f.
70	» <i>Hantzschiana</i> Babb.	r.			idem
71	» <i>linearis</i> W. Sm.	fr.			idem

ELENCO DELLE DIATOMEI NEL TRIPOLI A CRISOSTOMATACEE DELLE TRE FONTANE.

N.	VARIETÀ	d.	sm.	m.	OSSERVAZIONI
72	<i>Nitzschia vivax</i> W. Sm.				mesoh., haloph., a. f.
73	<i>Pinnularia borealis</i> Ehr.	r.		fr.	oligh., muschi bagnati
74	» <i>brevicostata</i> Cl.	fr.			oligh., lit., a. f.
75	» <i>cardinalis</i> (Ehr.) W. Sm.	fr.			idem
76	» <i>divergentissima</i> (Grun.) Cl.	r.			idem
77	» <i>fasciata</i> Layest.	fr.			idem
78	» <i>gentilis</i> (Doukin) Cl.	fr.			idem
79	» <i>gibba</i> Ehr.	r.			idem
80	» <i>maior</i> Ktz.	fr.			idem
81	» <i>viridis</i> (Nitzsch) Ehr.	fr.			idem
82	<i>Rhopalodia gibba</i> (Ehr.) O. Müller	r.			oligh., mesch., lit., a. f.
83	<i>Stauroneis anceps</i> Ehr.	r.		r.	idem
84	» <i>phoenicenteron</i> Ehr.	fr.		fr.	idem
85	» <i>Swirella ovalis</i> Bréb.	r.		r.	idem
86	<i>Synedra capitata</i> Ehr.	fr.			oligh., lit., a. f., a. c.
87	» » <i>var. spatulifera</i> Grun.	fr.			idem
88	» <i>ulna</i> (Nitz.) Ehr.	fr.			idem
89	» » <i>var. biceps</i> Ktz.	fr.			idem
90	» » <i>var. danica</i> (Ktz.) Grun.	fr.			idem

Il prospetto sopra riportato presenta il carattere ecologico di ciascuna specie per giustificare la loro assegnazione a forme d'acqua dolce o salmastra.

Su 90 di esse ne abbiamo 21 che si adattano ad acque salmastre e di esse anche una ad acqua marina, la *Nitzschia vivax*. La loro promiscuità nel sedimento induce il micropaleontologo a farsi un'idea della natura dell'ambiente da cui vennero avulse coll'alluvione.

Si verifica infatti, in specchi d'acqua di poca profondità in regioni calde e temperate, che col tempo l'acqua dolce piovana o di immissione, si evapora ed i sali da essa contenuti si concentrano, dando possibilità allo sviluppo di Diatomee d'acqua salmastra, mentre quelle d'acqua dolce, parte sopravvivono, parte non resistono e muoiono, ed i loro gusci precipitano al fondo, se sono epitiche, o vi rimangono se sono forme di fondo litorali.

La presenza poi dei sottili veli di ferro organico disseminati qua e là nel tripoli, e di glomeruli di varia entità pure disseminati, indicano che anche questo ferro non si è formato nel posto del deposito in esame, ma è stato fluitato. Se si fosse formato sul posto dovrebbe trovarsi nella parte superiore dello strato di tripoli (giacchè, come s'è detto, il Bacterio vegeta in acque ferme poco profonde) quando cioè lo specchio d'acqua dovrebbe aver raggiunto l'evaporazione un minimo di profondità.

Se si trattasse di ferro formatosi nel posto del deposito, sia pure a diverse riprese per successivi prosciugamenti ed immissione di nuova acqua di pioggia o di fiume, esso dovrebbe trovarsi a straterelli continui in lunghezza, disposti a diverse altezze.

Abbiamo in certe località delle farine fossili di un bel colore roseo con Diatomee che certamente non sono state fluite, ma formatesi *in situ*, ed in giacimenti abbastanza poderosi; ciò significa che il ferro formatosi nell'ultimo stadio dello specchio d'acqua ha avuto modo di compenetrare tutta la massa della farina fossile posteriormente alla formazione del deposito delle Diatomee, compenetrazione favorita da condizioni endogeniche sconosciute.

La presenza dunque nel nostro tripoli di Diatomee, per la maggior parte d'acque ferme, frammentarie, con ferro d'origine organica e con numerose Crisostomatacee, il tutto alla rinfusa, indica, che, come s'è detto, tutti questi elementi non sono cresciuti *in situ*, nè provengono dal fiume come viventi in esso, ma che costituiscono il lavaggio di stagni e paludi, operato dal fiume in diverse località.

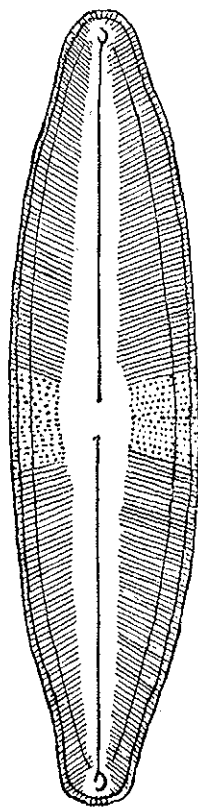
Mentre le Crisostomatacee di questo deposito sono per la maggior parte specie nuove per la scienza e forse tutte specie estinte, probabilmente appartenenti ed un'epoca geologica anteriore alla formazione dello stesso, le Diatomee sono comuni ed uguali alle attualmente viventi.

Una sola forma riscontrai che mi sembra nuova per la scienza e passo a descriverla e figurarla.

CALONEIS FRIUM FONTIUM sp. n.

« *Valvis linearibus lanceolatis, extremitatibus attenuatis rotundatis, longit. 72 μ , latit. 18 μ ; striis radiantibus omnibus, in medio 16 in 10 μ , evidenter punctatis, unica media abbreviata, reliquis confertioribus 20-22 in 10 μ . Area axiali lanceolata in medio dilatata. Rhaphe recta simplici, nodulis centralibus parvis, terminalibus uncinatis cum parvulo apice laterali.*

Fossilis in tripoli quaternario ad Tres Fontes, Romae ».



1/100 mm.

FIG. 3.

RACCOLTE FAUNISTICHE COMPIUTE NEL GARGANO
DA A. GHIGI E F. P. POMINI

V. - ANELLIDI

IGINIO SCIACCHITANO

SUMMARIVM. — Recenset Auctor species Oligochaetorum et Hirudineorum quae collectae sunt in Monte Gargano ab Academico Pontificio A. GHIGI et a doctore F. P. POMINI et species Oligochaetorum et Hirudineorum quae usque adhuc in Apulia collectae sunt.

I. - OLIGOCHAETA

Fam. LUMBRICULIDAE

Gen. *Lumbriculus* Grube

1. - *Lumbriculus variegatus* (Müller).

Un esemplare non intero raccolto nella Caverna Planina. Monte Golgota. Comune di Monte S. Angelo (Foggia) il 10-3-1938 (*leg. POMINI*).

Questa specie non era stata ancora segnalata per il Gargano.

Fam. LUMBRICIDAE

Gen. *Eiseniella* Mich.

2. - *Eiseniella tetraedra* (Sav.).

Cinque esemplari raccolti nella Caverna Planina. Monte Golgota. Comune di Monte S. Angelo (Foggia) il 10-3-1938 (*leg. POMINI*).

Questa specie, molto diffusa in Italia, anche come forma cavernicola, non era stata ancora segnalata per il Gargano.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi nella Tornata Ordinaria dell'8 febbraio 1948.

Gen. *Eisenia* Malm. em Mich.

3. - *Eisenia rosea* (Sav.)

Sei esemplari raccolti nella Foresta Umbra. Comune di Monte S. Angelo (Foggia) il 13-8-1934 (*leg. GHIGI*).

Anche questa specie molto diffusa in Italia in forma cavernicola o di superficie, non era stata ancora segnalata nel Gargano.

Gen. *Bimastus* H. F. Moore

4. - *Bimastus tenuis* (Eis).

Quattro esemplari raccolti nella Grotta Castelvita. Comune di Monte S. Angelo (Foggia) nell'aprile-maggio 1940 (*leg. POMINI*).

Anche questa specie è nuova per il Gargano, per quanto già segnalata in Italia in numerose località.

Queste quattro specie rappresentano il primo contributo alla conoscenza della fauna oligochetologica del Gargano.

Sinora per le Puglie erano state segnalate sei specie di Oligocheti, delle quali due nelle Isole Tremiti. Credo necessario elencare le dieci specie di oligocheti sinora conosciute per le Puglie:

1. - *Lumbriculus variegatus* (Müller). Gargano.
2. - *Eiseniella tetraedra* (Sav.). Gargano.
3. - *Eisenia rosea* (Sav.). Gargano.
4. - *Allolobophora caliginosa* (Sav.) f. *trapezoides*. Lucera (Foggia). [2], pag. 14.
5. - *Allolobophora chlorotica* (Sav.). Lucera (Foggia), [2], pag. 15.
6. - *Eophila apuliae* Bald. S. Basilio Mottola (Lecce), [2], pag. 16.
7. - *Eophila januae-argenti* Cognetti. Isola S. Domino nelle Tremiti (Foggia), [1], pag. 51.
8. - *Bimastus tenuis* (Eis). Gargano.
9. - *Octolasion complanatum* (Ant. Dug.). Isola Caprara nelle Tremiti (Foggia). [1], pag. 59.
10. - *Octolasion lacteum* (Oerley). Dintorni di Bari, [1], pag. 57.

Come si vede di queste dieci specie, ben otto sono state segnalate per la provincia di Foggia.

II. - HIRUDINEA

Fam. HIRUDINIDAE

Gen. *Haemopsis* (Sav.)1. - *Haemopsis sanguisuga* L.

Cinque esemplari raccolti nell'Alveo S. Egidio. Comune di Monte S. Angelo (Foggia) il 12-8-1934 (leg. GHIGI).

Fam. HERPODELLIDAE

Gen. *Herpobdella* (Blain.)2. - *Herpobdella octoculata* L. var. *pallida*.

Sei esemplari raccolti nella Sorgente di Sfilze. Comune di Monte S. Angelo (Foggia) il 16-8-1934 (leg. GHIGI) ed un esemplare raccolto nell'Alveo S. Egidio. Comune di Monte S. Angelo (Foggia) il 12-8-1934 (leg. GHIGI).

Queste due specie di Irudinei sono le prime segnalate per il Gargano.

Sulla distribuzione geografica degli Irudinei nelle Puglie si hanno pochissime notizie. La DEQUAL [3] segnalò a suo tempo due specie.

Con questi reperti le specie segnalate per le Puglie sono le seguenti:

1. - *Hirudo medicinalis* L. San Cataldo (Lecce), [3].2. - *Limnatis nilotica* (Sav.). Otranto (Lecce), [3].3. - *Haemopsis sanguisuga* L. Gargano.4. - *Herpobdella octoculata* L. var. *pallida*. Gargano.

BIBLIOGRAFIA

- [1] 1912. CHINAGLIA L., *Catalogo sinonimico degli Oligocheti d'Italia*. « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. », Torino, Vol. 27, N. 655.
- [2] 1934. SOIACCHITANO I., *Sulla distribuzione geografica degli Oligocheti in Italia*. « Arch. Zool. It. », Vol. XX.
- [3] 1916. DEQUAL L., *Nuovi dati sulla distribuzione degli Irudinei in Italia*. « Mus. Zool. Anat. », Torino, Vol. XXXI, N. 713.

QUATERNIONS AND QUANTUM MECHANICS (*)

ARTHUR W. CONWAY

Pontifical Academician

SUMMARIVM. — Quaterniones certam habent cum spatio relationem; per eos fit ut quindecim Eddingtonianae matrices directe exprimi ita possint ut earum proprietates perspicue pateant; per ipsos etiam facile fit significare et describere concomitantes aequationis Diracensis.

Auctor inspicit quaternionem ut vectorem in quattuor mensurarum spatio; et eius perpendit rotationem, transitum in spatium hyperbolicum, transformationem seu mutationem spiralem, et nonnullos in rebus physicis usus, ut est vector Poyntingensis in campo Maxwell.

INTRODUCTION

During the second half of the last century the use of quaternions in Mathematical Physics was the subject of much controversy. Strongly defended by Tait the claims of vector algebra were put forward by Heaviside, Gibbs and others. Heaviside freely stated that quaternions could only have been invented by a genius and that vector algebra could be found out by anyone who observed the various combinations of quantities which continually recur but yet he pronounced quaternions as a « positive evil of no inconsiderable magnitude », a statement which has been repeated up to the present day by various mathematical commentators. — Heaviside was in fact largely right for the time and the state of science. The advent of relativity brought

(*) Nota presentata nella Tornata ordinaria dell'8 febbraio 1948.

under consideration that time which was a parameter now took its place as a coordinate and obviously quaternions or 4-vector algebra would seem to be indicated. In Quantum Mechanics, largely founded on HAMILTON's dynamical theories, it would be fitting that HAMILTON's other great discovery would be a suitable mode of mathematical expression. The quaternion treatment has certain differences or advantages over matrices.

Quaternions are more flexible and can be manipulated in many ways. The imaginary i is in plain sight and there is no difficulty in knowing what is real and what is imaginary (incidentally it is not necessary even to use the term HERMITIAN). No difficulty arises as to what quantities commute and what anti-commute. The only rules necessary to know are those of the fundamental units.

In the present paper the relativistic electron equation of DIRAC is considered. It is defined by two perpendicular unit-vectors and at the end of a calculation of (say) a wave-function its dependence on these vectors is in full right. At the least quaternions gives a different view-point from matrices.

CONTENTS

- I. — General Formulae.
- II. — The Linear Function.
- III. — Dirac's Relativistic Equation.
- IV. — Transformation of the Wave-function.
- V. — Wave-function as Spinors.
- VI. — The free Electron.
- VII. — The Electron in a Field of Force.
- VIII. — The Hydrogen Line-spectrum and its fine structure.
- IX. — References to related papers on Quaternions.

I. — GENERAL FORMULAE

Denoting a quaternion q_r ($r=1,2,\dots$) by $w_r + \alpha x_r + \beta y_r + \gamma z_r$ where α, β, γ are the usual quaternion vectors ($\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = -1$; $\beta\gamma = -\gamma\beta = \alpha$ etc.). The quaternion conjugate denoted by \bar{q}_r is given by

$$\bar{q}_r = w_r - \alpha x_r - \beta y_r - \gamma z_r$$

and the modulus of the quaternion $|q_r|$ is given by

$$q_r \bar{q}_r = |q_r|^2 = w_r^2 + x_r^2 + y_r^2 + z_r^2.$$

It is to be noted that if $q_r = \bar{q}_r$ the quaternion is a scalar and that if $q_r = -\bar{q}_r$ it is a vector. Two formulae are of great use

$$\begin{aligned} Sq_1 q_2 \dots q_{n-1} q_n &= Sq_n q_1 q_2 \dots q_{n-1} \\ \overline{(q_1 q_2 \dots q_{n-1} q_n)} &= \bar{q}_n \bar{q}_{n-1} \dots \bar{q}_2 \bar{q}_1, \end{aligned}$$

we have

$$Sq_r \bar{q}_s = w_r w_s + x_r x_s + y_r y_s + z_r z_s.$$

Consider the transformation

$$q'_r = a q_r b$$

$$q'_s = a q_s b$$

where a and b are *versors* i. e. $|a| = |b| = 1$.

Then

$$\begin{aligned} Sq'_r \bar{q}'_s &= S a q_r b \bar{b} \bar{q}_s \bar{a} \\ &= S \bar{a} a q_r q_s = Sq_r \bar{q}_s \end{aligned}$$

and in particular

$$|q'_r|^2 = Sq'_r \bar{q}'_r = |q_r|^2.$$

This can be immediately interpreted as 4-space.

If (w_r, x_r, y_r, z_r) and (w_s, x_s, y_s, z_s) represent two points in 4-space then the operation $a(\)b$ preserves lengths and angles and is the general rotation in four dimensions.

A particular case is the conical rotation $r(\)r^{-1}$ e. g. if $r = \cos \theta + \eta \sin \theta$ this rotation turns all vectors around the axis η through an angle 2θ . We can always solve the equation $a = cr$, $b = r^{-1}c$, $c^2 = ab$ and hence

$$c = \frac{1+ab}{|1+ab|} \quad \text{and} \quad r = \frac{a+\bar{b}}{|1+ab|}.$$

So that the operation $a(\)b$ can be made up a conical rotation $r(\)r^{-1}$ followed by an operation $c(\)c$.

So far the quaternions have been all real but we shall have to deal with quaternions with the scalar part imaginary and the vector part real thus

$$q = it + \alpha x + \beta y + \gamma z$$

and more generally

$$\psi = \psi' + i\psi''$$

where $\psi = \psi_1 \alpha + \psi_2 \beta + \psi_3 \gamma + \psi_4$ etc.

We now introduce the sign $(\)^*$ which is to mean the complex conjugate of the quaternion conjugate.

Then

$$q^* = -it - \alpha x - \beta y - \gamma z = -q$$

which of course only holds for quaternions of this particular type.

More generally

$$\psi^* = \bar{\psi}' - i\bar{\psi}''$$

so that

$$\begin{aligned} \psi^* \psi &= \psi' \bar{\psi}' + \psi'' \bar{\psi}'' + i(\bar{\psi}' \psi'' - \bar{\psi}'' \psi') \\ &= |\psi'|^2 + |\psi''|^2 + i\sigma \end{aligned}$$

where σ is a vector, for $\bar{\sigma} = \bar{\psi}'' \psi' - \bar{\psi}' \psi'' = -\sigma$.

We may also note the formula

$$(\psi \phi \dots \chi)^* = \chi^* \dots \phi^* \psi^* .$$

Returning now to the quaternion

$$q = it + \alpha x + \beta y + \gamma z$$

and the transformation

$$aqb = q' = it' + \alpha x' + \beta y' + \gamma z'$$

we see that a and b must be restricted for

$$b^* q^* a^* = q^{*'} \quad \text{or} \quad b^* q a^* = q'$$

From

$$[1] \quad \nabla' + i \frac{\partial}{\partial t'} = (l + im\varepsilon) \left(\nabla + i \frac{\partial}{\partial t} \right) (l + im\varepsilon)$$

we get

$$\begin{aligned} \nabla' &= l^2 \nabla - m^2 \varepsilon \nabla \varepsilon + 2lm\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t'} &= (l^2 + m^2) \frac{\partial}{\partial t} - lm(\nabla \varepsilon + \varepsilon \nabla) . \end{aligned}$$

One of the earliest applications to electromagnetic theory is to the MAXWELL field equations for \mathbf{E} , \mathbf{H} , which can all be comprised in

$$\left(\nabla + i \frac{\partial}{\partial t} \right) (\mathbf{H} + i\mathbf{E}) = 0$$

$$\text{i. e.} \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{V} \nabla \mathbf{H} ; \quad \mathbf{S} \nabla \mathbf{H} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mathbf{V} \nabla \mathbf{E} ; \quad \mathbf{S} \nabla \mathbf{E} = 0$$

And for the 4-potential \mathbf{A}_0 , \mathbf{A}

$$\left(\nabla + i \frac{\partial}{\partial t} \right) (\mathbf{A}_0 - i\mathbf{A}) = -\mathbf{E} - i\mathbf{H} ,$$

$$\nabla \mathbf{A}_0 + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{E} ; \quad \bar{\mathbf{V}} \nabla \mathbf{A} = \mathbf{H} ; \quad \mathbf{S} \nabla \mathbf{A} - \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} = 0$$

From equation [1] we see that since

$$\Delta' + i \frac{\partial}{\partial t'} = \bar{b} \left(\nabla + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{a}$$

then

$$\mathbf{H}' + i\mathbf{E}' = a(\mathbf{H} + i\mathbf{E}) \bar{b}$$

or

$$= (l - im\varepsilon)(\mathbf{H} + i\mathbf{E})(l + im\varepsilon)$$

From which

$$\mathbf{H}' = l^2 \mathbf{H} + m^2 \varepsilon \mathbf{H} \varepsilon - lm(\mathbf{E} \varepsilon - \varepsilon \mathbf{E})$$

$$\mathbf{E}' = lm(\mathbf{H} \varepsilon - \varepsilon \mathbf{H}) + l^2 \mathbf{E} + m^2 \varepsilon \mathbf{E} \varepsilon .$$

II. - THE LINEAR FUNCTION.

The matrix (ψ_r) when operated on by the matrix (f_{sr}) is the single-row matrix $f_{sr}\psi_r$.

In quaternions this is denoted by $f(\psi)$ or $f\psi$. There are many explicit forms for $f\psi$ such as $\sum r\psi s$ where the r 's and the s 's are quaternions. The transpose of f denoted by f_r is given by $\sum s\psi r$ or the equation

$$S\phi f\psi = S\psi f_r\phi$$

we see at once $f^*(\) = \sum s^*(\)r^*$.

A function which makes $f^* = f_r$ is *Hermitian*.

The equation

$$f\psi = x\psi$$

has in general four values of x , the latent roots or eigenvalues.

The functions $\alpha(\)\beta$, $\gamma(\)i$ are examples of Hermitian linear operators or linear functions. It will be noted that these functions are such that $f^2 = 1$ so that the four roots are equal in pairs.

We can easily see that from

$$\alpha\psi\beta = \psi \text{ we get } \psi = c'(\alpha - \beta) + c''(1 + \alpha\beta)$$

and from

$$\alpha\psi\beta = -\psi \text{ we get } \psi = c'''(\alpha + \beta) + c^{IV}(1 - \alpha\beta)$$

where c', c'', c''', c^{IV} are arbitrary scalars.

In the same way from

$$\gamma\psi i = \psi \text{ we get } \psi = c'(\alpha + i\beta) + c''(1 + \gamma i)$$

and from

$$\gamma\psi i = -\psi \text{ we get } \psi = c'''(\alpha - i\beta) + c^{IV}(1 - \gamma i).$$

If f and F are two functions such that $f^2 = F^2 = 1$ and $fF = -Ff$ then from

$$f\psi = \psi$$

we get

$$F f \psi = F \psi$$

or

$$f F \psi = - F \psi$$

so that $F \psi$ is a solution corresponding to the negative eigenvalue.

A type of function which we shall use is $f \psi = (k - i k_0 \alpha) \psi - \gamma \psi \omega$ where $|\omega| = p$. We require a solution of $f(\psi) = 0$ or $(k - i k_0 \alpha) \psi = \gamma \psi \omega$. Taking the modulus of each side we get $k^2 - k_0^2 = p^2$ and no solution is possible unless this is satisfied. We can easily verify that the complete solution is

$$\psi = (k\gamma - i k_0 \beta - \omega) (A + B \omega)$$

in which A and B are arbitrary scalars⁽¹⁾.

Some properties of ∇ are useful.

We have

$$V_\rho \nabla = \alpha \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) + \beta \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) + \gamma \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

From which

$$[1] \quad (V_\rho \nabla + 1) \nabla = - \nabla (V_\rho \nabla + 1)$$

$$V_\rho \nabla (V_\rho \nabla + 1) = - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

For instance if S_n is a surface harmonic of degree n

$$V_\rho \nabla (V_\rho \nabla + 1) S_n = n(n+1) S_n$$

or

$$[2] \quad (V_\rho \nabla - n) (V_\rho \nabla + n+1) S_n = 0$$

$$[3] \quad \nabla = - \frac{\rho^2}{r^2} \nabla = - \frac{\rho_1}{r} \rho \nabla = - \frac{\rho_1}{r} (S_\rho \nabla + V_\rho \nabla) = \frac{\rho_1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\rho_1}{r} V_\rho \nabla$$

$$[4] \quad (V_\rho \nabla + 1) \rho_1 = - \rho_1 (V_\rho \nabla + 1)$$

⁽¹⁾ For negative energy states, $k = - \sqrt{(p^2 + k_0^2)}$.

III. — DIRAC'S RELATIVISTIC EQUATION.

One form in which this may be written is

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} + i k_0 \alpha_4 \psi$$

in which ψ is a one-column matrix and $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ are 4×4 matrices. Here the velocity of light c is unity and $k_0 = \frac{m}{\hbar}$ where m is the mass of the electron. The four matrices are in order equivalent to

$$-\gamma()\beta, \quad i\alpha(), \quad -\gamma()\alpha, \quad -\gamma()\gamma$$

operating on the quaternion $\psi = \psi_1\alpha + \psi_2\beta + \psi_3\gamma + \psi_4$. We can get a symmetrical form by putting

$$\alpha_1 = -\gamma()\alpha, \quad \alpha_2 = -\gamma()\beta, \quad \alpha_3 = -\gamma()\gamma, \quad \alpha_4 = i\alpha()$$

and we thus get the quaternion form of the equation

$$[1] \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\gamma\psi\nabla - k_0\alpha\psi$$

and its conjugate

$$[2] \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\nabla\psi^*\gamma + k_0\psi^*\alpha$$

of these [2] is the easier form to work with.

Multiplying [1] by ψ^* from the left and [2] by ψ from the right and taking the scalar product we get

$$\frac{\partial}{\partial t} S\psi^*\psi = -S\nabla\psi^*\gamma\psi = -S\nabla\bar{V}\psi^*\gamma\psi.$$

Which shows $-e\bar{V}\psi^*\gamma\psi$ is the vector flux.

Other mean densities connected with the equation are in quaternion form

the magnetic moment

$$[i] \quad \frac{e\hbar V\psi^*\alpha\psi}{2m}$$

the electric moment

$$[ii] \quad -\frac{e \hbar V \psi^* \beta \psi}{2m}$$

the spin

$$[iii] \quad -\frac{1}{2} i \hbar V \psi^* \psi$$

two scalars

$$[iv] \quad I_1 = -i S \psi^* \alpha \psi ; \quad I_4 = -i S \psi^* \beta \psi$$

We proceed to consider these.

IV. — TRANSFORMATION OF THE WAVE FUNCTIONS

Consider the function $f(\psi) = l(\psi) + m\gamma(\psi)\varepsilon$ we see at once that

$$f^{-1}(\psi) = l(\psi) - m\gamma(\psi)\varepsilon$$

and if $\psi = f\psi'$ we have

$$\begin{aligned} \gamma\psi &= \gamma f\psi' = f\gamma\psi' \\ \alpha\psi &= \alpha f\psi' = f^{-1}\alpha\psi' \end{aligned}$$

We consider the function

$$H = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \gamma\psi\nabla + k_0\alpha\psi$$

and we calculate

$$f(H) = f\left\{ \frac{\partial}{\partial t} f(\psi') + \gamma f(\psi')\nabla + k_0\alpha f(\psi') \right\}.$$

For the last term

$$\begin{aligned} k_0 f\alpha f\psi' &= k_0\alpha f^{-1}f\psi' \\ &= k_0\alpha\psi' \end{aligned}$$

The first term gives

$$\frac{\partial}{\partial t} f^2\psi' = (l^2 + m^2) \frac{\partial\psi'}{\partial t} + 2lm\gamma \frac{\partial\psi'}{\partial t} \varepsilon$$

The first and second terms give

$$(l^2 + m^2) \frac{\partial \psi'}{\partial t} - lm \psi' (\varepsilon \nabla + \nabla \varepsilon) + \gamma \left\{ \psi' (l^2 \nabla - m^2 \varepsilon \nabla \varepsilon) + 2lm \frac{\partial \psi'}{\partial t} \varepsilon \right\}.$$

Collecting terms we have by

$$f(H) = \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \gamma \psi' \nabla + k_0 \alpha \psi'.$$

Hence if

$$\begin{aligned} \nabla' + i \frac{\partial}{\partial t'} &= (l + m i \varepsilon) \left(\nabla + i \frac{\partial}{\partial t} \right) (l + m i \varepsilon) \\ \psi' &= l \psi - m \gamma \psi \varepsilon \end{aligned}$$

the Dirac equation remains unchanged in form.

For the general LORENTZ transformation for which

$$\nabla' + i \frac{\partial}{\partial t'} = \bar{b} \left(\nabla + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{a},$$

where

$$a = (l - m i \varepsilon) r, \quad b = r^{-1} (l - m i \varepsilon)$$

we easily obtain

$$\begin{aligned} \psi + i \gamma \psi &= (\psi' + i \gamma \psi') b \\ \psi - i \gamma \psi &= (\psi' - i \gamma \psi') a^{-1} \\ \psi &= l \psi' r^{-1} + m \gamma \psi' r^{-1} \varepsilon. \end{aligned}$$

As an example let us consider the functions

$$V \psi^* \beta \psi \quad \text{and} \quad V \psi^* \alpha \psi$$

we have

$$\begin{aligned} \psi' &= l \psi - m \gamma \psi \varepsilon \\ \psi^{*'} &= l \psi^* - m \varepsilon \psi^* \gamma \\ \beta \psi' &= l \beta \psi - m \alpha \psi \varepsilon. \end{aligned}$$

From which

$$V \psi^{*'} \beta \psi' = l^2 V \psi^* \beta \psi + m^2 \varepsilon (V \psi^* \beta \psi) \varepsilon - lm \{ \bar{V} \psi^* \alpha \psi \varepsilon - \bar{V} \varepsilon \psi^* \alpha \psi \}$$

Or putting

$$\bar{\pi} = -\frac{e\hbar}{2m} V \psi^* \beta \psi, \quad \bar{\mu} = \frac{e\hbar}{2m} V \psi^* \alpha \psi$$

$$\bar{\pi}' = l^2 \bar{\pi} + m^2 \varepsilon \bar{\pi} \varepsilon + lm(\bar{\mu} \varepsilon - \varepsilon \bar{\mu})$$

and in the same manner

$$\bar{\mu}' = l^2 \bar{\mu} + m^2 \varepsilon \bar{\mu} \varepsilon - lm(\bar{\pi} \varepsilon - \varepsilon \bar{\pi})$$

V. — WAVE FUNCTION AS SPINORS

Any wave-function can be expressed in terms of the units

$$\gamma, \varepsilon, \varepsilon\gamma, 1.$$

Putting

$$\psi = \psi_1 \gamma + \psi_2 \varepsilon + \psi_3 \varepsilon\gamma + \psi_4$$

$$\psi' = \psi'_1 \gamma + \psi'_2 \varepsilon + \psi'_3 \varepsilon\gamma + \psi'_4$$

We have

$$\psi' = l\psi - m\gamma\psi\varepsilon$$

and finally

$$\psi'_1 = l\psi_1 + m\psi_2; \quad \psi'_3 = l\psi_3 - m\psi_4$$

$$\psi'_2 = m\psi_1 + l\psi_2; \quad \psi'_4 = l\psi_4 - m\psi_3$$

The transformations $(\psi_1, \psi_2) \rightarrow (\psi'_1, \psi'_2)$ and $(\psi_3, \psi_4) \rightarrow (\psi'_3, \psi'_4)$ have the appearance of equal and opposite hyperbolic transformations but geometrically they are not except in the very special case $S\varepsilon\gamma=0$.

VI. — THE FREE ELECTRON

The equation of the free electron is

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\gamma \psi \nabla - k_0 \alpha \psi$$

or

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\psi^* \gamma + k_0 \psi^* \alpha.$$

Putting

$$\psi = \psi_0 e^{-i(kx - \omega p_x - \gamma p_y - \alpha p_z)}$$

where ψ_0 is a constant quaternion we get, on putting

$$\omega = \alpha p_x + \beta p_y + \gamma p_z, \quad p^2 = |\omega|^2,$$

and

$$p\omega_1 = \omega,$$

$$k\psi_0 = p\gamma\psi_0\omega_1 - k_0 i\alpha\psi_0$$

There are various methods for finding ψ_0 . The following is lengthy but it introduces a rather general treatment.

Let τ be a solution of

$$[1] \quad i\alpha\tau = \tau$$

and let

$$[2] \quad \gamma\tau\omega_1 = \tau'$$

then

$$[3] \quad \gamma\tau'\omega_1 = \tau$$

and

$$i\alpha\gamma\tau\omega_1 = -\gamma(i\alpha\tau)\omega_1$$

or

$$[4] \quad i\alpha\tau' = -\tau'$$

Substitute $\psi_0 = u\tau + u'\tau'$ where u, u' are scalars and making use of [1], [2], [3], [4]

$$\{(k+k_0)u - pu'\}\tau + \{(k-k_0)u' - pu\}\tau' = 0$$

From which since

$$i\alpha\tau - \tau = 0 \quad \text{and} \quad i\alpha\tau' + \tau' = 0$$

we get

$$(k+k_0)u = pu'; \quad (k-k_0)u' = pu$$

and

$$k^2 - k_0^2 = p^2.$$

As an example, one value of τ is

$$\beta + i\gamma \quad \text{so that} \quad \tau' = \gamma(\beta + i\gamma)\omega_1 = -(\alpha + i)\omega_1$$

and we have

$$\begin{aligned}\psi_0 &= u\tau + \alpha'\tau' \\ &= u(\beta + i\gamma) - u'(\alpha + i)\omega_1\end{aligned}$$

and

$$\psi_0^* = u(-\beta + i\gamma) - u'\omega_1(\alpha + i)$$

Normalising to unit volume we get

$$1 = S\psi_0^*\psi_0 = 2(u^2 + u'^2)$$

From which

$$u = \frac{p}{2\sqrt{\{k(k+k_0)\}}} \quad , \quad u' = \frac{k+k_0}{2\sqrt{\{k(k+k_0)\}}}$$

The vector

$$\begin{aligned}& V\psi_0^*\gamma\psi_0 \\ &= V\{u(-\beta + i\gamma) - u'\omega_1(\alpha + i)\} - u(\alpha + i) - u'(\beta + i\gamma)\omega_1\} \\ &= -4uu'\omega_1 = -\frac{p}{k}\omega_1 \quad \left(\frac{k}{p} \text{ is the wave velocity}\right)\end{aligned}$$

Further examples are

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \frac{e\hbar}{2m} V\psi^*\alpha\psi = -\frac{e\hbar}{m}\omega_1 V\alpha\omega_1 \\ \bar{\pi} &= -\frac{ek}{2m} \bar{V}\psi^*\beta\psi = \frac{e\hbar}{m} \frac{p}{k} V\alpha\omega_1\end{aligned}$$

VII. — ELECTRON IN A FIELD OF FORCE.

If A_0 , \mathbf{A} denote the 4-potential of a field then in the equation

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\gamma \psi \nabla - k_0 \alpha \psi \quad (k_0 = \frac{m}{\hbar}, c = 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i A_0 e}{\hbar}, \quad \nabla \rightarrow \nabla + \frac{i \mathbf{A} e}{\hbar}$$

and the conjugate equation can be written

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i A_0 e}{\hbar} \right) \psi^* + \left(\nabla - \frac{i \mathbf{A} e}{\hbar} \right) \psi^* \gamma - k_0 \psi^* \alpha = 0$$

Operating on this expression with

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i A_0 e}{\hbar} \right) () - \left(\nabla - \frac{i \mathbf{A} e}{\hbar} \right) () \gamma + k_0 () \alpha$$

we get

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i A_0 e}{\hbar} \right)^2 + \left(\nabla - \frac{i \mathbf{A} e}{\hbar} \right)^2 + k_0^2 \right\} \psi^* - \frac{i e}{\hbar} \mathbf{H} \psi^* + \frac{i e}{\hbar} \mathbf{E} \psi^* \gamma$$

The last two terms are more usually written in the conjugate form and multiplied by $-\hbar^2$ and become

$$i e \hbar (\psi \mathbf{H} + \gamma \psi \mathbf{E})$$

VIII. — THE HYDROGEN LINE SPECTRUM AND ITS FINE STRUCTURE.

In ordinary units putting $A_0 = \frac{e}{r}$ we have

$$[1] \quad \frac{i}{c \hbar} \left(\mathbf{E} + \frac{e^2}{r} \right) \psi^* = -\nabla \psi^* \gamma + \frac{m c}{\hbar} \psi^* \alpha$$

From II[1] and

$$\gamma \alpha = -\alpha \gamma$$

we see that

$$(\bar{V}_\rho \nabla + 1)(\quad)\alpha$$

commutes with every term of [1]. Hence we have an integral

$$[2] \quad (V_\rho \nabla + 1)\psi^* \alpha = -n i \psi^*$$

or

$$[3] \quad V_\rho \nabla \psi^* = -\psi^* + n i \psi^* \alpha$$

using II[3], [1] becomes

$$[4] \quad \frac{i}{c\hbar} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi^* = -\rho_1 \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial r} + \frac{\psi^*}{r} \right) \gamma + \frac{n}{r} \rho_1 i \psi^* \alpha \gamma + \frac{mc}{\hbar} \psi^* \alpha$$

Introducing the quaternions τ, τ' defined by

$$[5] \quad \left\{ \begin{array}{ll} i\tau\alpha = \tau; & \rho_1 \tau \gamma = \tau' \\ \text{and, therefore} & \\ i\tau'\alpha = -\tau'; & \rho_1 \tau' \gamma = \tau \end{array} \right.$$

Assume $\psi^* = u\tau - iv\tau'$ where u and v are functions of τ and we get from [4]

$$i\tau \left\{ \left(E + \frac{e^2}{r} + mc \right) u - \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{n+1}{r} v \right\} + \tau' \left\{ \left(E + \frac{e^2}{r} - mc \right) v + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{n-1}{r} u \right\} = 0$$

and since $i\tau\alpha - \tau = 0$ and $i\tau'\alpha + \tau' = 0$ we get the differential equation for u , and v

$$[6] \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{n+1}{r} v = \left(E + \frac{e^2}{r} + mc \right) u \\ \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{n-1}{r} u = - \left(E + \frac{e^2}{r} - mc \right) v \end{array} \right.$$

In order to solve [3], $(V_\rho \nabla + 1)\psi^* = -n i \psi^* \alpha$ we get

$$u(V_\rho \nabla + 1 + n)\tau - iv(V_\rho \nabla + 1 - n)\tau' = 0$$

which becomes, since

$$(V\rho\nabla+1)\tau'=(V\rho\nabla+1)\rho_1\tau\gamma=-\rho_1(V\rho\nabla+1)\tau\gamma$$

by II[4]

$$u(V\rho\nabla+1+n)\tau+iv\rho_1(V\rho\nabla+1+n)\tau=0,$$

so that

$$(V\rho\nabla+1+n)\tau=0$$

Let τ_0 be any constant solution of $i\tau_0\alpha=\tau_0$ and $\tau'_0=\rho_1\tau_0\gamma$ and let $\tau=\sum_n\tau_n$, $\tau'=\sum_n\tau'_n$ where \sum_n is a function of the angles θ, φ , we have then

$$(V\rho\nabla+1+n)\sum_n=0$$

It is obvious that we have a solution by putting

$$\sum_n=(V\rho\nabla-n)S_n$$

where S_n is a surface harmonic (see II[3]) and thus

$$\tau=(V\rho\nabla-n)S_n\tau_0,$$

and

$$\tau'=\rho_1(V\rho\nabla-n)S_n\tau_0\gamma$$

We easily see that

$$\{V\rho\nabla-(n-1)\}\tau=0$$

So that τ' is a spherical harmonic of degree $(n-1)$. We get finally

$$\psi^*\tau=(u\sum_n\tau_0-iv\rho_1\sum_n\tau_0\gamma)e^{\frac{iEt}{\hbar}}$$

$$\psi=(u\tau_0^*\sum_n^*+iv\gamma\tau_0\sum_n^*\rho_1)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

In order to normalise ψ we must have

$$\int S\psi^*\psi dx dy dz=1$$

Where the integral is taken over all space.

We have

$$\begin{aligned} S\psi^*\psi &= u^2 \sum \sum_n^* \tau_0 \tau_0^* - v^2 S_{\rho_1} \sum_n \tau_0 \tau_0^* \sum_n^* \rho_1 \\ &= (u^2 + v^2) \sum \sum_n^* S \tau_0 \tau_0^* \end{aligned}$$

and we can normalise by making

$$\int (u^2 + v^2) r^2 dr = 1$$

$$\int \sum_n \sum_n^* \sin \theta d\theta d\varphi = 1.$$

$$S \tau_0 \tau_0^* = 1$$

From

$$\sum_n = (V_\rho \nabla - n) S_n, \quad \sum_n^* = -(V_\rho \nabla + n) S_n$$

we get

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_n^* &= -(V_\rho \nabla S_n)^2 + n^2 \\ - \int (V_\rho \nabla S_n)^2 \sin \theta d\theta d\varphi &= \int \left\{ (1 - \mu^2) \left(\frac{\partial S_n}{\partial \mu} \right)^2 + \frac{1}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial S_n}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} d\mu d\varphi \\ &\quad (\mu = \cos \theta) \\ &= n(n+1) \int S_n^2 d\mu d\varphi \end{aligned}$$

Hence

$$\int \sum_n \sum_n^* \sin \theta d\theta d\varphi = n(2n+1) \int S_n^2 d\mu d\varphi$$

If we take

$$\tau_0 = A(\gamma + i\beta) + B(i - \alpha)$$

then

$$\tau_0^* = A^*(-\gamma + i\beta) - B(i + \alpha)$$

and

$$\tau_0 \tau_0^* = 2(AA^* + BB^*)(1 - i\alpha)$$

Hence

$$S \tau_0 \tau_0^* = 1, \quad \text{if} \quad 2(AA^* + BB^*) = 2|A|^2 + 2|B|^2 = 1$$

REFERENCES

- BLATON I., 1935, « Z. Phys » **95**, 937.
- CONWAY A. W., 1911, « Proc. R. I. A. », Sect. A, **29**, 1.
- 1937, « Proc. Roy. Soc. », A, **163**, 152.
- 1945, « Rev. Unión Mat. Arg. », XI 3-17.
- 1947, « Proc. Roy. Soc. », A, **191**, 137-145.
- DIRAC P. M., 1938, « Proc. Roy. Soc. », A, **167**, 148.
- 1945, « Proc. R. I. A. », A, **50**, 261.
- GORMLEY P., 1947, « Proc. R. I. A. », A, **51**, 6.
- HATTAWAY A. S., 1902, « Trans. Amer. Math. », **3**, 46.
- KLEIN F., 1927, *Vorlesungen über die Entwicklung des Mathematik im 19 Jahrhundert* (Berlin) II, 84.
- SCHERRER W., 1935, « Comm. Math. Helv. », **7**, 141.
- SILBERSTEIN L., 1924, *Theory of Relativity* (2nd ed.). London, Macmillan & Co. Ltd.
- SOMMERFELD A., 1936, « Sitz. Akad. Wiss. », Wien, II a, **145**, 639.
- STRINGHAM I., 1901, « Trans. Amer. Math. Soc. », **2**, 183.
- TEMPLE G., 1938, « Proc. Roy. Soc. », A, **163**, 122.
- WEISS P., 1941, « Proc. R. I. A. », A, **46**, 129.

LA TEORIA INVARIANTIVA DEL SISTEMA DIFFERENZIALE FORMATO DA DUE EQUAZIONI LINEARI DI ORDINE QUALUNQUE.

I SISTEMI RIDUCIBILI A COEFFICIENTI COSTANTI (*)

NOTA SECONDA

ARMANDO CHIELLINI

SUMMARY. — Ea quae in alia eiusdem nominis dissertatione conclusit, Auctor adhibet ad investiganda systemata non reducibilia, quorum coefficientia sint constantia. Perpendit deinceps Fuchsiana systemata et pseudosystemata primae speciei, et, posito $n=3$, de eo, quem exceptum vocant casum, disserit, cuius geometricam dat interpretationem.

1. — Considerato un sistema lineare di forma ridotta

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{12}y^{(n-2)} + \dots + p_{1n}y + q_{11}z^{(n-1)} + q_{12}z^{(n-2)} + \dots + q_{1n}z = 0 \\ z^{(n)} + p_{21}y^{(n-1)} + p_{22}y^{(n-2)} + \dots + p_{2n}y + q_{22}z^{(n-2)} + \dots + q_{2n}z = 0, \end{cases}$$

osserviamo che, se fosse a coefficienti costanti, tanto i suoi invarianti relativi che assoluti risulterebbero costanti; allora, dato il significato di invariante assoluto, possiamo senz'altro enunciare il TEOREMA: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare, di forma ridotta, sia riducibile ad uno a coefficienti costanti, è che i suoi invarianti assoluti risultino costanti.*

Osserviamo subito a questo proposito (analogamente a quanto si è osservato altrove per le equazioni lineari) che l'importanza pratica di questo teorema, a prima vista, è assai relativa, in quanto che per

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Ugo Amaldi l'11 novembre 1948.

un qualunque sistema differenziale, il verificare se effettivamente tutti i suoi invarianti assoluti risultano costanti, è praticamente impossibile, data l'enorme complicazione dei calcoli a cui andremmo incontro, senza parlare poi del fatto che la forma esplicita degli invarianti stessi andrebbe di volta in volta calcolata.

Però tale teorema si presta egualmente a darci un risultato di importanza pratica effettiva, perchè ci permette di *stabilire quella sostituzione che* (indipendentemente dalla preventiva conoscenza della possibilità) *attuа la trasformazione del sistema dato in un altro a coefficienti costanti*, se tale trasformazione è possibile (cioè se siamo nelle condizioni richieste dal precedente teorema).

2. - A questo scopo infatti cominciamo con l'osservare che se gli invarianti assoluti sono costanti, cioè se si ha

$$J_m^{(i)} = k_i, \quad j_m^{(i)} = h_i, \quad (k_i, h_i \text{ cost}^ti)$$

derivando logicamente segue

$$\frac{\{0_m^{(i)}\}'}{0_m^{(i)}} - m \frac{\{g_1^{(i)}\}'}{g_1^{(i)}} = 0, \quad \frac{\{g_m^{(i)}\}'}{g_m^{(i)}} - \frac{m \{g_1^{(i)}\}'}{g_1^{(i)}} = 0$$

da cui

$$\frac{\{0_m^{(i)}\}'}{m 0_m^{(i)}} = \frac{\{g_m^{(i)}\}'}{m g_m^{(i)}} = \frac{\{g_1^{(i)}\}'}{g_1^{(i)}}$$

Ciò premesso, riprendiamo le formule stabilite nella nota prima, relative al sistema trasformato

$$\left\{ \begin{aligned} P_{12} &= \frac{1}{(\xi')^2} \left\{ \frac{-2(n+1)\eta' + (n+1)\eta^2 + 12p_{12}}{12} \right\} \\ P_{13} &= \frac{1}{(\xi')^3} \left\{ \frac{-(n+1)\eta'' + 3(n+1)\eta\eta' - (n+1)\eta^3 - 12p_{12}\eta + 4p_{13}}{4} \right\} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{1}{\xi'} q_{11} \\ Q_{12} &= \frac{1}{(\xi')^2} \{ -q_{11}\eta + q_{12} \} \\ Q_{13} &= \frac{1}{(\xi')^3} \left\{ \frac{-(n+3)}{2} q_{11}\eta' + \frac{n+9}{4} q_{11}\eta^2 - 3q_{12}\eta + q_{13} \right\} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

e le analoghe per P_{2h} , Q_{2h} ed imponiamo la condizione che i coefficienti P , Q risultino costanti, cioè che le loro derivate siano nulle. Otterremo in tal maniera $2(2n-1)$ equazioni differenziali nella qualità η , le quali dovranno essere tra loro compatibili; andremo quindi a stabilire tale compatibilità.

A questo scopo cominciamo con l'osservare che i coefficienti P_{1h} , Q_{2h} sono dati dalle stesse espressioni (salvo scambiare p_{1h} con q_{2h}) le quali, a loro volta, coincidono come si è osservato al n. 4 del lavoro precedente, con quelle che si ottengono nel caso delle equazioni lineari in una sola funzione incognita e quindi la compatibilità delle condizioni relative ad essi è già stata verificata a suo tempo⁽¹⁾, ottenendosi le relazioni

$$\eta = \frac{[\theta_3^{(i)}]'}{3 \theta_3^{(i)}} = \frac{[\theta_4^{(i)}]'}{4 \theta_4^{(i)}} = \dots = \frac{[\theta_n^{(i)}]'}{n \theta_n^{(i)}}.$$

Resterà quindi da verificare la compatibilità delle equazioni in η , che si ottengono derivando Q_{1h} e P_{2h} ; cominciando a derivare le coppie di coefficienti

$$(Q_{11}, P_{21}); (Q_{12}, P_{22}); \dots$$

ed imponendo la condizione che tali derivate risultino nulle, otteniamo le coppie di condizioni in η :

$$[a] \quad \begin{cases} -\eta q_{11} + q'_{11} = 0 \\ -\eta p_{21} + p'_{21} = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$[b] \quad \begin{cases} -q_{11} \eta' + 2q_{12} \eta^2 - q'_{11} \eta - 2q_{12} \eta + q'_{12} = 0 \\ -p_{21} \eta' + 2p_{22} \eta^2 - p'_{21} \eta - 2p_{22} \eta + p'_{22} = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

e imponiamo la condizione che tali equazioni risultino tra loro compatibili.

⁽¹⁾ Vedi lavoro citato a nota 5 della memoria precedente o cioè: CHIELLINI: *Sulla effettiva riduzione di un'equazione differenziale lineare ed omogenea alla forma ridotta di Laguerre-Forsyth*. « Rend. Facoltà di Scienze di Cagliari », vol. VIII, 1938.

Cominceremo a stabilire la compatibilità delle (a) tra di loro, poi della prima delle [a] con la prima delle [b] e della seconda delle [a] con la seconda delle [b] e così di seguito.

Dalle [a] eliminando η , si ottiene $\frac{q'_{11}}{q_{11}} = \frac{p'_{21}}{p_{21}}$ cioè senz'altro

$$\eta = \frac{[\mathfrak{S}_1^{(1)}]'}{\mathfrak{S}_1^{(1)}} = \frac{[\mathfrak{S}_1^{(2)}]'}{\mathfrak{S}_1^{(2)}};$$

dalla prima delle [a] si deduce poi $\eta = \frac{q'_{11}}{q_{11}}$, da cui derivando

$$\eta' = \frac{q''_{11}}{q_{11}} - \left(\frac{q'_{11}}{q_{11}}\right)^2$$

e sostituendo nella prima delle (b), dopo semplici riduzioni, si trova

$$q'_{12} - q''_{11} = \frac{2q'_{11}(q_{12} - q'_{11})}{q_{11}}$$

cioè $\frac{[\mathfrak{S}_2^{(1)}]'}{2\mathfrak{S}_2^{(1)}} = \frac{[\mathfrak{S}_1^{(1)}]'}{\mathfrak{S}_1^{(1)}} = \eta$; analogamente si troverebbe $\frac{[\mathfrak{S}_2^{(2)}]'}{2\mathfrak{S}_2^{(2)}} = \frac{[\mathfrak{S}_1^{(2)}]'}{\mathfrak{S}_1^{(2)}}$

Per completare la ricerca, poichè i coefficienti p_{12} , q_{22} si determinano mediante le quadriderivate di q_{11} e p_{21} , dovremo stabilire la compatibilità per esempio tra la prima delle [a] e l'equazione di condizione che si ottiene imponendo la condizione che la derivata di P_{12} sia nulla, cioè la compatibilità delle due equazioni

$$\begin{cases} -\eta q_{11} + q'_{11} = 0 \\ 6(n+1)\eta\eta' - 2(n+1)\eta^3 - 24p_{12}\eta - 2(n+1)\eta'' + 12p'_{12} = 0. \end{cases}$$

A questo scopo si ricava η dalla prima, si deriva due volte e si sostituisce nella seconda, ottenendo l'equazione di condizione:

$$[c] \quad 12(n+1)\left(\frac{q''_{11}}{q_{11}}\right)\left(\frac{q'_{11}}{q_{11}}\right) - 12(n+1)\left(\frac{q'_{11}}{q_{11}}\right)^3 - 2(n+1)\frac{q'''_{11}}{q_{11}} + 12p'_{12} - 26p_{12}\frac{q'_{11}}{q_{11}} = 0;$$

se ora prendiamo l'espressione della quadriderivata di q_{11} , cioè di $\theta_{1,1}^{(4)}$, che è un invariante di peso 4 ed imponiamo la condizione che sia

$$\frac{[\theta_{1,1}^{(4)}]'}{4\theta_{1,1}^{(4)}} = \frac{[\mathfrak{S}_1^{(1)}]'}{\mathfrak{S}_1^{(1)}} = \eta$$

otteniamo proprio la [c].

In tal maniera la questione propostaci resta completamente risolta, e cioè: *Dato un qualunque sistema differenziale lineare di due equazioni di ordine n , sotto forma ridotta, si esegue su di esso la sostituzione di funzione incognita e di variabile, definita da*

$$y = \alpha \cdot Y, \quad z = \alpha \cdot Z, \quad \xi = \varphi(x)$$

con $\frac{\xi''}{\xi} = \eta$, $\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{(n-1)}{2} \eta$, dove la funzione trasformatrice η è data da

$$\eta = \frac{[\mathfrak{P}_1^{(1)}]'}{\mathfrak{P}_1^{(1)}}$$

o da uno qualunque altro dei precedenti rapporti; se il sistema è riducibile ad uno a coefficienti costanti, la precedente trasformazione ve lo riduce.

3. - ESEMPIO: cerchiamo le condizioni sotto le quali il sistema

$$y''' + \frac{z''}{x} - \frac{3}{x^2} y' - \frac{3}{x^3} y + a(x) \cdot z = 0, \quad z''' + \frac{1}{x^2} y' - \frac{5}{x^2} z' + b(x) \cdot y + \frac{z}{x^3} = 0$$

è riducibile ad uno a coefficienti costanti.

Si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{12} = \frac{-1}{x^2}, p_{13} = \frac{-3}{x^3}; q_{11} = \frac{1}{3x}, q_{12} = 0, q_{13} = a(x) \\ p_{21} = 0, p_{22} = \frac{1}{3x^2}, p_{23} = b(x); q_{22} = \frac{-5}{3x^2}, q_{23} = \frac{1}{x^3} \end{array} \right.$$

e perciò in questo caso si trovano subito gli invarianti differenziali che risultano dati da

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_3^{(1)} = \frac{-2}{x^3}, \theta_{3,1}^{(1)} = \frac{72}{x^8}; \mathfrak{P}_1^{(1)} = \frac{1}{3x}, \mathfrak{P}_2^{(1)} = \frac{1}{3x^2}, \mathfrak{P}_4^{(1)} = \frac{a}{3x} \\ \theta_3^{(2)} = \frac{-4}{x^3}, \theta_{3,1}^{(2)} = \frac{-48 \cdot 28}{x^8}; \mathfrak{P}_2^{(2)} = 0, \mathfrak{P}_2^{(2)} = \frac{1}{3x^2}, \mathfrak{P}_3^{(2)} = b + \frac{1}{x^3}. \end{array} \right. \quad (1)$$

(1) In base all'osservazione del numero 7 del precedente lavoro, poichè è $p_{21} = 0$, ci si serve di p_{22} (invariante di peso 2) e della formula $\mathfrak{P}_3^{(2)} = p_{23} - \frac{3}{2} p'_{22}$.

Allora gli invarianti assoluti risultano senz'altro costanti eccetto i due

$$J_4 = \frac{\mathfrak{S}_4^{(1)}}{[\mathfrak{S}_1^{(1)}]^4}, \quad J_3 = \frac{\mathfrak{S}_3^{(2)}}{[\mathfrak{S}_1^{(1)}]^3}$$

per i quali si trova

$$J_4 = 27 a x^3, \quad J_3 = 27 (b x^3 + 1);$$

affinchè anche questi risultino costanti, dovrà perciò aversi

$$[d] \quad a(x) = \frac{A}{x^3}, \quad b(x) = \frac{B}{x^3}$$

con A, B costanti arbitrarie.

Ma procediamo secondo quanto si è detto nel numero precedente; si ha per la funzione trasformatrice $\eta = \frac{-1}{x}$, da cui

$$\xi' = \frac{1}{x}, \quad \alpha = \frac{1}{x}$$

ed eseguendo la trasformazione

$$y = \frac{1}{x} Y, \quad z = \frac{1}{x} Z,$$

segue di nuovo che $a(x)$ e $b(x)$ devono essere della forma (d)

4. - I sistemi del tipo di Fuchs di prima specie.

In analogia a ciò che si è fatto sia per le equazioni differenziali in una sola funzione incognita, che per i sistemi, nel caso di $n=2$, chiameremo in generale *sistemi di Fuchs di 1ª specie* i sistemi lineari del tipo

$$\begin{cases} y^{(n)} + \sum_1^n \binom{n}{k} \frac{a_{1k}}{x^k} y^{(n-k)} + \sum_1^n \binom{n}{k} \frac{b_{1k}}{x^k} z^{(n-k)} = 0 \\ z^{(n)} + \sum_1^n \binom{n}{k} \frac{a_{2k}}{x^k} y^{(n-k)} + \sum_1^n \binom{n}{k} \frac{b_{2k}}{x^k} z^{(n-k)} = 0 \end{cases}$$

con a_{ik} , b_{ik} costanti arbitrarie.

Riducendoli alla forma ridotta, mantengono ancora la forma precedente e quindi si trova senz'altro che gli invarianti fondamentali assumono la forma semplicissima

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_m^{(1)} = \frac{A_{1m}}{x^m} & \theta_m^{(2)} = \frac{B_{2m}}{x^m} \\ \vartheta_m^{(1)} = \frac{B_{1m}}{x^m} & \vartheta_m^{(2)} = \frac{A_{2m}}{x^m} \end{array} \right. \quad (A_{im}, B_{im} \text{ cost}^ti)$$

da cui si deduce che gli invarianti assoluti risultano costanti; perciò tali sistemi saranno riducibili a coefficienti costanti. La funzione trasformatrice è in questo caso

$$\eta = \frac{-1}{x}$$

e quindi dovremo eseguire la sostituzione definita da

$$y = x^{\frac{n-1}{2}} Y, \quad z = x^{\frac{n-1}{2}} Z, \quad \xi = \log x.$$

Se poi teniamo presente che, per integrare i sistemi a coefficienti costanti basta porre

$$Y = e^{\alpha \xi} + B e^{\beta \xi}, \quad Z = A e^{\alpha \xi} + e^{\beta \xi}$$

(con A, B, α, β costanti che si determinano algebricamente) se ne deduce che i sistemi di Fuchs di prima specie si possono integrare direttamente ponendo

$$Y = x^\alpha + B x^\beta, \quad Z = A x^\alpha + x^\beta$$

e questo risultato mostra l'intima analogia tra questi sistemi e le equazioni di Fuchs di prima specie.

5. - *Gli pseudosistemi di Fuchs di prima specie*

Estendiamo il risultato precedente, supponendo che la funzione trasformatrice relativa ad un certo sistema lineare sia

$$y = a x^{-1},$$

con a costante arbitraria; tali sistemi li diremo *pseudosistemi di Fuchs di 1ª specie*, cioè chiameremo *pseudosistemi di Fuchs di prima specie* quei sistemi differenziali lineari, di forma ridotta, i cui invarianti differenziali soddisfano alle condizioni

$$[1] \quad \frac{[\theta_m^{(i)}]'}{m \theta_m^{(i)}} = \frac{[\vartheta_m^{(i)}]'}{m \vartheta_m^{(i)}} = a x^{-1}$$

Sotto questa ipotesi gli invarianti assoluti risultano costanti e quindi tali sistemi saranno trasformabili in altri a coefficienti costanti.

Andiamo a stabilire la forma di tali sistemi differenziali; integrando le [1], segue

$$\begin{cases} \theta_m^{(1)} = \alpha_{1m} x^{ma}, & \vartheta_m^{(1)} = \beta_{1m} x^{ma} \\ \vartheta_m^{(2)} = \beta_{2m} x^{ma}, & \theta_m^{(2)} = \alpha_{2m} x^{ma} \end{cases} \quad (\alpha_{im}, \beta_{im} \text{ cost.}^{(1)})$$

e quindi avremo per i coefficienti espressioni del tipo

$$[2] \quad \begin{cases} p_{12} = \frac{A_{12}}{x^2} + B_{12} x^{2a} \\ p_{13} = \frac{A_{13}}{x^3} + B_{13} x^{3a} + C_{13} x^{2a-1} \\ p_{14} = \frac{A_{14}}{x^4} + B_{14} x^{4a} + C_{14} x^{3a-1} + D_{14} x^{2a-2} \\ p_{15} = \frac{A_{15}}{x^5} + B_{15} x^{5a} + C_{15} x^{4a-1} + D_{15} x^{3a-2} + E_{15} x^{2a-3} \\ \dots \end{cases}$$

$$[3] \quad \begin{cases} q_{11} = a_{11} x^a \\ q_{12} = a_{12} x^{2a} + b_{12} x^{a-1} \\ q_{13} = a_{13} x^{3a} + b_{13} x^{2a-1} + c_{13} x^{a-2} \\ q_{14} = a_{14} x^{4a} + b_{14} x^{3a-1} + c_{14} x^{2a-2} + d_{14} x^{a-3} \\ q_{15} = a_{15} x^{5a} + b_{15} x^{4a-1} + c_{15} x^{3a-2} + d_{15} x^{2a-3} + e_{15} x^{a-4} \\ \dots \end{cases}$$

e analogamente per i coefficienti q_{2k}, p_{2k} .

6. - Però non tutti i sistemi i cui coefficienti sono dati dalle [2] e [3] appartengono al nostro tipo, nel senso che le costanti $A_{ik}, B_{ik}, \dots, a_{ik}, b_{ik}, \dots$ non sono del tutto arbitrarie; limitiamoci a verificarlo per il caso di $n=3$.

A questo scopo invertiremo in certo qual modo il risultato precedente, cioè partiremo da un sistema i cui coefficienti siano dati da espressioni del tipo [2] e [3] e cercheremo le condizioni perchè siano soddisfatte le [1]. Per $n=3$ le [2] o [3] si riducono a

$$[4] \quad \begin{cases} p_{12} = \frac{A_{12}}{x^2} + B_{12} x^{2a} \\ p_{13} = \frac{A_{13}}{x^3} + B_{13} x^{3a} + C_{13} x^{2a-1} \end{cases}$$

$$[5] \quad \begin{cases} q_{11} = a_{11} x^a \\ q_{12} = a_{12} x^{2a} + b_{12} x^{a-1} \\ q_{13} = a_{13} x^{3a} + b_{13} x^{2a-1} + c_{13} x^{a-2} \end{cases}$$

e alle analoghe per la seconda equazione

$$[5_1] \quad \begin{cases} p_{21} = A_{21} x^a \\ p_{22} = A_{22} x^{2a} + B_{22} x^{a-1} \\ p_{23} = A_{23} x^{3a} + B_{23} x^{2a-1} + C_{23} x^{a-2} \end{cases}$$

$$[4_1] \quad \begin{cases} q_{22} = \frac{a_{22}}{x^2} + b_{22} x^{2a} \\ q_{23} = \frac{a_{23}}{x^3} + b_{23} x^{3a} + c_{23} x^{2a-1} \end{cases}$$

Sostituendo nelle espressioni degli invarianti, si trova

$$\begin{cases} A_{12} = \frac{-a(a+2)}{3}, & A_{13} = a(a+2), & C_{13} = 3a B_{12} \\ b_{12} = a a_{11}, & b_{13} = 2a a_{12}, & c_{13} = -3a a_{11} \end{cases}$$

e analogamente per la seconda equazione, così che il più generale sistema di Fuchs di 1^a specie, per $n=3$, avrà la forma

$$y''' + 3 \left\{ \frac{-a(a+2)}{3x^2} + B_{12} x^{2a} \right\} y' + \left\{ \frac{a(a+2)}{x^3} + B_{13} x^{3a} + 3a B_{12} x^{2a-1} \right\} y + \\ + 3a_{11} x^a z'' + 3 \{ a_{12} x^{2a} + a a_{11} x^{a-1} \} z' + \{ a_{13} x^{3a} + 3a a_{12} x^{2a-1} - 3a a_{11} x^{a-2} \} z = 0$$

e analogamente per la seconda equazione. Eseguendo poi su di esso la trasformazione definita dalla funzione trasformatrice

$$\eta = \frac{a}{x},$$

il sistema si trasforma nel seguente a coefficienti costanti

$$\begin{cases} y''' + 3B_{12}y' + B_{13}y + 3a_{11}z'' + 3a_{12}z' + a_{13}z = 0 \\ z''' + 3A_{21}y'' + 3A_{22}y' + A_{23}y + 3b_{22}z' + b_{23}z = 0 \end{cases}$$

7. - *Il caso eccezionale per $n=3$* : Se un'equazione del sistema è di ordine inferiore ad n , ci possiamo sempre riportare al caso generale, derivando ed eliminando opportunamente.

Però possiamo anche fare altrimenti e cioè stabilire direttamente, anche in tal caso, un sistema completo di invarianti, definendo preliminarmente, per ogni sistema, una particolare ed opportuna forma ridotta e poi procedendo su di essa in maniera analoga a quella che si tiene per il caso generale.

Per esempio, ed è questo il caso più interessante che ora vogliamo esaminare, supponiamo che un'equazione sia di ordine n e l'altra di ordine $n-1$, cioè supponiamo un sistema della forma

$$Ay^{(n)} + Bz^{(n)} \dots = 0, \quad Cy^{(n-1)} + Dz^{(n-1)} + \dots = 0; \quad (1)$$

mediante la trasformazione $y = \lambda Y$, $z = \mu Z$ si possono far sparire, nella prima equazione, i termini in $y^{(n-1)}$ e $z^{(n-1)}$ ed è appunto questa la forma ridotta da cui conviene partire in questo caso, per stabilire il sistema completo di invarianti.

8. - È quanto mai interessante, per $n=3$, dare l'interpretazione geometrica di questo caso, interpretazione che del resto si può senz'altro estendere in generale al caso di n qualunque.

Partiamo dal sistema differenziale sotto forma generale

$$[d] \begin{cases} Ay''' + Bz''' + 3P_{11}y'' + 3P_{12}y' + P_{13}y + 3Q_{11}z'' + 3Q_{12}z' + Q_{13}z = 0 \\ Cy''' + Dz''' + 3P_{21}y'' + 3P_{22}y' + P_{23}y + 3Q_{21}z'' + 3Q_{22}z' + Q_{23}z = 0 \end{cases};$$

(1) Vedi, per $n=2$, il secondo dei nostri lavori citati a nota 1 della memoria precedente.

se $\Omega(x) = AD - BC \neq 0$, il sistema stesso si può senz'altro scrivere sotto la forma ridotta

$$[6] \quad \begin{cases} y''' + 3p_{12}y' + p_{13}y + 3q_{14}z'' + 3q_{12}z' + q_{13}z = 0 \\ z''' + 3p_{24}y'' + 3p_{22}y' + p_{23}y + 3q_{22}z' + q_{23}z = 0 \end{cases},$$

mentre se $\Omega(x) = AD - BC \equiv 0$, il sistema si può ridurre alla forma

$$[7] \quad \begin{cases} y''' + Bz''' + 3P_{11}y'' + 3P_{12}y' + P_{13}y + 3Q_{14}z'' + 3Q_{12}z' + Q_{13}z = 0 \\ y'' + Nz'' + 3P_{22}y' + P_{23}y + 3Q_{22}z' + Q_{23}z = 0 \end{cases}$$

Indichiamo ora con $y_i(x), z_i(x) [i = 1, 2, \dots, 6]$ sei coppie di soluzioni del sistema [d]; anche

$$[8] \quad y(x) = \sum_0^1 c_i y_i(x), \quad z(x) = \sum_0^1 c_i z_i(x) \quad (c_i = \text{cost}^{\text{te}})$$

saranno coppie di soluzioni ed anzi ci daranno la soluzione generale se sarà possibile determinare le costanti c_i in guisa che, per un $x = x_0$ di regolarità dei coefficienti, le $(y, z), (y', z'), (y'', z'')$ assumano valori arbitrari.

E ciò, come subito risulta, sarà possibile se il determinante

$$W(z) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & y'_1 & z'_1 & y''_1 & z''_1 \\ y_2 & z_2 & y'_2 & z'_2 & y''_2 & z''_2 \\ y_3 & z_3 & y'_3 & z'_3 & y''_3 & z''_3 \\ y_4 & z_4 & y'_4 & z'_4 & y''_4 & z''_4 \\ y_5 & z_5 & y'_5 & z'_5 & y''_5 & z''_5 \\ y_6 & z_6 & y'_6 & z'_6 & y''_6 & z''_6 \end{vmatrix}$$

sarà diverso da zero nel punto x_0 ⁽¹⁾.

(1) Si trova subito, per $W(x)$, la formula

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^x (p_{11} + q_{22}) dx}$$

Supponiamo invece $W(x)$ identicamente nullo e di caratteristica 5; allora esisterà una sestupla di numeri $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ per cui risulta

$$\alpha_1 y_i + \alpha_2 y'_i + \alpha_3 y''_i + \beta_1 z_i + \beta_2 z'_i + \beta_3 z''_i = 0,$$

da cui si deduce, per le [8], che anche per ogni altra soluzione del sistema sarà

$$[9] \quad \alpha_1 y_i + \alpha_2 y'_i + \alpha_3 y''_i + \beta_1 z_i + \beta_2 z'_i + \beta_3 z''_i = 0$$

così che il sistema dato si ridurrà alla forma [7] ⁽¹⁾.

9. - Ciò premesso interpretiamo le due sestuple di soluzioni particolari $(y_i), (z_i)$ come coordinate omogenee di un punto di un S_5 ed indichiamo con C_y, C_z le due curve normali di S_5 , di equazioni parametriche

$$C_y): y_i = y_i(x); \quad C_z): z_i = z_i(x);$$

poniamo poi tra i punti di esse una corrispondenza biunivoca senza eccezioni chiamando corrispondenti due punti P_y, P_z dati dallo stesso valore del parametro x . Le congiungenti $P_y P_z$ individueranno una varietà rigata V_2 , la quale, evidentemente, risulterà determinata a meno di una proiettività, potendosi sempre sostituire le sei coppie di soluzioni (y_i, z_i) con altre (\bar{y}_i, \bar{z}_i) legate alle precedenti dalle relazioni

$$\bar{y}_i = \sum_k^6 c_{ik} y_k, \quad \bar{z}_i = \sum_k^6 c_{ik} z_k \quad (c_{ik} = \text{cost.})$$

con il determinante $\|c_{ik}\| \neq 0$.

Supponiamo ora che sia $W(x) \equiv 0$ e che la sua caratteristica sia 5; varrà la [9], che potremo scrivere sotto la forma

$$\alpha_1 y + \alpha_2 y' + \alpha_3 y'' = -(\beta_1 z + \beta_2 z' + \beta_3 z''),$$

da cui si deduce che i due punti

$$P_y^* \equiv (\alpha_1 y + \alpha_2 y' + \alpha_3 y''), \quad P_z^* \equiv (-\beta_1 z - \beta_2 z' - \beta_3 z'')$$

⁽¹⁾ Se la caratteristica di W fosse minore di 5, di relazioni del tipo [9] ne esisterebbero almeno due ed allora il sistema si ridurrebbe a due equazioni del 2° ordine.

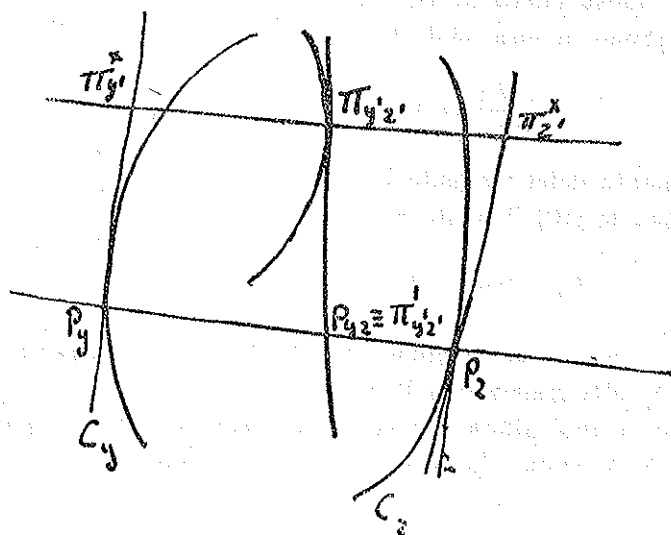
coincidono, il che porta di conseguenza che i piani osculatori alle C_y , C_z nei punti corrispondenti P_y , P_z , i quali sono individuati rispettivamente dalle torse di punti

$$\begin{cases} P_y \equiv (y), & P'_y \equiv (y'), & P''_y \equiv (y''); \\ P_z \equiv (z), & P'_z \equiv (z'), & P''_z \equiv (z''); \end{cases}$$

hanno a comune il punto $P_y^* \equiv P_z^*$ e quindi una retta.

Ma vi è un'altra conseguenza notevole che si può dedurre dal fatto di $W(x) \equiv 0$; infatti, sotto questa ipotesi, il sistema differenziale (d), si può trasformare nella forma ridotta

$$\begin{cases} y''' + \alpha z''' + p_{12} y' + p_{13} y + q_{12} z' + q_{13} z = 0 \\ y'' + p_{21} z'' + p_{22} y' + p_{23} y + q_{22} z' + q_{23} z = 0 \end{cases}$$



mentre la sua seconda equazione si può scrivere

$$\frac{d}{dx} \left\{ y' + q_{21} z' + p_{22} y + q_{22} z - q'_{21} z \right\} = (p'_{22} - p_{23}) y + (-q''_{21} + q'_{22} - q_{23}) z$$

o anche

$$[10] \quad \frac{d}{dx} \{ (y' + p_{22}y) + [q_{21}z' + (q_{22} - q'_{21})z] \} = (p'_{22} - p_{23})y + (-q''_{21} + q'_{22} - q_{23})z$$

Ma il punto

$$\pi_{y'}^* \equiv (y' + p_{22}y)$$

appartiene alla tangente alla C_y in P_y e analogamente il punto

$$\pi_{z'}^* \equiv (q_{21}z' + [q_{22} - q'_{21}]z)$$

appartiene alla tangente alla C_z in P_z ; se ne deduce che il punto

$$\pi_{y'z'} \equiv \{ (y' + p_{22}y) + (q_{21}z' + [q_{22} - q'_{21}]z) \}$$

è un punto della loro congiungente. Al variare di x tale punto descriverà una nuova curva di S_5 , che indicheremo con $C_{y'z'}$ e il punto derivato primo di essa, cioè il punto

$$\pi'_{y'z'} \equiv \left(\frac{d}{dx} \right) \{ (y' + p_{22}y) + (q_{21}z' + [q_{22} - q'_{21}]z) \}$$

sarà un punto della tangente in $\pi_{y'z'}$ alla $C_{y'z'}$.

Ma per la [10] il punto $\pi'_{y'z'}$ coincide col punto

$$P_{xz} \equiv ([p'_{22} - p_{23}]y + [-q''_{21} + q'_{22} - q_{23}]z)$$

che è un punto della congiungente $P_y P_z$ cioè la tangente alla $C_{y'z'}$ è incidente alla generatrice $P_y P_z$ di V_2 .

Se ne deduce allora che la nostra rigata sarà una rigata sviluppabile e che la curva $C_{y'z'}$ è il suo spigolo di regresso.

RACCOLTE FAUNISTICHE COMPIUTE NEL GARGANO
DA A. GHIGI E F. P. POMINI

VI. - ANFIPODI (*)

SANDRO RUFFO

SVMMARIVM. — Recensentur sex species Amphipodum, qui in Gargani regione collecti sunt; de duabus autem ex iis (*Gammareo aequicauda* et *Niphargus longicaudatus*) praesertim disserit Auctor.

Il materiale di Anfipodi raccolto nella regione pugliese dal prof. A. GHIGI e dal compianto dott. F. POMINI comprende solamente 6 specie. Tra esse le 3 specie di *Orchestia*, l'*Echinogammarus pungen*s e il *Gammarus aequicauda* sono forme caratteristiche del litorale mediterraneo (subterrestri le prime tre, d'acqua dolce il quarto, d'acque salmastre il quinto); tutte possiedono un'ampia distribuzione nel bacino mediterraneo. Il *Niphargus longicaudatus* è invece forma di acque dolci sotterranee o di sorgente ed è elemento diffuso nella regione appenninica, a sud almeno fino alla Campania, sul versante tirrenico, ed al Gargano sul versante adriatico. Nessuna delle specie citate riveste un interesse particolare per quanto riguarda il problema degli scambi faunistici transadriatici; riferisco comunque brevemente i risultati dello

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi nella Tornata Ordinaria dell'8 febbraio 1948.

La presente Nota rappresenta il XIX contributo ai miei studi sui Crostacei Anfipodi.

studio che mi permettono, tra l'altro, di apportare alcuni chiarimenti su alcune delle specie trattate.

Ringrazio sentitamente il prof. ALESSANDRO GHIGI che mi ha affidato tale materiale in studio.

Fam. GAMMARIDAE

Gammarus (*Gammarus*) *aequicauda* Martynov

Lago Varano VIII 1934, 12 ♂♂ 13 ♀♀ GHIGI leg.; fossati lungo le rive del Lago Varano 23 IV 1940, 7 ♀♀ POMINI leg.; Lago Varano, di fronte alla sorgente Bagno 23 IV 1940, 1 ♂ 1 ♀ POMINI leg.

La posizione sistematica delle forme mediterranee appartenenti al subg. *Gammarus* s. str. (sensu SCHELLENBERG 1937) è allo stato attuale delle nostre conoscenze ancora molto poco chiara; ciò spiega la frequente discordanza delle determinazioni fatte fino ad oggi. È noto che tutti gli autori meno recenti (DELLA VALLE 1893, CHEVREUX e FAGE 1925, per non citare che quelli le cui opere sono più note) avevano identificato i *Gammarus* del Mediterraneo con il *locusta* L., specie largamente diffusa nell'Atlantico. CHEVREUX e FAGE avevano sì notato che gli esemplari mediterranei presentavano alcune differenze rispetto a quelli atlantici, ma si erano limitati a considerarli come una forma del tipico *locusta*. Solo nel 1939 PIRLOT, ridiscutendo una specie descritta dal COSTA nel 1853, il *Gammarus plumicornis*, credette di poter distinguerla specificamente dal *locusta* atlantico; a tale specie riferì, tra l'altro, anche il *Gammarus* descritto come *locusta* da DELLA VALLE per il Golfo di Napoli. Antecedentemente (1931) MARTYNOV aveva descritto delle acque salmastre della Crimea una specie che egli erroneamente, come fu poi dimostrato da SCHELLENBERG, attribuì al genere *Carinogammarus* (*C. aequicauda*). SCHELLENBERG (1936, 1937) dimostrò invece che si trattava di una entità riferibile al subg. *Gammarus* s. str. In successivi lavori SCHELLENBERG la ritenne dapprima (1936, 1937) specie a sè stante, quindi, più recentemente (1940), la considerò la forma d'acqua salmastra del *locusta*, senza discuterne i rapporti con il *G. plumicornis*. Già dall'esposizione di cui sopra risulta evidente la poca chiarezza della questione. Infatti, tenendo presente che SEXTON (1942) riferì a *G. Zaddachi* Sexton una forma delle acque della Crimea e che VECCHI (1931) descrisse per la Cirenaica un *G. Eduardi*, ben cinque sarebbero nel Mediterraneo le specie di *Gammarus* s. str.

e precisamente: *locusta* L., *plumicornis* Costa, *Zaddachi* Sexton, *aequicauda* Martynov, *Eduardi* Vecchi. Quasi sempre queste specie sono state descritte, discusse o citate senza riferirne i reciproci rapporti. Ora, se si prendono in considerazione gli interessanti lavori compiuti per la regione atlantica (cfr. SEXTON 1942, SPOONER 1947, SEGERSTRÄLE 1947 a cui rimando per una più completa bibliografia) in cui sono state minutamente definite le diverse entità sistematiche anche in rapporto alla loro ecologia (è noto infatti che le diverse forme sono legate a diversi gradi di salinità, tanto che qualche specie è segnalata come indicatrice del grado di salinità delle acque), risulta chiaro che un'analoga ricerca con gli stessi criteri deve essere compiuta anche nella regione mediterranea, prima di poter dire una parola chiara, se non definitiva, sull'argomento. Non potendo in questa sede, anche per insufficienza di materiale di confronto, entrare nel vivo della questione, mi limito, per ora, solamente ad alcune considerazioni di carattere preliminare.

Il materiale pugliese, qui preso in esame, si accorda assai bene con la descrizione dell'*aequicauda* e non credo possano esistere dubbi sulla identità delle due forme. Debbo qui anche rettificare alcune mie precedenti determinazioni, in quanto alla stessa specie va riferito il materiale del Lido di Venezia e del Lido di Iesolo (cfr. RUFFO 1936 sub *locusta*), della Laguna di Menzaleh - Porto Said (cfr. RUFFO 1938 sub *locusta*) e di Rovigno d'Istria (cfr. RUFFO 1946 sub *plumicornis*). Se l'*aequicauda* sia da ritenersi specie a sè, oppure la forma d'acqua salmastra del *locusta* (come ritiene SCHELLENBERG 1937) o di altra specie di *Gammarus* s. str. parmi ancora prematuro discutere senza dati più numerosi o più sicuri e soprattutto senza uno studio minuto della morfologia e della variabilità di queste forme (¹).

(¹) Vale qui la pena di ricordare che discordi sono le opinioni tra i vari autori che si sono occupati della questione. SCHELLENBERG ritiene che i *Gammarus* siano specie assai variabili e che nei diversi ambienti da essi popolati (acque salate, salmastre, dolci) reagendo alle diverse condizioni essi assumano aspetti differenti. Il *Gammarus locusta* sarebbe una grande specie molto variabile e lo *Zaddachi* e l'*aequicauda* forme di esso. Netamente contraria a tale tesi è la SEXTON (1942). E PIRLOT (1939) così si esprime in proposito: « Il semble incontestable que tant que la première thèse » (quella cioè della grande variabilità) « restera appuyée par sa seule commodité et qu'elle ne disposera d'aucune constatation expérimentale d'une variation, il faille admettre la thèse de l'existence de très nombreuses espèces de *Gammarus* peu différentes entre elles ». Pur riconoscendo la logica di tale asserzione trovo che l'opinione di PIRLOT è un po' troppo assoluta.

La determinazione data nel presente lavoro non ha quindi un valore assoluto ma vuole solo attestare l'identità con la forma descritta da MARTYNOV.

L'*aequicauda* è indubbiamente assai vicino al *plumicornis* (sensu PIRLOT) da cui si distigue, mi sembra, per la maggior abbondanza di setole sui pereopodi del quinto-settimo paio (col *plumicornis* identificherei i *Gammarus* da me citati come *locusta* per S. Pier d'Arena, cfr. RUFFO 1938). Ma qui ci potremmo trovare effettivamente di fronte ad una variabilità legata al diverso grado di salinità delle acque (vedi, ad esempio, le forme d'acqua dolce e salata del *G. Zaddachi* in SEXTON 1942 e SEGERSTRÅLE 1947) per cui riterrei che il *plumicornis* e l'*aequicauda* non fossero altro che unità intraspecifiche della medesima entità sistematica. Per quanto riguarda il *locusta* (sensu SEXTON), posso dire di non averlo mai veduto del Mediterraneo. Lo *Zaddachi* Sexton fu invece conformato dalla SEXTON su materiale proveniente dalla Crimea (la stessa regione, quindi, di cui fu descritto l'*aequicauda*) e qui veramente sarebbero da discutere le affinità tra l'*aequicauda* (e quindi il *plumicornis*) e lo *Zaddachi*; a titolo di considerazione preliminare, che merita però ogni cautela prima di venir accettata, ritengo che *Zaddachi* ed *aequicauda* siano forme assai vicine e forse conspecifiche. SCHELLENBERG (1940) d'altra parte trova che l'*aequicauda* rappresenterebbe nel Mediterraneo ciò che sarebbe lo *Zaddachi* nell'Atlantico rispetto al *locusta*. È noto però che SCHELLENBERG ritiene lo *Zaddachi* una forma del *locusta*, opinione non condivisa da SEXTON, SPOONER, SEGERSTRÅLE, ecc. Io non posso comunque asserire con sicurezza che *Zaddachi* e *aequicauda* siano sinonimi, non avendo a disposizione materiale sufficiente del primo di località tipiche.

Per quanto riguarda l'*Eduardi* Vecchi descritto di una sebka presso Bengasi (Cirenaica) è da supporre, dalla descrizione dell'autore, che si tratti di forma assai vicina all'*aequicauda* e forse sinonimo di essa. A conclusione di queste considerazioni sui *Gammarus* s. str. del Mediterraneo trovo opportuno riassumere la discussione nei seguenti punti:

1. - è dubbia la presenza del *Gammarus locusta* (sensu SEXTON) nel Mediterraneo;

2. - esistono nel Mediterraneo due forme, una riferibile al *G. plumicornis* (sensu PIRLOT 1939) e una seconda riferibile al *G. aequicauda*

(sensu SCHELLENBERG 1937). È probabile che le due entità nominate rappresentino due forme della stessa specie, forse legate alla diversa concentrazione salina dell'ambiente in cui vivono; precisamente il *plumicornis* sarebbe la forma schiettamente marina, l'*aequicauda* la forma delle acque salmastre (lagune, stagni litorali, ecc.);

3. - non è ancora definita la posizione del *plumicornis* e dell'*aequicauda* rispetto allo *Zaddachi* che dalla descruttrice della specie stessa è citato delle acque della Crimea, località tipica dell'*aequicauda*. Ritengo però probabile la conspecificità delle forme nominate con lo *Zaddachi*;

4. - dato quanto è detto sopra, è inutile ora ogni discussione tendente a stabilire se l'*aequicauda* o il *plumicornis* siano da ritenere specie a se stanti o forme del *locusta*;

5. - anche l'*Eduardi* rientra probabilmente nel ciclo di forme dell'*aequicauda-plumicornis*.

Appare chiaro da queste considerazioni quale interesse rivestirebbe, e non solo dal punto di vista sistematico, lo studio approfondito della complessa questione.

Limitandoci alle sole citazioni sicure il *G. aequicauda* fu finora segnalato per le seguenti località: Lago di Donuslav, regione di Eupatoria, acque salmastre (MARTYNOV 1931); Laghi Maryut e Edku-Egitto, Lago Sasik-Bessarabia, Monfalcone e Rovigno d'Istria, Lago Sitra e sorgenti salate presso Siwa (SCHELLENBERG 1936), Laguna di Menzaleh-Porto Said (RUFFO 1938 sub *locusta*), Lido di Iesolo e Lido di Venezia (RUFFO 1936 sub *locusta*), Lido di Iesolo (RUFFO 1941 sub *locusta*), Rovigno d'Istria (RUFFO 1946 sub *plumicornis*). La specie risulta aver quindi una vasta distribuzione nel Mediterraneo e indubbiamente assai più numerose saranno le località di raccolta quando verrà compiuta una ricerca più approfondita. L'*aequicauda* è certamente una forma legata alle acque salmastre litorali; solo nell'oasi di Siwa (Egitto) fu trovata a ben km. 270 dal mare, ma, come chiarisce SCHELLENBERG, ciò è una conseguenza dell'antica distribuzione delle lagune mediterranee che probabilmente raggiungevano l'oasi stessa.

Gammarus (Echinogammarus) *pungens* M. Edw.

Lago Varano 15 VIII 1934, 5 ♂♂ 3 ♀♀ GHIGI leg.; Gargano-S. Menaio (in una sorgente) 22 IV 1940, 17 ♂♂ 29 ♀♀ POMINI leg.; Gargano-S. Menaio (in un ruscello) 22 IV 1940, 21 ♂♂ 21 ♀♀ POMINI leg.; rive del Lago Varano (in sorgenti) 23 IV 1940, 19 ♂♂ 24 ♀♀ POMINI leg.

Specie nota delle acque dolci di pressochè tutti i paesi che si affacciano al Mediterraneo (Francia, Spagna, Italia, Penisola Balcanica, Isole Egee, Cipro, Siria, Cirenaica, Tunisia, Algeria, Marocco).

Niphargus longicaudatus longicaudatus (A. Costa)

Gargano-S. Egidio VI 1940, 33 ♂♂ 8 ♀♀ POMINI leg.; Gargano-Alveo S. Egidio 2 IV 1940, 7 ♂♂ 29 ♀♀ POMINI leg.; Pozzi S. Egidio (Gargano) 18 VIII 1934, 1 ♂ e alcuni esemplari molto mutilati GHIGI leg.

♂ Lunghezza 9-11,2 mm. Corpo gracile, compresso. Primo paio di antenne lungo poco più di $\frac{1}{4}$ del corpo; flagello di 19-24 articoli, il flagello accessorio raggiunge la metà del secondo articolo del flagello principale. Secondo paio di antenne un po' più lungo della metà del primo paio; flagello di 7-12 articoli. «Lacinia mobilis» della mandibola 4-dentata. Mascelle del primo paio: apice del palpo fornito di 4-8 setole, lobo esterno munito di 7 spine di cui la più interna fornita di 2-5 denti, le altre con 0-3 denti, lobo interno munito all'apice di 1-3 setole e alcune setoline brevi lungo l'orlo interno. Piastre coxali prima-quarta negli esemplari adulti nettamente più larghe che alte, appena ricoprentesi. Propode del secondo paio di gnatopodi mediocremento robusto, subquadrato, con orlo palmare poco inclinato, delimitato da una robusta spina e da due più piccole denticolate sull'orlo interno, dattilo robusto fornito sull'orlo esterno di alcune setole in semplice fila. Dattilo dei pereopodi del terzo-quarto paio con la base appena più lunga dell'unghia, munito di una setola penicillata sull'orlo esterno e di una spina presso l'inserzione dell'unghia (eccezionalmente questa è duplicata). Articolo basale dei pereopodi del quinto-settimo paio piuttosto allungato, a lato posteriore indistintamente con-



Niphargus longicaudatus longicaudatus A. Costa, ♂. - 1. Gnathopodo del II paio. - 2. Spina palmari dello stesso a più forte ingrandimento. - 3. Dattilo del III paio di pereopodi, con spina unguale duplicata. - 4. Dattilo del VII paio di pereopodi. - 5, 6, 7. Uropodi del I-III paio. - 8. Piastre epimerali del II-III paio. - 9, 10. Telson.

vesso; base del dattilo lunga circa il doppio dell'unghia, con una setola penicillata sull'orlo esterno e una spina e una esile setola presso l'inserzione dell'unghia (eccezzionalmente il dattilo del settimo paio di pereciopodi presenta due spine sull'orlo interno). Piastre epimerali del secondo-terzo paio con angolo infero-posteriore nettamente arrotondato. Uropodi del primo paio con il ramo interno lungo quanto il peduncolo e più del doppio dell'esterno; uropodi del secondo paio con il ramo interno appena più lungo dell'esterno; uropodi del terzo paio: ramo interno breve, lungo circa quanto il peduncolo e circa $\frac{1}{3}$ del primo articolo del ramo esterno, ramo esterno molto allungato, i due articoli subeguali in lunghezza. Telson circa tanto lungo quanto largo, lobi divaricati con quattro spine apicali e una setola penicillata, una-due spine sugli orli esterno ed interno di ciascun lobo, più due setole penicillate mediali esterne; sul dorso del telson una-due spine submediali esterne.

♀ ovigera (11 uova) Lunghezza 7-7,2 mm. Più corta, meno compressa. Caratteri del ♂ salvo che per i seguenti particolari: flagello delle antenne più corto (primo paio 17-19 articoli, secondo paio 10 articoli). Piastre coxali nettamente più alte che larghe; uropodi del primo e secondo paio a rami subeguali; uropodi del terzo paio meno allungati, secondo articolo del ramo esterno poco più di $\frac{1}{3}$ del primo.

Lo SCHELLENBERG (1935) ha dubitativamente riferito al *N. longicaudatus* Costa il *N. anticolanus* D'Ancona, descritto per le acque di Fiumi. Ritengo del tutto probabile questa identificazione.

Il D'ANCONA ha recentemente (1939, 1942 a, 1942 b) posto in discussione il valore sistematico delle numerose specie e sottospecie del genere *Niphargus* descritte negli ultimi anni. Richiamato il concetto di specie fondato su base genetica e compinta una minuta analisi della variabilità di alcune popolazioni alpine ed appenniniche, egli è venuto alla conclusione di riferire al *N. stygius* molte delle forme fino ad ora descritte; tra esse anche il *N. longicaudatus*. Secondo il D'ANCONA il *N. stygius* dovrebbe essere quindi considerato una grande specie differenziata in numerose razze locali di cui egli ne descrive (senza dare loro un nome, o identificandole in parte con altre forme già descritte) un certo numero (forme di Postumia, di Planina, di Trebiciano, liburnica, dei pozzi padovani, vicentini e veneziani, della regione collinare Berici-Euganei-Montello, dei Lessini, delle Prealpi bresciane). Secondo

i concetti di D'ANCONA dovrebbero essere considerate razze dello *stygius* anche le popolazioni delle Alpi occidentali (*stygius pedemontanus*), della Liguria (*longicaudatus debilis* Ruffo, *Foreli Spetiae* Schellenberg, *Foreli apuanus* Ruffo). È un fatto innegabile che la distinzione di molti dei *Niphargus* attualmente conosciuti si basa su caratteri di incerto valore e di difficile valutazione ed è indubbio pertanto che la sistematica del genere va riveduta alla luce dei criteri suggeriti dal D'ANCONA. Per quanto riguarda la fauna italiana, astrazione fatta per alcune specie ben distinte, sicuramente differenziabili (*puteanus*, *jovanovici*, *kochianus*, *skopljensis* soprattutto) e in genere a distribuzione limitata o ad habitat definito (acque superficiali, acque freatiche) noi ci troviamo di fronte ad un grande numero di forme (si può dire tutti i *Niphargus* delle grotte e delle sorgenti) davanti alle quali si rimane sempre perplessi a decidere se si tratta di differenti entità specifiche o di unità infraspecifiche di una grande specie quale potrebbe essere il *N. stygius*.

Il *N. longicaudatus*, che D'ANCONA fa rientrare pure nello *stygius* sarebbe caratterizzato, fra l'altro, dal costante dimorfismo sessuale riscontrabile nel primo paio di uropodi (ma D'ANCONA osserva che tale carattere si riscontra anche in popolazioni dello *stygius*; io aggiungo anzi d'averlo osservato in popolazioni del Montello che secondo il D'ANCONA sarebbero riferibili allo *stygius costozzae* Schell. con primo uropode indifferenziato). È quindi il *longicaudatus* da considerare senz'altro razza dello *stygius*? Non ritengo di avere ancora i materiali sufficienti per un sicuro giudizio dell'interessante e complessa questione. Indubbiamente a questa forma che ha una distribuzione ben circoscritta (sorgenti e acque sotterranee dell'Italia centro-meridionale) e che nell'area da essa popolata presenta costanza di caratteri, si deve almeno attribuire un valore subspecifico. Se essa rappresenti poi la razza di una piuttosto che di un'altra specie o addirittura una specie distinta, è problema che io, allo stato attuale, non oso o non posso risolvere. Posso solo dire che il materiale pugliese si accorda perfettamente con la descrizione di *N. longicaudatus* (= *N. anticolanus*) e sotto tale nome l'ho pertanto citato. La determinazione data non ha dunque un valore assoluto ma solamente indicativo di riferimento ad una descrizione nota. La descrizione da me data e le figure riportate permetteranno in futuro una eventuale più esatta denominazione.

Fam. TALITRIDAE

Orchestia mediterranea A. Costa

Lago Varano VIII 1934, 15 ♂♂ GHIGI leg.; Gargano, Rive Lago Varano 23 IV 1940, 5 ♂♂ 5 ♀♀ POMINI leg.

Specie nota dell'Atlantico dalla Gran Bretagna alle Canarie, del Mediterraneo e del Mar Nero. In Italia è citata di varie località delle coste tirreniche, joniche e adriatiche.

Orchestia gammarellus (Pallas)

Lago Varano VIII 1934, 1 ♂ GHIGI leg.

Specie diffusa lungo le coste atlantiche dalla Norvegia alle Canarie, nel Mediterraneo (coste europee e nord-africane) e nel Mar Nero. In Italia è nota di varie località delle coste tirreniche e adriatiche.

Orchestia platensis Kröyer

Lago Varano VIII 1934, 7 ♂♂ GHIGI leg.; Gargano-Rive Lago Varano 15 VIII 1934, 28 ♂♂ GHIGI leg.

Specie a vastissima distribuzione geografica, probabilmente cosmopolita. In Italia era stata da me citata (1941) per varie località tirreniche, dal Golfo di Genova alla Sicilia. Non mi risultava invece ancora segnalata per le coste adriatiche.

BIBLIOGRAFIA

1925. CHEVREUX E. - FAGE L., *Amphipodes*, in: « Faune de France », 9, pag. 488, 488 figure.
1934. D'ANCONA U., *Niphargus anticolanus n. sp., Gammaride cieco delle acque di Piuggi*. « Arch. Zool. It. », XX, pag. 93-116, 5 figure.
1939. — *Considerazioni sulla classificazione dei Niphargus italiani con speciale riguardo a quelli della regione Veneta*. « Atti R. Ist. Ven. Sc. Lett. Arti », XCVIII, pag. 483-504.
- 1942a. — *I Niphargus italiani. Tentativo di valutazione critica delle minori unità sistematiche*. « Mem. Ist. It. Speleologia », Serie Biol. Mem. IV, pag. 125, 85 figure.
- 1942b. — *Variabilità, differenziamento di razze locali e di specie nel genere Niphargus*. « Mem. Ist. It. Idrobiologia dott. M. De Marchi », I, pag. 145-167, 18 figure.
1931. MARTYNOV A. B., *Zur Kenntnis der Amphipoden der Krim*. « Zool. Jahrb. System. », 60, pag. 573-606, 44 figure.
1939. PIRLOT J. M., *Amphipoda* in: Résultats Scientifiques des Croisières du Navire - Ecole Belge « Mercator », vol. II, pag. 47-80, 7 figure.
1944. REID D. M., *Gammaridae (Amphipoda); with Key to the Families of British Gammaridea*. The Linnean Society of London - « Synopses of the British Fauna », n. 3, pag. 33, 32 figure.
1936. RUFFO S., *Contributo alla conoscenza degli Anfipodi dell'Adriatico*. « Boll. Ist. Entom. Univ. Bologna », IX, pag. 23-32, 1 figura.
1937. — *Gammaridi delle acque superficiali del Veneto, della Venezia Tridentina e della Lombardia*. « Mem. Mus. St. Nat. Ven. Trid. », IV, pag. 29, 2 figure, 5 tavole.
1938. — *Gli Anfipodi marini del Museo Civico di Storia Naturale di Genova*.
a) *Gli Anfipodi del Mediterraneo*. « Ann. Mus. Civ. St. Nat. Genova », LX, pag. 127-151, 7 figure.
1941. RUFFO S., *Contributo alla conoscenza degli Anfipodi marini italiani*. « Boll. Ist. Ent. Univ. Bologna », XI, pag. 112-126.

1946. RUFFO S., *Gli Anfipodi bentonici di Rovigno d'Istria (nota preventiva)*. «Boll. Soc. Ent. Italiana», LXXVI, pag. 49-56, 1 cartina.
1935. SCHELLENBERG A., *Schlüssel der Amphipodengattung Niphargus mit Fundortangaben und mehreren neuen Formen*. «Zool. Anz.», 111, pag. 204-211.
1936. — *Amphipoda bentonica*, in: The Fishery Grounds near Alexandria. 10. Fisheries Research Directorate. Notes a. Memoirs n. 18, pag. 27, 1 figura, 8 carte.
1937. — *Schlüssel und Diagnosen der dem Süßwasser Gammarus nahestehenden Einheiten ausschliesslich der Arten des Baikalsees und Australiens*. «Zool. Anz.», 117, pag. 267-280, 4 figure.
1940. — *Der Amphipode der salzigen Quellen der Oase Siwa*. «Zool. Anz.», 132, pag. 40-42.
1947. SEGERSTRÅLE S. G., *New observations on the distribution and morphology of the amphipod Gammarus Zaddachi Sexton with notes on related species*. «Journ. Mar. Biol. Assoc. of the Unit. Kingdom», XXVII, pag. 219-244, 7 figure.
1942. SEXTON E. W., *The relation of Gammarus Zaddachi Sexton to some other species of Gammarus occurring in fresh, estuarine and marine waters*. «Journ. Mar. Biol. Ass. Unit. Kingd.», XXV, pag. 575-606, 1 figura, 3 tavole.
1947. SPOONER G. M., *The distribution of Gammarus species in estuaries. Part. I*. «Journ. Mar. Biol. Ass. Unit. Kingd.», XXVII, pag. 1-52.
1931. VECCHI A., *Anfipodi di Cirenaica raccolti dal prof. E. Zavattari*. «Boll. di Zool.», II, pag. 57-66, 7 figure.



RICERCHE POLAROGRAFICHE SUI TUMORI (*)

(NOTA PREVENTIVA)

DOMENICO GIGANTE

SYMMARIUM. — Polarographica methodo Auctor investigavit de processibus demolitionis proteinarum in sucis extractis ex animalium texturis. Experimenta in homine, in cuniculis, in caviis, in muribus, in rattis peracta ostenderunt diversam rationem polarographicam qua se gerunt texturae matrices, tumores benigni ac maligni, et horum variae species prout alia atque alia sit eorum sedes.

Scopo delle nostre ricerche è stato di studiare con la reazione polarografica di Brdicka i processi di demolizione delle proteine dei tessuti neoplastici e di organi di portatori di tumori. Abbiamo a questo fine elaborato un metodo che permette lo studio dei prodotti di scissione dei protidi, ottenuti dopo denaturazione alcalina e che rimangono in soluzione dopo precipitazione con acido solfosalicilico. Nei polarogrammi registrati con questa tecnica il calcolo dei potenziali medi degli estratti dei tessuti animali normali e patologici ha dato sempre un valore costante, identico a quello del potenziale calcolato per le soluzioni di cistina o di cisteina. Differenze anche notevoli si sono invece avute nell'altezza dell'onda proteica, che è stata calcolata in mA.

Per gli estratti di tumori maligni umani si sono avute onde polarografiche sempre di molto più alte di quelle ottenute per gli estratti

(*) Nota preventiva presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Gaetano Quagliarello il 24 dicembre 1948. La memoria per esteso verrà pubblicata nelle « Commentationes ».

di tessuti normali di origine della neoplasia. Abbiamo notato differenze nell'altezza delle onde a secondo del tipo istologico del tumore, e i valori maggiori hanno coinciso con le forme in cui si aveva prevalenza di tessuto epiteliale sul connettivale. Inoltre la presenza di fenomeni regressivi nei tessuti neoplastici ha avuto notevole influenza sull'altezza delle onde polarografiche, che risultarono tanto più basse quanto più estese erano le zone di necrosi. Variazioni, sebbene lievi, si sono anche osservate in rapporto alla sede del tumore: valori più alti, a parità delle altre condizioni, si sono avuti ad esempio in epitelomi dello stomaco rispetto a quelli della mammella: interessante è stato il confronto fra loro dei due tessuti matrice, poichè gli estratti di mucosa gastrica hanno presentato onde polarografiche nettamente più elevate di quelle ottenute con estratti di ghiandola mammaria. Per i tumori benigni, rispetto ai maligni, abbiamo ottenuto sempre valori nettamente inferiori, però superiori a quelli dei tessuti normali matrice. Onde polarografiche di altezza quasi uguale hanno presentato gli estratti sia del tessuto neoplastico primitivo che delle sue metastasi linfoghiandolari: le metastasi epatiche hanno mostrato invece valori in genere più alti della neoplasia di partenza. A questo proposito è da notare che per estratti di linfoghiandole normali si sono avute onde nettamente più basse di quelle registrate per estratti di fegato.

Estratti di organi normali umani hanno presentato onde di altezza diversa fra loro: valori bassi si sono avuti con estratti di tuniche gastriche, mucosa e muscolare, e di muscoli scheletrici; medi con estratti di intestino tenue, di miocardio, di polmone; alti con estratti di rene, di fegato e di milza. Per estratti di taluni organi di soggetti morti per tumore maligno si sono avuti valori più elevati rispetto ai corrispondenti organi normali di soggetti morti per infortunio: queste differenze sono apparse particolarmente evidenti per gli estratti dei muscoli scheletrici e in minor misura anche di miocardio, polmone e milza: pressochè uguali furono invece i valori per gli altri tessuti ed organi. Con questa reazione proteica non siamo riusciti a sorprendere differenze di rilievo non soltanto fra fegati normali e fegati di portatori di tumori, ma neppure fra questi e fegati sede di metastasi neoplastica. Estratti di mucosa gastrica e di tunica muscolare di soggetti con ulcera semplice dello stomaco hanno rivelato onde polarografiche più elevate, sebbene

di poco, di quelle ottenute con estratti delle corrispondenti tuniche di stomaci normali o di soggetti portatori di neoplasie non gastriche. Nei casi invece di cancro dello stomaco gli estratti di dette tuniche, specie della mucosa, hanno mostrato onde nettamente più alte.

Per estratti di organi di cavie normali si sono avute onde polarografiche per altezza nell'ordine di grandezza di quelle ottenute con estratti degli stessi organi umani: solo per i muscoli scheletrici ed anche per il miocardio si sono avuti valori sensibilmente inferiori a quelli umani e per gli estratti di stomaco, intestino tenue e crasso valori superiori. Estratti di organi di conigli normali hanno rivelato un comportamento analogo a quello dei corrispondenti organi di cavia. Rispetto agli animali adulti in conigli sacrificati alla nascita si sono avuti valori notevolmente più bassi, specie per gli estratti di miocardio, polmone e fegato. Nei topi bianchi e nei ratti albin per estratti di fegato abbiamo osservato onde polarografiche di altezza inferiore, anche più della metà, a quelle registrate per estratti degli stessi organi umani, di cavia e di coniglio.

In cavie, topi bianchi e ratti albin con sarcomi indotti sperimentalmente e in topi bianchi con adenocarcinomi spontanei della mammella si sono avuti per gli estratti di organi, specie per i muscoli, il fegato, i polmoni, la milza, onde polarografiche sempre più alte, di quelle ottenute per estratti dei corrispondenti organi di animali normali. Gli estratti di muscoli scheletrici di topi, trattati con benzopirrene, ma sacrificati poco prima della comparsa del tumore, hanno mostrato valori già nettamente più alti dei normali: invece per gli estratti di fegato degli stessi animali non si sono rilevate differenze dalla norma. Gli estratti dei sarcomi sperimentali e degli adenocarcinomi spontanei di animali hanno presentato onde polarografiche di pari altezza, legate alla estensione dei processi necrotici, e di altezza maggiore di quelle registrate per estratti di tessuti matrice.

LE FOSFATASI NEL METABOLISMO GLICIDICO (*)

(Con una figura)

V. BACCARI e G. AURICCHIO

SUMMARY. — Auctores ostendunt qua ratione inter se vim habeat operatio glycidica, in operationem phosphatasicam, et in phosphatorum incrementum ac deminutionem in animalibus quae diabeta immunia sunt vel quae hoc morbo laborant.

Oggi si pensa che ai processi di fosforilazione presiedano enzimi diversi dalle fosfatasi. L'introduzione del radicale fosforico nei composti organici, durante il metabolismo glicidico, avviene infatti o per scissione del glicogeno ad opera della fosforolasi, o per trasporto dall'ATP ad opera dell'esocinasi, o per processi ossidativi con formazione di acilfosfati.

Molti autori per il passato e anche recentemente alcuni particolarmente competenti (Roche e coll. [1]; Folley e coll. [2]) hanno ammesso che le fosfatasi possano avere importanza per i processi di fosforilazione che si verificano nell'assorbimento intestinale del glicoso e dei lipidi, nella captazione del glicoso e sintesi di caseina da parte della ghiandola mammaria secernente, oltre che nella sintesi dei nucleoprotidi. Le fosfatasi, infatti, hanno, in accordo con la legge della re-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Gaetano Quagliariello nella Tornata Ordinaria dell'8 febbraio 1948.

Dal Centro di Enzimologia del C. N. R. presso l'Istituto di Chimica biologica dell'Università di Napoli.

versibilità delle azioni enzimatiche, anche il potere di sintetizzare esteri fosforici, ma il punto d'equilibrio delle reazioni da esse catalizzate è talmente spostato a favore della scissione che la loro importanza nelle sintesi biologiche pare da considerare trascurabile. L'importanza delle fosfatasi resterebbe pertanto limitata ai processi di idrolisi degli esteri fosforici nella osteogenesi, nella digestione di alcune sostanze alimentari, nella liberazione di fosfati a livello del rene e, per quel che riguarda la demolizione dei glicidi, alla scissione del glicosio-fosfato, che nel fegato deve essere defosforilato a glicosio, e come tale essere immesso in circolo.

Tuttavia non mancano dati sperimentali, che mettono in evidenza una relazione tra attività fosfatasica ed assorbimento o metabolismo dei glicidi. La teoria di LUNDSGAARD [3], secondo il quale il diabete da florizina sarebbe dovuto a un disturbo del riassorbimento di glicosio nei tubuli renali per inibizione delle fosfatasi, ha ricevuto recenti conferme. Con tecnica istologica, GOMORI [4] ha mostrato che la fosfatasi è presente nei tubuli prossimali, dove avviene il riassorbimento di glicosio dal filtrato glomerulare, e KABAT e coll. [5] hanno precisato che essa è concentrata in quella parte delle cellule tubulari che forma il lume, dal quale il glicosio è assorbito. SAVIANO e BACCARI [6] inoltre hanno dimostrato una chiara inibizione dell'attività fosfatasica del rene di animali resi diabetici con iniezione di florizina. Ricerche istologiche sulla occorrenza di fosfatasi e deposizione di glicogeno in vari tessuti (endometrio e ghiandole di utero gravido, placenta) hanno dimostrato che l'enzima si trova in genere o nella zona di accumulo del poliosside o nelle vicinanze, e spesso nella regione che il glicosio, trasportato dalla corrente sanguigna, deve attraversare prima di sintetizzarsi a glicogeno (DEMPSEY e WISLOCKI [7]).

Per quanto riguarda i rapporti dell'attività fosfatasica con il metabolismo intermedio dei glicidi, esistono fino ad oggi soltanto poche, frammentarie e non concordi osservazioni. BODANSKY [8] trova un aumento della fosfatasi del siero in seguito a somministrazione orale di glicosio e FREEMAN e FARMER [9] osservano che una dieta ricca in carboidrati eleva durevolmente l'attività fosfatasica del siero, mentre il digiuno e una dieta proteica l'abbassano e una dieta lipidica è senza effetto. Iperfosfatasemia è stata inoltre osservata negli animali spancreatici (SCHELLING [10]; FREEMAN e JYV [11]) e in animali diabetici per

allossana (CANTON e coll. [12]). Questi dati non sono però d'accordo con quelli precedenti di BINET e coll. [13]. Per quanto riguarda i rapporti tra metabolismo glicidico e fosfati del siero, è noto che questi diminuiscono nell'animale normale e non nel diabetico per carico glicidico (BARNESCHEN e coll. [14]; BOLLIGER [15]) e nell'animale normale e diabetico in seguito a somministrazione di insulina (BRIGGS e coll. [16]; KAY e coll. [17]; BLATHERWICK e coll. [18]; WIGGLESWORTH e coll. [19]; HARROP e coll. [20]). Tale diminuzione deve essere messa in rapporto con la utilizzazione dei fosfati, dato che per somministrazione di glicoso e di insulina si hanno ipofosfaturia (BOLLIGER, *loc. cit.*, 15), e contemporaneo aumento di composti organici fosforati, come per esempio di ATP nel fegato (KAPLAN e coll. [21]).

Data la non chiara funzione della fosfatasi nel metabolismo glicidico, ci è parso interessante innanzi tutto studiare il comportamento di quest'enzima e dei fosfati del siero in seguito a carico di glicoso, sia in animali normali sia diabetici per allossana. Da tali esperienze è risultato che, mentre l'attività fosfatasica aumenta sia negli animali normali sia in quelli diabetici, i fosfati diminuiscono nei primi ed aumentano nei secondi. L'aumento dell'attività fosfatasica e dei fosfati negli animali diabetici va d'accordo con l'azione idrolitica dell'enzima, mentre l'aumento della prima e la diminuzione dei fosfati negli animali normali si può spiegare ammettendo che in questi ultimi l'utilizzazione del glicoso comporti l'esterificazione non solo dei fosfati liberati dalle fosfatasi ma anche di quelli preesistenti. Poichè, secondo BODANSKY e coll. [22], la fosfatasi del siero deriva per lo meno in parte da quella del fegato, abbiamo voluto indagare se in seguito a carico di glicoso si avesse un aumento dell'attività fosfatasica in quest'organo. Abbiamo così potuto fare l'interessante constatazione che anche l'attività fosfatasica del fegato subisce un notevole aumento.

Il meccanismo col quale il glicoso provoca un aumento dell'attività fosfatasica resta però oscuro. L'aggiunta di glicoso *in vitro* al siero o ad estratti di organi, la somministrazione d'insulina o l'aggiunta di quest'ormone a poltiglia o ad estratti di organo, sono privi di effetti degni di nota.

ESPERIENZE

1. AZIONE DEL GLICOSO « IN VIVO ».

a) *Esperienze sul sangue.* — Come animali da esperimento sono stati usati conigli del peso di 2 kg. circa, digiuni da 24 h, ai quali è stato praticato per via endovenosa (vena marginale dell'orecchio) un carico di glicosio, iniettando una soluzione ipertonica (al 40 %) nella quantità di 5 cc. circa.

Prima del carico e a diversi tempi dopo di questo, si eseguivano prelievi di sangue dalla vena marginale dell'orecchio, con siringa o nel vuoto (MADERNA [25]), in quantità il più possibile piccole per evitare effetti secondari da salasso. La determinazione del glicosio veniva eseguita su 0,1 cc. di sangue col metodo di HAGEDORN e JENSEN, quella dei fosfati col metodo di BRIGGS ridotto a micrometodo (0,2 di siero) ed eseguendo la lettura al fotometro graduale di Pulfrich (filtro S 72), con microcuvette da 5 cm. di spessore. La determinazione dell'attività fosfatase (glicerofosfatasi) è stata eseguita cimentando 0,1 cc. di siero con β -glicerofosfato di sodio purissimo (0,005 M) per 24 h in puffer di glicocollo-soda (pH 9,31).

I conigli venivano quindi resi diabetici con allossana. Agli animali digiuni da 24 h s'iniettavano per via endovenosa mg 200 per kg. di peso di allossana in soluzione al 5 % di recente preparata. Un'alimentazione ricca di glicidi (crusca impastata con saccarosio o glicosio) ha permesso agli animali di superare, nella maggioranza dei casi, la crisi ipoglicemica caratteristica del secondo stadio d'azione dell'allossana. Dopo 1 o 2 giorni appariva la classica sindrome diabetica (glicosuria, iperglicemia, poliuria ecc.). Gli animali venivano quindi sottoposti di nuovo al carico glicidico e alle determinazioni suaccennate, con le stesse modalità usate prima di provocare la sindrome morbosa. I dati sono riportati nella tabella I e nel grafico I, e da essi risulta che il carico glicidico provoca aumento dell'attività fosfatase negli animali normali e nei diabetici, diminuzione di fosfati nei primi e aumento nei secondi.

b) *Esperienze sul fegato.* — Per lo studio dell'attività fosfatase del fegato sono stati adoperati ratti bianchi di 200 gr. circa di

peso, ad una metà dei quali (l'altra metà è servita di controllo) si è praticato il carico glicidico. Questo veniva eseguito iniettando la soluzione ipertonica di glicosio (40 %), in quantità di 1 cc. circa, in una vena della coda. Il fegato veniva prelevato dagli animali decapitati, dopo 60' dal carico glicidico. Su una piccola aliquota di tale organo

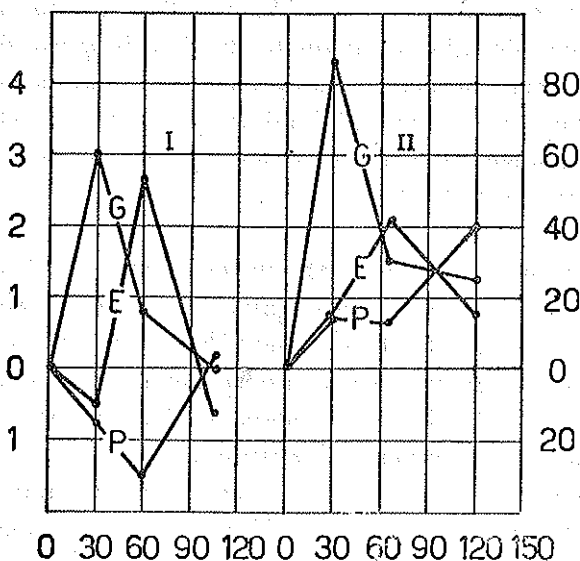


FIG. 1.

Sull'ascissa è segnato il tempo in minuti primi. Sull'ordinata a sinistra sono indicate le variazioni in g% di glicosio e in mg% di fosforo, sull'ordinata a destra le variazioni percentuali dell'attività fosfatasi. I: animale normale; II: animale diabetico; G: glicosio; E: attività fosfatasi; P: fosforo.

si determinava il residuo secco, tenendola prima in stufa a 70°C e poi in essiccatore su cloruro di calcio fino a peso costante. Il resto dell'organo veniva triturato con sabbia di quarzo, estratto con 6 volumi di H₂O a temperatura ambiente per 24 h, e centrifugato. Il liquido sovrastante al precipitato veniva cimentato contro glicerofosfato (0,005 M a pH 9,31). Dopo circa 5 h, si procedeva alla determinazione del fosforo col metodo di Briggs. Prove con fegato di animali non iniettati con soluzione di glicosio venivano sempre eseguite contemporaneamente e con le stesse modalità. Per ogni prova

si eseguiva un controllo senza glicerofosfato, il cui valore in fosforo (fosfati preesistenti + quelli derivanti dall'idrolisi di esteri del fegato) veniva sottratto da quello della prova con glicerofostato. I risultati, riassunti nella tabella II, mostrano negli animali sottoposti al carico un'attività fosfatasica costantemente più alta che nei controlli.

2. AZIONE DEL GLICOSO « IN VITRO ». — Si è voluto inoltre sperimentare l'azione del glicoso, aggiunto *in vitro*, in prove di attività fosfatasica di animali normali, allestite come si è detto sopra. Il glicoso è stato aggiunto nelle quantità indicate nella tabella III. Dai dati riportati nella stessa tabella risulta che il glicoso, in queste condizioni, è praticamente privo di effetto.

3. AZIONE DELL'INSULINA. — Queste esperienze sono state eseguite con poltiglia (esp. 1 e 2) e con estratto (esp. 3) di fegato di animale normale, nonchè con estratto di fegato di animale diabetico (esp. 4). L'ormone è stato aggiunto nella miscela nelle quantità indicate nella tabella IV. Nell'esp. 2 l'insulina è stata incubata con la poltiglia, a 37° per 2 h, prima dell'aggiunta del substrato.

A ratti del peso di circa 200 gr. è stata somministrata insulina fino a ridurre la glicemia a un valore di circa 0,4‰: gli animali venivano decapitati, e il fegato trattato come sopra per la determinazione dell'attività fosfatasica (esp. 5).

Dalla tabella IV risulta che, nelle diverse condizioni sperimentali in cui ci siamo posti, l'insulina non esercita alcuna attivazione sulla fosfatasi, se mai la inibisce leggermente sia *in vitro* sia *in vivo*.

TABELLA I.

Tempo m'	Glicosio (G) g ‰	Fosfati (P)		Attività fosfatasi (E)	
		mg ‰	variazione ‰	Idrolisi ‰ del glicorofosfato	variazione ‰
<i>Animale normale</i>					
0	0,91	4,67	—	16,1	—
30	3,94	3,91	- 16,2	14,4	- 10,5
60	1,75	3,14	- 32,8	24,9	+ 54
105	0,91	4,84	+ 3,6	12,5	- 22,3
<i>Animale diabetico</i>					
0	2,59	3,94	—	21,2	—
30	6,90	4,77	+ 21	24,7	+ 16,5
65	4,15	4,60	+ 16,7	30,2	+ 42
120	3,88	5,92	+ 50,2	24,6	+ 16

TABELLA II.

Esperienze	Ratto controllo		Ratto + glicoso		Variazioni % dell'attività fosfatasi
	Idrolisi % del glicerofosfato	Resid. secco % di tessuto fresco	Idrolisi % del glicerofosfato	Resid. secco % di tessuto fresco	
1	14,6	30,5	24,9	28,9	+ 70,5
2	16	29,1	28,9	29	+ 80,6
3	17,9	31	23,9	28,4	+ 33,5
4	10,7	30,7	19,9	31,5	+ 86
5	14,3	—	19,5	—	+ 36,4
6	18,9	29,9	20,1	32	+ 6,3
7	11	29,2	28,9	29,4	+ 163
8	13,3	—	25,3	—	+ 90,2
9	6,7	—	15,8	—	+ 163
10	13,9	—	25,2	—	+ 81,3
<i>Media</i>	13,7	30	23,2	29,8	+ 69,3

TABELLA III.

Esperienze	Preparato enzimatico	+ glucosio ‰	Idrolisi ‰ del glicerofosfato
1	Estratto di rene	0	39,8
2	» »	0,2	39,8
3	» »	0,4	40,9
4	Estratto di fegato	0	10,4
5	» »	0,2	10,1
6	» »	0,4	11,1
7	Siero	0	53
8	»	0,2	53
9	»	0,4	56

TABELLA IV.

Esperienze	Preparato enzimatico	+ Insulina (U. C.) <i>in vitro</i>	Idrolisi ‰ del glicerofosfato	Variazione ‰
1	Poltiglia (animale normale)	0	28	—
	» » »	0,4	26,4	- 5,7
	» » »	0,04	27,5	- 1,7
2	» » »	0	27,4	—
	» » »	0,4	24,4	-10,9
	» » »	0,04	25,6	- 6,5
3	Estratto » »	0	18,3	—
	» » »	0,4	16,9	- 7,6
	» » »	0,04	17,6	- 3,8
4	Estratto (animale diabetico)	0	53,6	—
	» » »	0,4	57,9	+ 8
	» » »	0,04	49,7	- 7,2
5	Estratto (animale normale)	0	23,4	—
	» (animale trattato con insulina)	0	21,9	- 6,3

DISCUSSIONE

Dai dati riferiti si nota che per somministrazione di glicoso si ha un notevole aumento dell'attività fosfatasica non solo del siero, ma anche del fegato. Quando le nostre esperienze erano già terminate abbiamo potuto leggere un lavoro di MARSH e coll. [26] i quali, studiando il riassorbimento di glicoso nel rene, hanno messo in evidenza, in seguito a somministrazione orale di questo zucchero, un cospicuo aumento dell'attività fosfatasica del rene. Questo reperto, mentre conferma le nostre osservazioni, dà al fenomeno dell'aumento delle fosfatasi per carico glicidico un significato più generale, in quanto dimostra che si verifica anche in altri organi.

Sul meccanismo di tale fenomeno non conosciamo nulla; possiamo soltanto dire che l'aumento dell'attività fosfatasica non è in relazione con l'utilizzazione dei glicidi, in quanto si verifica anche nell'animale diabetico. Dalle nostre esperienze risulta inoltre che il glicoso aggiunto *in vitro*, nelle nostre condizioni sperimentali, è praticamente senza effetto. L'insulina, *in vivo* e *in vitro*, certamente non produce attivazione, se mai una costante per quanto debole inibizione. L'aumento dell'attività fosfatasica può dipendere o da un aumento della fosfatasi o più verosimilmente da una sua attivazione, riferibile in via di ipotesi ad ormoni — diversi dell'insulina — secreti sotto lo stimolo del carico glicidico, o a metaboliti del glicoso. Per quanto riguarda i primi ricordiamo l'azione sull'attività fosfatasica esercitata dagli ormoni tiroideo (Schoz e coll. [27]), paratiroideo (Roche e coll. [28]), estrogeni (Follex [29]), dal progesterone (Ruffo [30]), dal testosterone (Cutillo [31]).

Viene ora fatto di chiedersi quale sia la funzione della fosfatasi nel metabolismo glicidico. Come si è detto nell'introduzione, quest'enzima ha soprattutto importanza nella scissione degli esteri e questa sua azione si manifesta chiaramente nell'animale diabetico, nel quale accanto all'aumentata attività dell'enzima si riscontra un aumento dei fosfati.

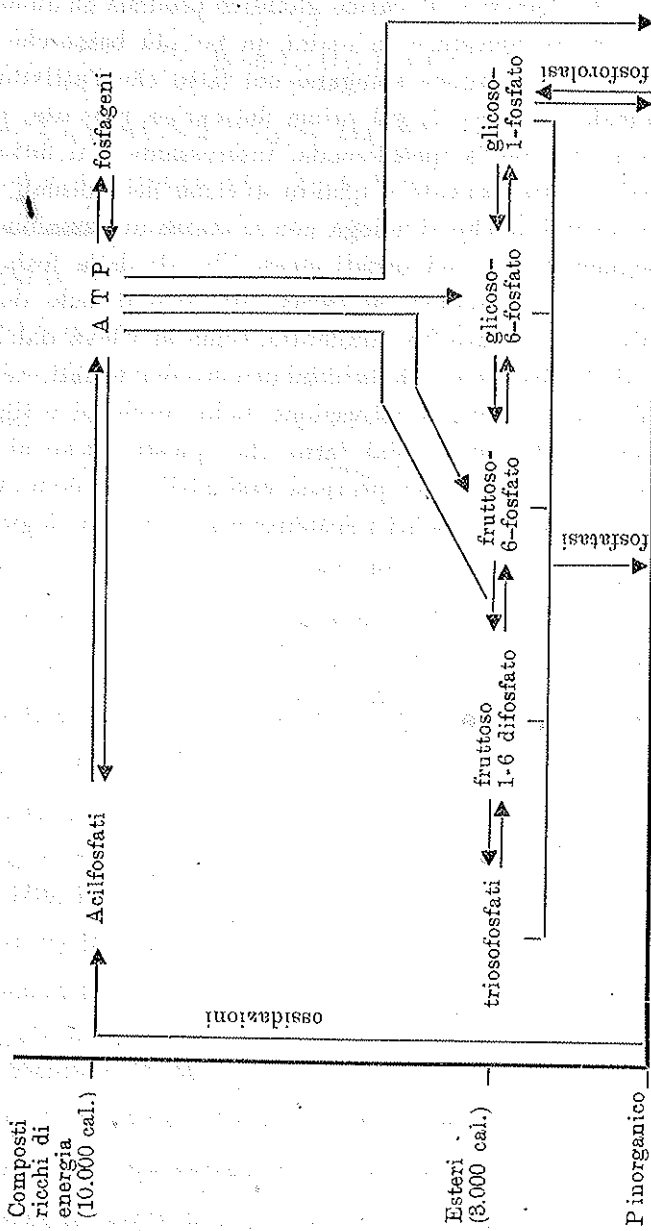
Il fatto che negli animali normali, accanto all'aumento dell'attività fosfatasica, si riscontra una diminuzione dei fosfati, sta ad indicare una utilizzazione di questi nei processi fosforilanti, che si verificano du-

rante l'utilizzazione del glicoso e che in questo caso prevalgono su quelli idrolitici. La fosfatasi avrebbe quindi la funzione di liberare fosfati inorganici e metterli a disposizione dei processi fosforilanti.

MARSH e coll. (*loc. cit.*, 26) osservano una diminuzione dei processi di fosforilazione *in vitro*, quando usano organi di animali ai quali è stato praticato carico di glicoso. Gli autori attribuiscono tale fatto all'aumentata attività fosfatasica, e difatti trovano che l'aggiunta di quantità crescenti di fosfatasi inibisce progressivamente la fosforilazione *in vitro*. Questa discordanza con i nostri risultati è però solo apparente, in quanto *in vitro* i processi di fosforilazione sono, per la labilità degli enzimi catalizzanti le reazioni accoppiate fornitrici di energia libera, meno intensi, e quindi facilmente controbilanciati dall'attività fosfatasica, devoluta ad enzimi più resistenti.

I nostri dati e anche quelli di MARSH mettono in evidenza rapporti tra i processi fosforilanti e defosforilanti, che possono essere precisati nella seguente maniera. La fosforilazione utilizza fosfati inorganici attraverso la formazione di legami ricchi di energia ed accumulo di ATP, dal quale il radicale fosforico passa ad altre sostanze organiche formando esteri notevolmente meno ricchi di energia, e questi infine vengono idrolizzati dalle fosfatasi, che pertanto hanno una parte indispensabile nel ciclo dei fosfati, riassunto nel seguente schema.

Per quel che riguarda l'assorbimento intestinale e il riassorbimento nei tubuli renali del glicoso, LIPMANN [32] pensa che i processi di fosforilazione si verifichino per passaggio del radicale fosforico da composti con legame anidridico ad alto contenuto energetico (circa 10.000 cal), ad altri con legame di estere a basso contenuto (3.000 cal), mentre la differenza di energia verrebbe utilizzata in modo non precisabile. Comunque sia, si forma l'estere, e questo deve essere defosforilato dalle fosfatasi perchè il glicoso sia immesso come tale nel circolo sanguigno. Con l'uso degli isotopi è stato inoltre dimostrato che la penetrazione di glicoso nel muscolo avviene sotto forma di glucoso-6-fosfato: a contatto della membrana cellulare, l'estere si scinde, il componente glicidico penetra nella cellula e il fosfato resta nel liquido interstiziale (da HERLITZKA [33]). Esisterebbe quindi anche nei fenomeni di assorbimento del glicoso un equilibrio tra fosforilazione e defosforila-



zione: alla prima partecipano enzimi ossidanti, fosfoferasi e fosforolasi, alla seconda le fosfatasi.

Nell'animale diabetico, il carico glicidico produce un aumento dell'attività fosfatasica. Questo è in realtà un po' più basso che nell'animale normale, e ciò potrebbe spiegarsi col fatto che l'attività fosfatasica dell'animale diabetico è, già prima del carico, più alta, probabilmente in rapporto con la iperglicemia. Interessante è il fatto che in questi animali, contrariamente a quanto avviene nei normali, si ha un aumento dei fosfati, il che si spiega con la scarsa utilizzazione dei glicidi e conseguentemente dei fosfati stessi, liberati dalla fosfatasi.

In altre parole, in seguito al carico glicidico, il ciclo dei fosfati negli animali normali sarebbe accelerato, come si rileva dall'aumento dell'attività della fosfatasi e della diminuzione dei fosfati. L'accelerazione avrebbe inizio con un'attivazione delle fosfatasi e liberazione di fosfati, come è dimostrato dal fatto che questi ultimi si accumulano, se esiste un ostacolo nei processi ossidativi, che fanno parte del ciclo in quanto legano i fosfati a sostanze organiche con legami ricchi di energia.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ROCHE J. e COURTOIS J., «Expos. Ann. Bioch. Méd.», 1944, 4, 221.
- [2] FOLLEY S. J. e GREENBAUM, «Bioch. Journ.», 1947, 41, 261.
- [3] LUNDGAARD E., «Bioch. Zeit.», 1933, 264, 209 e 211.
- [4] GOMORI G., «Proc. Soc. exp. Biol. and Med.», 1939, 42, 23.
- [5] KABAT E. A. e FURTH J. da «Lipmann Advances in Enzymology», 1941, 1, 99.
- [6] SAVIANO M. e BACCARI V., «Boll. Soc. It. Biol. Sperim.», 1946, 22, 560.
- [7] DEMPSEY E. W. e G. B. WISLOCK, «Physiol. Rev.», 1946, 26, 1.
- [8] BODANSKY A., «J. Biol. Chem.», 1934, 104, 473.
- [9] FREEMAN S., FARMER C. J., «Am. J. Physiol.», 1935, 113, 209.
- [10] SCHELLING V., «Arch. Path.», 1935, 20, 162.
- [11] FREEMAN S. e IVY A. C., «Am. Journ. Physiol.», 1937, 118, 541.
- [12] CANTOR M. M., TUBA J., CAPSEY P. A., «Science», 1947, 105, 476.
- [13] BINET L. e PAUTRAT J., «C. R. S. B.», 1934, 116, 709.
- [14] BARRENSCHEEN H. K., DOLESCHALL F., POPPER L., «Bioch. Zeit.», 1926, 177, 50.
- [15] BOLLIGER A., HARTMAN F. W., «J. Biol. Chem.», 1925, 64, 91.
- [16] BRIGGS A. P., KOENIG I., DOISY E. A., WEBER C. I., «J. biol. Chem.», 1923-1924, 58, 721.
- [17] KAY H. P., ROBISON R., «Bioch. J.», 1924, 18, 1139.
- [18] BLATHERWICK N. R., BELL M., HILL E., «J. Biol. Chem.», 1924, 61, 241.
- [19] WIGGLESWORTH V. B., WOODROW C. E., SMITH W., WINTER L. B., «J. Physiol.», 1922-1923, 57, 447.
- [20] HARROP G. A., BENEDICT E. M., «J. Biol. Chem.», 1924, 59, 683.
- [21] KAPLAN N. O. e GREENBERG D. M., «J. Biol. Chem.», 1944, 156, 525.
- [22] BODANSKY A., JAFFÉ H. L., «Proc. Soc. exp. Biol. and Med.», 1933, 31, 107.
- [23] BODANSKY A., «Enzymol.», 1937, 3, 258.

- [24] BODANSKY A., «Proc. Soc. exp. Biol. and Med.», 1939, **42**, 800.
- [25] MADERNA N., «Boll. Soc. It. Biol. Sperim.», 1941, **16**, 449.
- [26] MARSH J. B. e D. L. DRABKIN, «J. Biol. Chem.», 1947, **168**, 61.
- [27] SCOZ G. e MARANGONI P. L., «Boll. Soc. It. Biol. Sperim.», 1934, **9**, 969.
- [28] ROCHE J. e FILIPPI A., «Bull. Soc. Chim. Biol.», 1938, **20**, 1147.
- [29] FOLLEY S. J., «Bioch. Journ.», 1936, **30**, 2262.
- [30] RUFFO A., «Boll. Soc. It. Biol. Sperim.», 1940, **15**, 54.
- [31] CUTILLO F., «Ibidem», 1944, **19**, 175.
- [32] LIPMANN F., «Advances in Enzymologic», 1941, **1**, 99.
- [33] HERLITZKA A., «Boll. Soc. It. Biol. Sperim.», 1947, **23**, 153.

RACCOLTE FAUNISTICHE COMPIUTE NEL GARGANO
DA A. GHIGI e F. P. POMINI

VII. - ROPALOCERI (*)

ANGELINA DE TOGNI

SUMMARIVM. — Quinquaginta septem hic describuntur Ropalocerorum species e Gargani regione. Quarum nonnullae aliquantum differunt ab iisdem speciebus, quales existunt in aliis Italiae regionibus, non ita tamen ut (excepta *Lasiomata megera* L.) certum discrimen inter utrasque statui possit.

La raccolta di materiale lepidotterologico fu fatta dal dott. FRANCESCO PRO POMINI durante le sue escursioni faunistiche al Gargano e alle Isole Tremiti nella primavera e nell'autunno del 1940.

I luoghi esplorati dal Pomini furono parecchi; si potrebbe dire che portò un saggio di materiale da ogni genere d'ambiente, poichè le catture furono effettuate tanto in zone boschive e collinari, quanto in zone di pianura, costiere o interne al promontorio. Questi Ropaloceri furono determinati in parte dal dott. ARTILIO FIORI e in parte da R. VERITY.

La nomenclatura alare che ho adottato è quella proposta da Sergio Beer.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi nella Tornata Ordinaria dell'8 febbraio 1948.

PAPILIONIDAE

1. - *Papilio machaon* L.

3 ♂ 2 ♀ di I gen. *meridionalis* Rocci.

1 ♂ .. di II gen. *italicus* Rocci.

S. Nicandro, S. Menaio, Cagnano Varano, Umbra, Mattinata.

Contrariamente a quanto dichiara Verity per le razze europee, in questi cinque esemplari garganici di I gen., si nota uno spiccato dimorfismo sessuale per ciò che riguarda la statura degli esemplari, nel mio caso maggiore nei maschi anzichè nelle femmine. Oltre alla variabilità della forma e dell'estensione del disegno, si nota la presenza nella maggior parte degli esemplari della macchia rossastra negli spazi lunulari gialli delle celle 5 e 6 nella zona premarginale dell'ala posteriore. Verity, nella sua più recente pubblicazione da me ora ricordata, cita una forma *castinii* Lambillion con queste due macchie caratteristiche. Gli ocelli anali rossastrati dell'ala posteriore sono sempre molto grandi, come pure la serie di macchie azzurre nella fascia premarginale nera.

Il maschio di II gen. ha statura minore dei maschi di I gen. ed è pure assai meno pigmentato.

2. - *Iphiclides podalirius* L.

2 ♀ di I gen. S. Menaio.

Le due femmine differiscono per la diversa quantità di pigmentazione nera dei disegni e del colore giallo del fondo. Nella femmina meno melanizzata è scomparsa la macchia arancione soprastante l'ocollo anale nell'ala posteriore.

3. - *Zerynthia hysipyle* Schulz. (= *Thais polixena* Schiff.).

10 ♂ 6 ♀ razza *cassandra* Hbn. Foresta Paolini.

Tanto i maschi quanto le femmine presentano una grandissima variabilità nella forma e nell'estensione del disegno. Direi che non

trovo due esemplari del tutto uguali. Si notano varie forme tanto fra i maschi quanto tra le femmine, come la *bipunctata* Cosm. = *meridionalis* Hoff. caratterizzata dalla presenza di due macchie rosse fra le prime nervature nella zona extracellulare dell'ala anteriore, e da tre nella pagina inferiore; la forma *tripunctata* Zel. che ne presenta tre anche nella parte superiore.

PIERIDAE

4. - *Aporia crataegi* L.

1 ♂ 1 ♀ S. Nicandro.

Si avvicina più alla razza *augusta* Trti della Sicilia che alla *meridionalis* Vrtz dell'Italia media.

5. - *Pieris brassicae* L.

6 ♂ 4 ♀ I gen. *verna* Z.

.. 1 ♀ II gen. *aestiva* Z.

Mattinata, S. Menaio, Ginestra, nel Gargano; S. Domino, Caperaia, nelle Isole Tremiti.

Tanto nei maschi quanto nelle femmine di I gen. il colore della zona arcuata all'apice esterno nell'ala anteriore non è uniforme. In taluni esemplari è marrone, in altri, ed è nella maggioranza degli individui, è marrone molto intenso con una picchiettatura bianca che conferisce al disegno un colore grigio piuttosto che marrone. Da uno studio critico comparativo da me compiuto in precedenza fra Ropaloceri del Gargano e Ropaloceri delle Alpi orientali (Ruffrè Prov. di Trento), mi è risultato che, al confronto con *P. brassicae* L. del Gargano, quella alpina presenta nella maggioranza dei casi la sola colorazione marrone nella zona citata e solo nella minoranza la picchiettatura bianca che conferisce a detta zona la tinta grigia o intermedia fra grigia e marrone. Inoltre nelle femmine garganiche ho riscontrato una minore estensione nel disegno in confronto con quelle alpine, viventi in ambiente più freddo, contrariamente a quanto di solito si verifica.

6. - *Pieris rapae* L.15 ♂ 8 ♀ di I gen. *verna* Z.5 ♂ .. di I gen. *verna* Z. forma *leucotera* Stef.1 ♂ .. di I gen. *verna* Z. forma *immaculata* De Sélys6 ♂ 5 ♀ di II gen. *secunda* Vrtty.6 ♂ 3 ♀ di III gen. *tertia* Vrtty.1 ♂ .. di III gen. *tertia* Vrtty forma *conjugata* Vrtty.

S. Menaio, Cagnano Varano, Mattinata, Isola di Varano, Mandrione, Foresta Paolini, Alveo S. Egidio, Piano S. Vito, Umbra, Ginestra, nel Gargano; S. Domino, nelle Isole Tremiti.

Sono forme che oltre a presentare grande variabilità nell'estensione del disegno, presentano nello stesso anche variabilità di tinta. Nei maschi prevale generalmente il grigio, nelle femmine il marrone.

Oltre alle forme *leucotera* Stef., *immaculata* De Sélys, *conjugata* Vrtty, noto qualche esemplare maschio tendente alla forma *praeterita* Krul. = *bimaculata* Vrtty per un lieve accenno ad una seconda macchia nella cella 1 delle anteriori.

7. - *Pieris mannii* Mayer.

1 ♂ 2 ♀ Cagnano Varano, Mattinata, Isola di Varano.

L'unico maschio presenta un lieve accenno di una piccola macchiolina nera nella cella 1 dell'ala anteriore. Per tale caratteristica si avvicinerebbe alla forma *bimaculata* Rocci = *praeterita* Mez. con tale particolarità. Anche nelle femmine si riscontra un piccolo accenno di macchia nera nella cella 3 dell'ala posteriore per cui andrebbero ascritte alla forma *posteromaculata* Vrtty = *posticesignata* Stauder = *nigropunctata* Mez. Tutti questi esemplari poi anzichè ascriverli alla I gen. *farpa* Frhst. della razza *rossii* Stef., su indicazioni di Verity, io li ascriverei alla I gen. *farpa trans. ad antemanni* Frhst. Vrtty razza *rossii* Stef., per i disegni più estesi e più neri.

8. - *Pieris napi* L.7 ♂ 14 ♀ di I gen. *vulgaris* Vrtty.8 ♂ .. di I gen. *vulgaris* Vrtty forma *impunctata* Rüb.7 ♂ 3 ♀ di III gen. *meridionalis* Rühl.

Mattinata, Foresta Paolini, Cagnano Varano, S. Menaio, Umbra, Ginestra.

La forma *impunctata* Rüb, su indicazioni di Verity, dovrebbe mancare del punto nero nella cella 3, tuttavia fra gli otto maschi classificati come tali, qualcuno presenta un leggero abbozzo del punto.

9. - *Pontia daplidice* L.

10 ♂ 2 ♀ di I gen. *belidice* O.

1 ♂ .. di II gen. *expansa* Vrtz.

1 ♂ 1 ♀ di III gen. *subalbidice* Vrtz.

Ginestra, Umbra, Mattinata, S. Menaio, Mandrione, Cagnano Varano, nel Gargano; Caperaia, S. Domino, nelle Isole Tremiti.

Variabilità della tinta dei disegni negli esemplari di I gen. che può essere grigia o marrone o intermedia fra queste due, tinta decisamente marrone nelle altre due generazioni.

10. - *Euchloë ausonia* Hüb.

4 ♂ 3 ♀ S. Menaio, Cagnano Varano, S. Nicandro, Mandrione.

Appartengono alla I gen. data l'epoca di cattura (Maggio).

11. - *Anthocaris cardamines* L.

3 ♂ S. Menaio, Foresta Paolini, nel Gargano; Caperaia nelle Isole Tremiti.

12. - *Gonepteryx rhamni* L.

2 ♀ S. Menaio, Foresta Paolini.

13. - *Gonepteryx cleopatra* L.

3 ♂ 2 ♀ Mattinata, S. Menaio.

14. - *Colias hyale* L.

1 ♂ 1 ♀ Valle d'Umbra.

15. - *Colias croceus* Fourcr.1 ♂ .. di I gen. *vernalis* Vrtz.11 ♂ 2 ♀ di III gen. *croceus* Fourcr.

Valle d' Umbra, Ginestra, Piano S. Vito, Cagnano Varano.

Il confronto di questi esemplari con altri viventi in altre località e clima più caldo della pianura veronese (Cerea Prov. di Verona), non ha rivelato alcuna differenza nè dell'estensione del disegno, nè dell'intensità di pigmentazione.

16. - *Leptidea sinapis* L.8 ♂ 2 ♀ di I gen. *cana* Vrtz.1 ♂ .. di I gen. *trans. a melanoinspersa* Vrtz.4 ♂ .. di II gen. *dimiensi* Bsd.

S. Menaio, Foresta Paolini, Umbra.

In questi esemplari garganici, la macchia marrone all'apice esterno nell'ala anteriore è spolverata di granuli bianchi che fa assumere alla macchia stessa una tinta grigia. Solo in pochi esemplari è marrone. In individui delle Alpi invece (Ruffrè), coi quali ebbi occasione tempo fa di confrontarli, ho riscontrato tale spolveratura molto esigua quasi mancante per cui nel maggior numero degli esemplari alpini la macchia apicale è di color marrone.

SATYRIDAE

17. - *Satyrus jaspigia* Cyrillo.

5 ♂ S. Nicandro, Mandrione.

È notevole nei diversi esemplari la differente tonalità ed intensità delle tinte marrone dei disegni e del giallo nella parte ventrale delle ali posteriori.

18. - *Satyrus arge* Schultz.

13 ♂ 3 ♀ normali.

1 ♂ .. forma *semicaeca* Houlb.

S. Nicandro, Mandrione,

Oltre alla variabilità nell'estensione o forma del disegno e dell'intensità di pigmentazione, qualche esemplare presenta un fondo d'ala leggermente giallo anziché bianco.

19. - *Hypparchia fagi* Scop.

7 ♂ 9 ♀ Ginestra, Valle d'Umbra, Piano S. Vito, S. Nicandro.

Presentano caratteri intermedi tra la razza *orphnia* Fruhst. dell'Italia centrale e la *japudium* Std. dell'Istria.

Nei maschi l'ocello della cella 2 sull'ala anteriore spesso è assente. Nelle femmine è eccezionalmente presente un piccolissimo ocello nella cella 3 pure nell'ala anteriore.

20. - *Hypparchia statilinus* Hufn.

5 ♂ 2 ♀ razza *australis* Z. Ginestra, Piano S. Vito.

21. - *Eumenis semele* L.

10 ♂ 14 ♀ razza *peninsulitaliae* Vrtv.

Piano S. Vito, Ginestra, Valle d'Umbra.

È stata ascritta alla razza *peninsulitaliae* Vrtv, quantunque il disotto sia molto variegato di bianco.

22. - *Pararge aegeria* L.

9 ♂ 5 ♀ Valle d'Umbra, Ginestra, Foresta Paolini, S. Nicandro.

Presentano grande variabilità nella forma e nell'estensione dei disegni.

23. - *Lasiommata megera* L.

15 ♂ 6 ♀ di I gen. razza *praeaustralis* Vrtv.

5 ♂ 1 ♀ di II gen. *peninsulitalica* Vrtv *praeaustralis* Vrtv.

S. Menaio, S. Nicandro, Cagnano Varano, Mattinata, Isola di Varano, Piano S. Vito.

10 ♂ 2 ♀ di I gen. S. Domino, Caperaia, nelle Isole Tremiti.

Questi esemplari delle Isole Tremiti presentano caratteri intermedi tra la forma *praeaustralis* Vrtv e la forma *lyssa* Bsd. dei Bal-

cani. Infatti la caratteristica differenziale più saliente fra gli esemplari del Gargano e quelli delle Tremiti sta nella parte ventrale delle ali posteriori che è di un grigio leggermente più chiaro in questi ultimi.

24. - *Lasiommata moera* L.

7 ♂ 6 ♀ S. Nicandro, Ginestra.

È una forma di incerta determinazione: potrebbe essere ascritta alla forma *vulgaris* Vrtý se non fosse la zona fulva delle ali, specie nei maschi, troppo estesa, ovvero a *extralunata* Vrtý descritta della Provincia di Caserta, se il disotto delle ali posteriori non fosse di un grigio perlaceo chiaro, carattere che non è citato per *extralunata*.

25. - *Pyronia ida* Esp.

2 ♀ razza *neapolitana* Obth. Piano S. Vito, Valle d'Umbra.

26. - *Maniola jurtina* L.

21 ♂ 22 ♀ razza *prachispulla* Vrtý.

... 1 ♀ razza *prachispulla* Vrtý forma *erymanthoides* Stdr.

S. Nicandro, Mandrione, Umbra, Ginestra, Piano S. Vito.

Il confronto con altri esemplari di *M. jurtina* L. delle Alpi (Ruffrè) mi ha permesso di riscontrare la costante mancanza di una sfumatura rossastra nella zona extracellulare dell'ala anteriore nei maschi alpini, presente invece, più o meno, nella maggior parte di quelli garganici.

27. - *Coenonympha arcania* L.

1 ♂ S. Nicandro.

Ha un margine nero molto largo nell'ala anteriore, per cui anziché alla forma *tenuelimbo* della penisola italica, si avvicina per tale carattere alla razza *tyrrhena* Std. descritta dell'Aspromonte.

28. - *Coenonympha pamphilus* L.

9 ♂ 5 ♀ di I gen. *australis* Vrtý.

8 ♂ 8 ♀ di II gen. *aestivalis* Rocci *australis* Vrtý.

S. Nicandro, S. Menaio, Umbra, Cagnano Varano, Mandrione, Piano S. Vito, nel Gargano; Caperaia, nelle Isole Tremiti.

Forme col margine nero alare e con la macchiatura variamente estesa e variamente pigmentata.

NYMPHALIDAE

29. - *Limenitis drusilla* Bergstr.

2 ♂ Umbra.

30. - *Polygonia egea* Cr.

1 ♀ Umbra.

31. - *Melitaea cinxia* L.

4 ♂ 2 ♀ Ginestra, Umbra.

È una forma molto simile alla *pallidior* Obth. delle Alpi marittime.

32. - *Melitaea phoebe* Knock.

1 ♂ di I gen. *tusca* Vrtz.

1 ♂ di II gen. *emipauper* Vrtz.

S. Nicandro, Piano S. Vito.

33. - *Melitaea didyma* O.

7 ♂ 2 ♀ di I gen.

13 ♂ 8 ♀ di II gen. *caldaria* Vrtz.

Valle d'Umbra, Mandrione, Piano S. Vito, Ginestra, S. Nicandro.

Sono esemplari caratteristici per la forma e l'estensione del disegno variabilissima.

34. - *Melitaea helvetica* Rhul (= *pseudathalia* Rev.).

15 ♂ 5 ♀ razza *divergens* Rocci Umbra.

Forma ed estensione del disegno variabilissima.

35. - *Brenthis euphrosine* L.10 ♂ 5 ♀ razza *apennina* Stgr. Umbra, Ginestra.36. - *Brenthis daphne* Schiff.4 ♀ razza *tenuitermaculosa* Vrty. Umbra.37. - *Issonia lathonia* L.

3 ♂ .. di I gen.

5 ♂ 3 ♀ di II gen. *florens* Vrty.

Foresta Paolini, Piano S. Vito, Umbra.

38. - *Argymnis paphia* L.

5 ♂ 9 ♀ Umbra, Ginestra.

Ho avuto modo di confrontare queste *A. paphia* L. con altre delle Alpi (Ruffrè) ed ho constatato, oltre ad una maggiore estensione del disegno e dell'intensità di pigmentazione per le forme garganiche, anche una maggiore intensità della tinta verde nella parte ventrale delle posteriori.

39. - *Argymnis pandora* Schiff.

3 ♂ 1 ♀ S. Menaio, Umbra, Valle d'Umbra.

LYCAENIDAE

40. - *Polyommatus icarus* Rott.24 ♂ 6 ♀ di I gen, *zelleri* Vrty.32 ♂ 21 ♀ di II gen. *postzelleri* Vrty e *nana* Grund.

S. Nicandro, Umbra, Ginestra, Mandrione, Piano S. Vito.

In questi *P. icarus* la frangia marginale bianca è più o meno ridotta in qualche esemplare e in qualche altro è quasi assente.

Alcune femmine di II gen. presentano una tenue colorazione azzurrastra alla base delle ali, caratteristica questa più frequente negli individui di I gen. Nella maggior parte delle femmine le lunule marginali sono di color fulvo rossastro (forma *aureescens*) e solo eccezionalmente di color giallo pallido (forma *flavescens*).

41. - *Lysandra icarius* Esp. (= *amandus* Schn.).

2 ♂ razza *bruttia* Vrtý. Ginestra, Umbra.

42. - *Cupido minimus* Fuessl.

1 ♂ razza *alsoides* Gerh. forma *latecaerulea* Vrtý.

Ginestra.

43. - *Callophrys rubi* L.

2 ♂ 1 ♀ razza *intermedia* Tutt. Umbra.

Uno dei due maschi presenta una fascia marrone al punto d'inserzione e ventralmente all'ala posteriore.

44. - *Strymon spini* Schiff.

1 ♂ razza *major* Obth. S. Nicandro.

45. - *Heodes alciphron* Rott.

2 ♂ razza *ruehli* Trti. Umbra.

Uno dei due maschi in particolare presenta dei bellissimi riflessi azzurro violacei sulle quattro ali.

46. - *Heodes tityrus* Poda (= *dorilis* Hufn.).

9 ♂ 1 ♀ di I gen. *italaveris* Vrtý.

2 ♂ 8 ♀ di III gen. *italorum* Vrtý.

Umbra, Ginestra, Piano S. Vito.

Taluni maschi hanno le lunule rossastre marginali molto ridotte d'estensione ed anche di numero. In qualche esemplare sono quasi totalmente obliterate nelle due ali anteriore e posteriore.

Tra le femmine noto qualche individuo in cui è ridottissima e quasi scomparsa la zona rossastra diffusa nell'ala anteriore.

47. - *Thersamonia thersamon* Esp.

2 ♀ di III gen. *infracana* Vrtý. Mandrione.

48. - *Lycaena phlaeas* L.

.. 1 ♀ forma nominale.

4 ♂ 1 ♀ di III gen. *nigrioreleus* Vrtv.

Valle d'Umbra, Ginestra, Umbra, nel Gargano; S. Domino, nelle Isole Tremiti.

Noto qualche esemplare di forma *caeruleopunctata* Rühl = *caeruleopuncta* Strand. con una serie di piccoli punti turchini nella zona antemarginale dell'ala posteriore ben visibili in un esemplare e appena accennati in qualche altro.

49. - *Lycaenopsis argiolus* L.4 ♂ 3 ♀ di I gen. *argiolus* L... 1 ♀ di III gen. *circularis* Vrtv.

S. Nicandro, Foresta Paolini, S. Menaio, Umbra.

50. - *Philotes baton* Bgstr.

2 ♂ 1 ♀ di I gen. *praecocior* Vrtv. S. Nicandro, Cagnano Varano.

I maschi di questo *P. baton* sono esemplari molto piccoli.

51. - *Glaucopsyche alexis* Poda (= *cyllarus* Rott.).

13 ♂ razza *pauper* Vrtv e *latina* Hartig. Foresta Paolini, Umbra.

Un individuo presenta nella cella 1 della parte dorsale delle ali posteriori una macchia nera sul fondo azzurro. La serie di macchie nere ventralmente alle ali sono in moltissimi esemplari del tutto oblierate specialmente nell'ala posteriore.

52. - *Aricia agestis* Schiff.14 ♂ 3 ♀ di I gen. *subornata* Vrtv.6 ♂ .. di III gen. *subcalida* Vrtv.

S. Nicandro, Ginestra, Umbra, Mandrione.

Le lunule marginali sono in taluni esemplari di un colore rossastro, in altri arancione. Non in tutti gli individui la serie dell'ala anteriore è completa, in qualche caso mancano quelle verso l'apice esterno.

53. - *Lycæides argyrognomon* Bgstr. (= *ligurica* Obth).

12 ♂ 2 ♀ razza *latialis* Rost. Umbra, Valle d' Umbra, Ginestra.

Una delle due femmine ha le lunule marginali arancione dell'ala anteriore in parte obliterate.

HESPERIDES

54. - *Carcharodus alceae* Esp.

1 ♂ 2 ♀ di I gen. *præaustralis* Vrtv. Cagnano Varano, Foresta Paolini.

55. *Pyrgus sidae* Esp.

1 ♂ razza *occidua* Vrtv; forma intermedia con la nominale Umbra.

56. - *Pyrgus malvoides* Elw. e Edw.

1 ♂ 3 ♀ di I gen. *pseudomalvae* Vrtv; Ginestra, Umbra, Foresta Paolini.

57. - *Adopaea lineola* O.

1 ♂ razza *italamixta* Vrtv; Mandrione.

I Ropaloceri del Gargano che hanno formato oggetto del presente studio, non consentono di rilevare la presenza di forme caratteristiche di questo territorio.

Infatti accanto alle popolazioni di *Anthocaris cardamines* L., *Gonepteryx rhamni* L., *Gonepteryx cleopatra* L., *Hypparchia statilinus* Hufn., ecc., che presentano caratteri assolutamente simili a quelli delle corrispondenti popolazioni di altre località della Penisola con variabilità individuale non diversa da quella delle popolazioni garganiche, ve ne sono altre, come *Aporia crataegi* L., *Hypparchia fagi* Scop. e *Melitaea cinxia* L. che pur presentando una più accentuata variabilità individuale, non mostrano caratteri che valgono a differenziarle nettamente dalle popolazioni delle medesime specie altrove viventi.

Anche *Pieris brassicae* L., *Pieris rapae* L. e *Leptidea sinapis* L., sebbene gli individui garganici offrano qualche particolarità, come ad esempio la diversa variabilità della colorazione nel disegno delle ali (che in questi è tendente al grigiastro) in confronto con quelli alpini (nei quali predomina un fondo marrone), non si può, sulla base di questa sola differenza, considerarle come forme tipiche della regione garganica, perchè molto diverse sono le condizioni ambientali dei due luoghi citati, e d'altra parte la variabilità presentata dalle popolazioni del Gargano è comune alle popolazioni della medesima specie viventi in condizioni ambientali simili a quelle del nostro promontorio.

Sotto questi aspetti la forma forse più interessante di tutta la raccolta è *Lasiommata megera* L. delle Isole Tremiti, la quale nella pagina inferiore delle ali posteriori è di un grigio leggermente più chiaro della corrispondente forma *praeaustralis* Vrtý del Gargano.

Quella si avvicina alla forma *lyssa* Bsd. dei Balcani, ma non può essere identificata con questa ed appare piuttosto come forma intermedia fra gli esemplari del Gargano e quelli dei Balcani.

BIBLIOGRAFIA

- BEER S., *Ricerche sulla morfologia dei disegni nelle ali dei papilionidi*. « Commentationes Acad. Pont. Sc. », anno VI, vol. VI, n. 2.
- GHIGI A. - POMINI F. P. *L'importanza biografica della Regione Garganica*. « Boll. Zool. », XII, 1-2, 1941.
- MARIANI M., *Fauna lepidopterorum Siciliae*. « Mem. Soc. Ent. It. », XVII, 1938.
- ROCCI U., *Le forme italiane di Papilio machaon*. - « Boll. Soc. Ent. It. », LX, 1928.
- STEFANELLI P., *Catalogo illustrativo dei Lepidotteri toscani*. « Boll. Soc. Ent. It. », I, 1869.
- VERITY R., *Appunti su alcuni lepidotteri diurni italiani*. « Mem. Soc. Ent. It. », XVI, 1937.
- *Le farfalle diurne d'Italia. I, Hesperides*. - « Marzocco », Firenze, 1940.
- *Le farfalle diurne d'Italia. II, Lycaenida*. - « Marzocco », Firenze, 1943.
- *Le farfalle diurne d'Italia. III, Papilionidae e Pieridae*. - « Marzocco », Firenze, 1947.



SUR LA RÉCESSION DES NÉBULEUSES EXTRA-GALACTIQUES (*)

P. DRUMAUX

SVMMARIVM. — Nebularum extra-galacticarum motus per legem generalem gravitationis Einsteinii declarari potest, quin opus sit recurrere ad determinatam hypothesim circa structuram Universi. Qui motus non est tantum ut vulgo putatur, motus radialis recessionis, sed simul etiam motus transversalis, qui, quamvis hucusque latuerit propter exiguitatem effecti Dopplerii transversalis, non tamen est minoris momenti quam motus radialis; correspondet enim non tantum immenso motui gyratorio universitatis nebularum extra-galacticarum circa axim cosmicam cum orientatione immutabili, sed insuper motui transversali irrotationali. Via Lactea et universitas nebularum extra-galacticarum libere volvuntur in campo gravifico creato a molibus cosmicis remotissimis, cum velocitatibus amplitudinis 100.000 km/sec, inferioribus tamen velocitati lucis.

La loi générale de la gravitation d'Einstein permet d'expliquer le mouvement des nébuleuses extra-galactiques sans recourir à des hypothèses sur la structure de l'Univers.

Ce mouvement n'est pas, comme on se l'est figuré jusqu'à présent, uniquement un mouvement radial de récession, c'est-à-dire un simple mouvement de fuite dans la direction joignant de la Voie Lactée à la nébuleuse envisagée, mais aussi un mouvement simultané transversal normal à cette direction. Ce second mouvement a jusqu'à présent passé inaperçu à cause de la petitesse de l'effet Doppler transversal mais il est aussi important que le premier car il correspond non seulement à un immense mouvement de rotation de tout l'en-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Soprannumerario Revmo P. Johan Stein S. I. nella Tornata dell'8 febbraio 1948.

semble des nébuleuses extra-galactiques autour d'un axe cosmique d'orientation immuable mais en outre à un mouvement transversal irrotationnel.

Tous ces mouvements sont engendrés par l'attraction de masses lointaines énormes situées bien au delà de la portée du télescope et dont la loi de gravitation permet d'affirmer l'existence bien que leur forme et leur répartition soient inconnues.

La Voie Lactée et tout l'ensemble des nébuleuses extra-galactiques sont en chute libre dans le champ gravifique créé par ces masses lointaines et ont de ce fait des vitesses de l'ordre de 100 000 km/sec. mais néanmoins inférieures à la vitesse de la lumière.

Comme le système solaire est entraîné avec la Voie Lactée on ne peut observer que les vitesses relatives des nébuleuses par rapport à la Voie Lactée, c'est-à-dire la différence vectorielle entre la vitesse des nébuleuses et celle de la Voie Lactée. De là le mouvement apparent de fuite des nébuleuses dans toutes les directions, qui a jusqu'à présent paru si énigmatique.

À l'époque cosmique actuelle la Voie Lactée descend la pente des potentiels gravifiques.

La détermination astronomique des trajectoires des nébuleuses peut, en principe, se faire par la mesure des effets Doppler de deux nébuleuses situées environ dans la même direction à des distances très différentes, mais ne sera en fait praticable que lorsqu'on aura atteint un haut degré de précision dans la mesure du décalage des raies spectrales.

Selon la disposition des masses lointaines inaccessibles les trajectoires des nébuleuses sont des spirales elliptiques en forme de vrille ou bien des courbes gauches exponentielles à caractère apériodique.

En substituant à l'espace-temps réel un espace-temps osculateur avec contact du 3^e ordre et en tenant compte de la chute libre de la Voie Lactée les équations tensorielles de la gravitation conduisent à la loi donnant la vitesse des nébuleuses, laquelle est une fonction vectorielle linéaire du rayon vecteur mené de la Voie Lactée vers la nébuleuse envisagée. L'intégration de cette loi donne les trajectoires susdites.

D'autre part la décomposition du mouvement absolu en deux mouvements simultanés montre l'existence d'un vaste mouvement de précession qui est la rotation précitée de tout l'ensemble des nébuleuses extra-galactiques autour d'une axe cosmique d'orientation invariable.

Toutes ces déductions ne sont valables qu'en première approximation endéans les limites de validité de l'espace-temps osculateur, à savoir pour des distances de l'ordre de cent millions d'années-lumière pour lesquelles les écarts non-euclidiens de l'espace-temps restent fort petits. Si l'on pousse l'approximation au delà des limites susdites les mouvements sont beaucoup plus complexes.