

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

ACTA

ANNVS XI
VOLUMEN XI



EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MDCCCXXXVII

INDEX

	FOI.
1. A. SCACCINI e L. GARUTI, <i>Contributo allo studio della base morfologica della secrezione interna del testicolo negli uccelli</i> (cum 1 fig.)	1-8
2. S. TEOFILATO, <i>Leggi del trasporto solido nei canali</i> (cum 1 fig.)	9-30
3. F. FERRARI, <i>Ecologia vegetale. - Analisi pollinica dell'atmosfera di Trento e dell'orto botanico di Padova</i>	31-42
4. V. ZANON, <i>Saggio di sistematica delle crisostomacee. - Deposito quaternario di crisostomacee in Roma</i> (Nota preventiva) (cum 1 tab.)	43-62
5. L. CASTOLDI, <i>Forze d'inerzia nei sistemi lagrangiani e loro carattere conservativo in taluni casi particolari</i>	63-70
6. G. ARRIGHI, <i>Contributo ad una teoria generale degli operatori</i>	71-78
7. G. S. COEN, <i>Appunti di Malacologia mediterranea</i>	79-94
8. C. PIERSANTI, <i>Sulla presenza e sulla distribuzione del Leucochloridium macrostomum (Rud.) in Italia</i>	95-108
9. P. TEOFILATO, <i>Deduzione dei risultati di una galleria aerodinamica da quelli di un canale idrico</i>	109-116
10. R. BOSSI, <i>Proposta di tubo Roentgen con anodo anulare e diaframma fenestrato per l'aumento del tasso di assorbimento in profondità delle radiazioni in terapia</i> (cum 3 fig.)	117-132
11. V. ZANON, <i>Elementi d'acqua dolce e marina in un calcare farinoso nella zona della « Sedia del Diavolo » in Roma</i> (cum 1 tab.)	133-148
12. L. TENCA, <i>Ricerche sui determinanti di somme</i>	149-156
13. A. GHIGI, <i>Comportamento della mutazione obscurus di Chrysolophus pictus nell'ambiente genico di C. amherstiae</i>	157-160
14. A. GHIGI, <i>Ibridi fra Crossoptilon e Gennaeus</i> (cum 3 tab.)	161-170

15. V. GALLO, <i>Contributo citometrico allo studio della leucemia eosinofila</i> (cum 2 tab.)	171-186
16. V. GALLO, <i>Ricerche di citometria sui granulociti eosinofili periferici</i> (cum 2 fig.)	187-206
17. L. CASTOLDI, <i>Sulla generazione di vortici in fluidi perfetti « non omogenei » soggetti a forze di massa conservative</i> (cum 2 fig.)	207-218
18. G. MULÈ, <i>Sulla dipendenza lineare delle funzioni di più variabili</i>	219-226
19. L. DI CAPORIACCO, <i>Scorpioni dell'Eritrea del museo zoologico di Firenze</i> (cum 1 fig.)	227-234
20. G. MANGILI, <i>Osservazioni su la riproduzione in cattività di alcune specie di ofidii italiani</i> (cum 1 tab.) . . .	235-246
21. L. DI CAPORIACCO, <i>Una nuova specie di Lychas</i> . . .	247-250
22. L. DI CAPORIACCO, <i>Alcuni aracnidi cavernicoli di Toscana</i> (cum 2 fig.)	251-258
23. L. CASTOLDI, <i>Appunti per una teoria intrinseca delle variabili complesse sopra una superficie</i>	259-272

CONTRIBUTO
ALLO STUDIO DELLA BASE MORFOLOGICA
DELLA SECREZIONE INTERNA DEL TESTICOLO
NEGLI UCCELLI (*)

(Con una figura)

A. SCACCINI e L. GARUTI

SUMMARIVM. — Conferentes nonnullas inaequalitates in externis sexualibus notis cum testiculorum hystologico adspectu, auctores negant internam testiculorum secretionem in *Gallo domestico* ex interstitiali textura oriri.

La presente ricerca intende apportare un contributo alla conoscenza del problema della localizzazione della sede di origine degli ormoni testicolari negli Uccelli.

Come è noto, vari sono stati i modi di vedere circa la base morfologica della secrezione interna testicolare:

a) quello della scuola di ANCEL e BOUIN e di molti altri Autori⁽¹⁾, che attribuisce tale funzione al tessuto interstiziale;

b) quello della scuola di STIEVE, condiviso da vari ricercatori, che attribuisce la facoltà di produrre l'ormone testicolare agli elementi della linea seminale;

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi il 26 dicembre 1946.

(1) Per quanto ci consta, l'ultimo lavoro a conforto di tale ipotesi è quello di P. M. Van Os e J. D. C. RUYTER, «Acta Neerlandica Morphologiae norm. et pathol.», II, 1939.

c) quello di CHAMPY ed altri autori, secondo cui alla produzione dell'ormone testicolare parteciperebbe non un solo tipo di cellule, bensì diversi tessuti, fra quelli che entrano nella costituzione dell'organo.

Questa ricerca si riallaccia a due altri lavori precedenti di uno di noi⁽¹⁾, estendendo l'osservazione a vari casi di anomalie dei caratteri sessuali secondari nei galli; ciò ha consentito di analizzare più a fondo le correlazioni tra l'aspetto strutturale microscopico dei testicoli e la condizione di sviluppo dei caratteri sessuali secondari, in modo particolare della cresta, che, come è noto, specialmente per le ricerche di CHAMPY, è l'organo le cui strutture (strati di fibre elastiche) sono le più sensibili all'azione dell'ormone testicolare.

I soggetti esaminati provenivano dai pollai dell'Istituto di Zootecnia di Perugia e dalla Stazione Sperimentale di Pollicoltura di Rovigo; dei 15 capi esaminati, 12 erano di razza Livorno bianca, 3 di razza locale Umbra.

Sulla base delle varie modalità dei caratteri sessuali secondari esterni, i vari casi considerati potevano essere così raggruppati:

a) I soggetti 12 e 8, che avevano l'aspetto di veri e propri capponi, con cresta ridottissima, bargigli ed orecchioni molto piccoli, assenza di speroni; in ambedue i soggetti gli organi suddetti avevano presentato fin dall'inizio deficienza di sviluppo ed erano rimasti atrofici. Anche il comportamento degli animali era quello di un tipico cappone. Il soggetto 8 fu mantenuto vivo e, riesaminato a distanza di due mesi, non mostrò modificazioni dell'aspetto descritto.

b) I casi 2, 3, 5, 9, 10 e 11, che non erano per il loro aspetto esterno dei veri e propri capponi, ma in cui la cresta, i bargigli e gli orecchioni erano molto piccoli, per quanto avessero dimensioni più sviluppate di quelle dei soggetti 12 e 8; lo sperone era assente. I detti organi, nei casi in parola, avevano subito appena un inizio di sviluppo verso la condizione normale ed un precoce arresto di esso. I soggetti 9 e 10 furono mantenuti in vita e, dopo un mese, mostrarono una ulteriore leggera riduzione della cresta, mentre gli altri caratteri rimasero immutati.

(1) A. SCACCINI, « Boll. di Zoologia », V, 1934 e VII, 1936. Per le indicazioni sull'abbondantissima bibliografia sull'argomento si rimanda al primo dei due lavori di SCACCINI ed a quello di VAN OS e RUYTER.

c) Il caso 1, in cui la cresta era mediocrementemente sviluppata in dimensioni, ma ben presto si era afflosciata e ripiegata lateralmente, assumendo un aspetto secco e pallido; anche i bargigli e gli orecchioni si presentavano poco sviluppati, ma di dimensioni e di aspetto ben diverso da quello degli animali di cui al caso a); lo sperone mancava.

d) I casi 13 e 7, che poco diversificavano dal caso 1 per quanto riguardava l'aspetto dei bargigli, orecchioni e speroni; la cresta invece aveva le dimensioni di quella del soggetto 1, ma rimaneva eretta e di colore rosso pallido. Il soggetto 7 fu lasciato in vita; riesaminato successivamente a distanza di un paio di mesi, mostrava una sensibile ulteriore riduzione dei caratteri sessuali secondari.

e) I casi 4 e 6, che avevano pressochè l'aspetto di un gallo normale; per quanto riguardava le dimensioni dei bargigli e dell'orecchione, erano solo leggermente più piccoli di quelli di maschi normali della stessa età; la cresta aveva le stesse dimensioni e lo stesso colore di quella di un gallo normale, ma si presentava ripiegata lateralmente. Ambedue i soggetti avevano sviluppato in un primo tempo caratteri perfettamente normali; l'anomalia di aspetto della cresta si era presentata all'età di circa quattro mesi. Il soggetto 6 fu lasciato in vita e, a distanza di un paio di mesi, riassunse il comportamento e l'aspetto di gallo normale, con cresta eretta.

Pertanto, per quanto riguarda i caratteri sessuali secondari esterni dei vari soggetti considerati, si va da casi in cui essi poco si discostano dalla condizione normale, per gradi, fino a casi nei quali essi sono completamente atrofici.

Dal punto di vista anatomico ed istologico, possiamo rilevare affinità di aspetti fra i testicoli di alcuni soggetti, tra quelli considerati, e giungere a distinguerli come segue:

a) Il caso 12, i cui testicoli erano piccolissimi, del peso di gr. 0,10 il sinistro e gr. 0,07 il destro; i deferenti erano atrofici. All'esame microscopico delle sezioni, i tubuli apparivano di volume ridottissimo, contenenti nel loro interno un solo strato di cellule seminali, allo stato di spermatogoni, intercalate a quelle Sertoliane; l'estensione del tessuto interstiziale appariva di gran lunga maggiore di quanto si osservava in un testicolo normale; molto numerose erano le tipiche cellule di LEYDIG, con caratteri perfettamente normali.

b) I casi 2, 3, 5 e 11, con testicoli molto piccoli, di peso variante da gr. 0,10 a gr. 0,31. Il volume dei tubuli era pure ridotto, ma in misura minore di quanto si verificava nel soggetto 12; nell'interno di essi si notavano, oltre alle cellule Sertoliane, uno o al massimo due strati di cellule seminali, per lo più nella fase di spermatogoni e scarsi spermatociti di primo ordine. Gli spazi interstiziali erano pure di grandezza notevolmente maggiore del normale e in essi numerose erano le cellule di LEYDIG, con aspetto normale.

c) Il soggetto 1, in cui ciascun testicolo pesava gr. 0,12. L'aspetto generale, per quanto riguardava gli interstizi, non era molto diverso dai casi di cui alla lettera b), cioè estensione maggiore che in condizioni normali e grande quantità di cellule di LEYDIG, che qui erano un po' più frequenti che nei testicoli dei soggetti di cui alla stessa lettera b). Una notevole differenza si riscontrava invece nell'interno dei tubuli, anche qui di volume ridotto, pressochè nella stessa misura di quelli dei soggetti 2, 3, 5 e 11; nell'interno di essi vi erano almeno due, ma non più di tre strati di cellule seminali, al massimo nella fase di spermatociti di primo ordine.

d) Il caso 13, i cui testicoli pesavano gr. 0,30 il destro, gr. 0,37 il sinistro. Gli spazi interstiziali, avevano una estensione leggermente minore di quanto si osservava in un testicolo normale; così pure la quantità e l'aspetto delle cellule di LEYDIG era pressochè normale. Il volume dei tubuli era poco ridotto; numerosi gli strati di cellule seminali; il processo di maturazione delle cellule germinali si arrestava per la più gran parte agli spermatociti di secondo ordine; rari gli spermatidi.

e) Il caso 4, i cui testicoli pesavano gr. 5,72 il destro e gr. 4,15 il sinistro, condizione quindi per nulla discosta da quella di soggetti normali della stessa età e razza. Non si rilevava alcuna differenza di aspetto e di estensione del tessuto interstiziale in confronto con un testicolo normale. Anche i tubuli erano di grandezza normale ed in essi evidenti erano i caratteri che denunciavano essere avvenuta completamente la spermatogenesi e la spermiogenesi, tuttora in atto in alcuni tubuli, dove si riscontravano ciuffi di spermatozoi sulla sommità delle cellule del SERTOLI, mentre in altri tubuli gli spermatozoi maturi mancavano. Notevole però il fatto che nei tubuli era presente, in fasi più o meno avanzate, un processo di degenerazione mucosa degli

strati di cellule seminali prossimi alla membrana basale dei tubuli stessi, che interessava cioè in primo luogo spermatogoni e spermatoцитi di primo ordine. Tale processo si rilevava in molti tubuli, mentre in pochi altri la spermatogenesi e la spermiogenesi erano complete e normali.

Si noti che le osservazioni sono state compiute su materiale proveniente da soggetti della stessa età e mantenuti in condizioni normali di allevamento; tutti gli animali si trovavano in perfette condizioni di salute.

Occorre anzitutto notare che la distinzione dei vari casi esaminati, fatta sulla base dell'esame microscopico delle sezioni, corrisponde perfettamente con la distinzione fatta sulla base dei caratteri sessuali secondari esterni dei soggetti osservati.

Considerando le correlazioni tra l'aspetto strutturale dei testicoli e i caratteri sessuali secondari esterni, possiamo rilevare quanto segue.

Nei soggetti 12, 2, 3, 5, 11 e 1, di cui alle lettere *a*), *b*) e *c*), si rileva in tutti la stessa condizione del tessuto interstiziale, questo cioè è in quantità di gran lunga maggiore che in un testicolo normale; nè è possibile rilevare differenze rimarchevoli fra i suddetti casi nell'aspetto e nella quantità delle cellule di LEYDIG. Ciò nondimeno, come risulta da quanto sopra abbiamo detto, abbastanza notevoli sono le differenze a carico dei caratteri sessuali secondari esterni dei soggetti considerati.

Differenze manifeste si osservano peraltro nell'aspetto dei tubuli, che sono ridottissimi nel soggetto 12, meno in 2, 3, 5 e 11 e un po' meno ancora in 1 ed in correlazione con questa diminuzione di volume, in 12 si osserva un solo strato di cellule seminali, in 2, 3, 5, e 11 uno o due strati, in 1 due o tre strati.

Inoltre osservando la quantità e l'estensione del tessuto interstiziale si vede che essa è massima nel caso di cui alla lettera *a*) e va diminuendo nei casi di cui alle lettere *b*), *c*), *d*); in *e*) poi trovasi una condizione dell'interstiziale uguale a quella che si riscontra in un testicolo normale. Se osserviamo i caratteri sessuali secondari esterni, vediamo che invece essi variano in maniera esattamente opposta, si trovano cioè in condizioni più prossime a quella normale nel caso di cui alla lettera *e*), mentre vanno allontanandosi sempre più dalla condizione normale per raggiungere quella corrispondente all'aspetto del

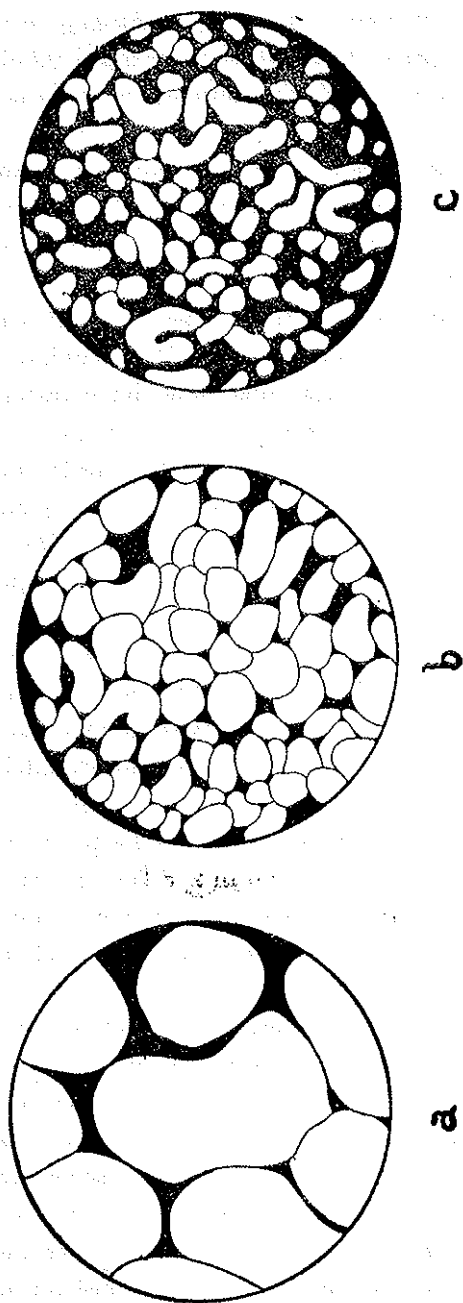


FIG. 1.

Rappresentazione schematica delle estensioni relative del tessuto interstiziale (in nero) e dei tubuli (in bianco), in una sezione di testicolo di gallo normale (a), di individuo che per i suoi c. s. s. è un capone completo (c) e di individuo con parziale riduzione dei c. s. s. (b).

tipico cappone, come nel caso di cui alla lettera *a*), quando corrispondentemente invece la quantità del tessuto interstiziale è molto grande rispetto al volume occupato dai tubuli. In altre parole: una riduzione sempre più marcata dei caratteri sessuali secondari è correlata con un aumento in estensione del tessuto interstiziale e, in quantità, delle tipiche cellule di LEYDIG.

Quando invece noi confrontiamo i vari aspetti dei caratteri sessuali secondari esterni con le condizioni strutturali dei tubuli seminiferi, evidente risulta la correlazione fra quelli e questi. Infatti nel caso del soggetto 12, di cui alla lettera *a*), a tubuli ridottissimi, nel cui interno esiste un solo strato di cellule seminali, corrisponde l'aspetto generale esterno di un cappone perfetto; mentre nel caso del soggetto 4, di cui alla lettera *e*), a condizioni dei tubuli di poco difformi da quelle di un testicolo normale, corrisponde una leggera alterazione dei caratteri sessuali secondari, che poco si discostano da quelli di un gallo perfetto, differendone soltanto per una insufficienza dello strato di fibre elastiche della cresta, donde questa si ripiega di lato, restando però delle dimensioni di quella di un gallo normale. Come è stato osservato nel caso del soggetto 4, la sola anomalia presente negli elementi intratubulari consiste in un processo degenerativo, più o meno diffuso, a carico degli spermatogoni e degli spermatociti di primo ordine, che si è verificato dopo che già si erano realizzati precedentemente sviluppo e funzionalità normali dell'organo. L'osservazione del soggetto 6 prova altresì la possibilità di un *restitutio ad integrum*.

Se consideriamo inoltre le correlazioni esistenti tra le condizioni in cui si trovano i tubuli e quelle dei caratteri sessuali secondari nei casi di cui alle lettere *b*), *c*) e *d*), intermedie fra le due prime condizioni citate, casi di cui alle lettere *a*) ed *e*), si vede che, quanto più lontana dalla condizione normale è la struttura dei tessuti intratubulari, altrettanto più attenuati appaiono i caratteri sessuali secondari considerati.

Queste osservazioni, nel loro complesso, starebbero a confermare l'opinione che, negli Uccelli, il tessuto interstiziale non avrebbe alcuna influenza nel determinismo dei caratteri sessuali secondari maschili ed indicherebbero piuttosto che tale influenza andrebbe attribuita agli elementi intratubulari del testicolo.



LEGGI DEL TRASPORTO SOLIDO NEI CANALI (*)

(Con una figura)

STEFANO TEOFILATO

SVMMARIVM. — Proprietatibus dimensionalibus innixus Auctor invenit formulam quam experimentis proposuerat MEYER-PETER, quaeque falso apparet componi non posse cum iis quae CONTI asseruit de solidis vehendis in fluminis alveo.

INTRODUZIONE

Lo studio delle condizioni del trasporto solido nel fondo dei corsi d'acqua è stato oggetto di numerose osservazioni dirette e successivamente di ricerche di laboratorio, che hanno dato origine ad un notevole gruppo di formole a carattere meramente empirico.

Il Du Bois, e poi il CONTI, hanno affrontato il problema dell'inquadramento del fenomeno nelle rigide leggi della meccanica, riuscendo a dare formole nelle quali, però, i numerosi parametri, che si vengono ad introdurre, non sempre esplicitamente figurano.

Più tardi il MEYER-PETER ha proposto una formola empirica, alla quale però sono state volte critiche per il suo carattere semplicista. In questo lavoro, dopo un rapido sguardo alle varie trattazioni del problema del trasporto solido, ne viene affrontato lo studio con metodi puramente dimensionali ed, in tal modo si determina, per via teorica, una formola assai simile a quella proposta dal MEYER-PETER e si riesce ad ovviare alle giuste critiche a quella mosse.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Armellini il 10 febbraio 1947.

Viene inoltre determinata una legge di trasporto solido in seconda approssimazione; da ultimo segue un confronto numerico tra la legge trovata ed i risultati sperimentali di BITTERICH.

Già in prima approssimazione la formola che si è qui determinata fornisce nel suo impiego risultati soddisfacenti. Essa richiede fondamentalmente la conoscenza della portata liquida alla quale si ha l'inizio del movimento dei grani del materiale di fondo, dei quali si dovrà supporre una dimensione media unica, nonché della forma della sezione dell'alveo e la pendenza di questo.

§ 1. LEGGI DI TRASPORTO SOLIDO. — Daremo anzitutto un breve cenno della legge stabilita dal Du Bois. Egli considera l'equilibrio tra la forza con la quale l'acqua agisce nei confronti dello strato solido costituente il fondo, di spessore s , e massa specifica ρ_s . Detto f il coefficiente di attrito tra lo strato solido costituito da materiale che può essere assoggettato a movimento di trasporto, ed

$$F = \rho_a g \cdot H \cdot i$$

l'azione dell'acqua,

$$P = (\rho_s - \rho_a) s g$$

il peso in immersione del materiale solido, il rapporto tra F e P dovrà essere, per l'equilibrio dello strato, minore del coefficiente f di attrito: cioè:

$$\frac{F}{P} = \frac{\rho_a H \cdot i}{(\rho_s - \rho_a) s} \leq f$$

dalla quale si trae, che, se:

$$s \geq \frac{\rho_a H \cdot i}{(\rho_s - \rho_a) f}$$

lo strato è in movimento.

In tal caso si suppone di aver diviso lo strato di fondo in tanti straterelli di dimensione d eguale a quella media dei grani, la relazione:

$$n \cdot d = \frac{\rho_a H \cdot i}{(\rho_s - \rho_a) f}$$

dà l'altezza dello strato solido in movimento.

Considerando poi una distribuzione di velocità, in seno allo strato solido in movimento, proporzionale all'altezza dello straterello di spessore d , indicando poi con F_0 la forza di gravità esercitata dall'acqua sul primo straterello, con F quella esercitata sullo straterello ennesimo, con u_s la velocità del primo straterello in movimento a contatto con l'alveo fisso, si ha l'espressione della portata solida della portata solida specifica (cioè per l'unità di larghezza del corso d'acqua):

$$[1] \quad q_s = \frac{u_s F(F - F_0)}{2 \cdot d (\rho_s - \rho_a)^2 g^2 f^2} = \eta F(F - F_0)$$

Nella quale espressione, per F_0 circa zero, ciò che potrebbe verificarsi per strati composti da materiale molto fine ed incoerente, la [1] porta alla conclusione che la portata solida è proporzionale al quadrato della forza di trascinamento che si esercita sul letto fisso del corso d'acqua.

Altre formole, cui SHULTS e CORFITZEN hanno dato la denominazione di « formole di trascinamento », proposte per rappresentare il trasporto solido, si basano sulla relazione che passa tra la forza di trascinamento e la dimensione dei grani del materiale trasportato.

In esse le caratteristiche fisiche del materiale mosso figurano espresse in termini della forza di trascinamento, e le relazioni hanno soltanto carattere empirico.

L'Istituto Federale Svizzero di Tecnologia, attraverso le sue ricerche ha rilevato, invece, l'inesistenza di un legame tra forza di trascinamento e le dimensioni del grano del materiale trasportato: per un determinato valore della forza di trascinamento, ha trovato che la dimensione del materiale trasportato dipende dall'altezza dell'acqua della corrente.

In generale, poi, poco si è chiarito intorno alla forza di trascinamento critica, cioè per la quale si ha l'inizio del movimento di grani

di determinata dimensione, specie per il materiale finemente diviso, invece per materiale più grosso si è data una formola:

$$F_0 = b D^m$$

dove b è una costante dipendente dalle caratteristiche fisiche del materiale solido, D la dimensione del grano del materiale solido, m è un esponente cui SCHOKLITSCH attribuisce il valore $\frac{3}{2}$, KEY e KRAMER lo fanno uguale ad 1, e lo *U. S. Waterway Experiments Station* ne dà il valore $\frac{1}{2}$. Si posseggono anche dati ricavati dalla osservazione delle forze di trascinamento naturali, forniti dal *Neurnberg Kulturanst.*

Altre formule ancora permettono la determinazione della portata solida del letto di un corso d'acqua e derivano dall'esame del comportamento del materiale di fondo medesimo sotto l'influenza di differenti portate liquide e differenti pendenze. Queste formole sono state indicate, dagli autori sopra citati, SHULITS e CORFITZEN, con la denominazione di « formole per il materiale di fondo ».

Si indica al solito con q_s la portata solida specifica, con q quella liquida e con q_0 quella liquida « critica » cioè corrispondente a quella per la quale si ha l'inizio del movimento del materiale di fondo.

SCHOKLITSCH, impiegando dati sperimentali di GILBERT, propone la formola:

$$q_s = a(q - q_0) i^{3/2} d^{-1/2}$$

dove i è la pendenza della linea di energia, d il diametro del grano del materiale solido di cui si compone il fondo, a è una costante.

Lo stesso autore giunge ad una formola analoga con considerazioni di carattere esclusivamente teorico.

La velocità del materiale solido può ritenersi proporzionale alla velocità dell'acqua della corrente ed esprimersi con

$$c_1 U$$

Allora la potenza spesa per l'aumento della forza di trascinamento, dal valore che corrisponde alle condizioni di inizio del movimento o « critiche », a quello che corrisponde alle condizioni relative alla corrente in esame, è:

$$\Pi = \rho_a g c_1 U i (A - A_0) = \rho_a g c_1 i (q - q_0)$$

nella quale A è l'area di passaggio dell'acqua nelle condizioni in esame, per metro di larghezza della corrente, A_0 è l'area di passaggio dell'acqua nelle condizioni di inizio del movimento del materiale solido. Ritenendo la portata di materiale solido proporzionale alla potenza spesa per l'incremento della forza di trascinamento, si otterrà allora la seguente espressione, in cui nel fattore χ sono contenuti tutti i fattori di proporzionalità e fattori numerici:

$$[2] \quad q_s = \chi i (q - q_0)$$

Gli Autori MEYER-PETER, FAVRE, EINSTEIN, in seguito ad esperienze compiute presso il laboratorio Zurigo, hanno proposta la formola:

$$[3] \quad q^{2/3} \frac{i}{d} = 17 + \frac{0,4 q_s^{2/3}}{d}$$

che, quando sia linearizzata, risulta del tipo della precedente dovuto a SCHOKLITSCH. Infatti essa può essere posta nella forma

$$y = (a + bx^{2/3})^{3/2},$$

facendo opportune ed evidenti sostituzioni. Sviluppandola in serie di MAC LAURIN e fermandosi al primo elemento:

$$q_s = \left(\frac{i}{0,4} q_0^{2/3} - \frac{17d}{0,4} \right)^{1/2} \cdot \frac{i}{0,4 q_0^{1/3}} (q - q_0)$$

che corrisponde esattamente alla [2].

Più recentemente EINSTEIN afferma che è necessario riferire il fenomeno di trasporto, non più ai termini del flusso della corrente d'acqua, bensì alle fluttuazioni di velocità nelle vicinanze del fondo. Di qui un esame del movimento del materiale di trasporto ha dato motivo, a detto Autore, di concludere che esso si muove sul letto fisso del corso d'acqua scambiando continuamente le particelle solide che, perciò, alternano tratti di movimento a tratti di sosta.

§ 2. CRITICHE AD UNA FORMOLA. - La formola data da MEYER-PETER, FAVRE, EINSTEIN si è prestata ad alcune obiezioni. Infatti, introdotto il rapporto finito $R = \frac{q_s}{q}$ dalla [3] si trae la:

$$[4] \quad q = f(d, R, i)$$

in cui è omessa la esplicitazione nelle costanti $a=17$, $b=0,4$ perchè per queste si sottintendono i particolari valori assunti nella [3]. Siano ora U_a , la velocità media della corrente di sezione trasversale A e larghezza L , p il contorno bagnato, r il raggio idraulico, allora la portata specifica liquida, così come è definita dal MEYER è:

$$q = \rho_a g \frac{A}{L} U_a = \rho_a g \frac{A p}{p L} U_a = \rho_a g r U_a$$

ammettendo eguale all'unità il rapporto $\frac{p}{L}$, ciò che si verifica molto approssimativamente per i grandi corsi d'acqua.

Dell'ultima espressione della portata liquida si vale l'ARREDI, infatti da essa si ricava facilmente la U_a espressa in funzione anche della [4]:

$$[5] \quad U_a = \frac{f(d, R, i)}{\rho_a g r} ;$$

da essa poi, esplicitando il legame f , si ricaverebbe essere la velocità della corrente inversamente proporzionale al raggio idraulico:

$$[6] \quad U_a = \frac{1}{\rho_a g \cdot r} \left(\frac{17 d}{i - 0,4 R^{2/5}} \right)^{3/2} ,$$

Si ricaverebbe quindi un risultato che è in contraddizione con quello ormai classico del KENNEDY, secondo il quale è invece:

$$U_a = \text{cost } r^{1/2} .$$

Supposto poi nullo il trasporto solido, cioè fatto nella [6] $R=0$, si avrebbe:

$$[7] \quad U_a = \frac{1}{\rho_a g \cdot r} \left(\frac{17 d}{i} \right)^{3/2}$$

per la quale crescerebbe la velocità di equilibrio col diminuire di r ed i , e ciò è contrario al canone degli idraulici ed alla osservazione generica di FORTIER e SCOBEEY.

Orbene ad ovviare a queste giuste critiche, basterà, come si vedrà nella presente nota, ravvisare nei coefficienti a e b della [3] non già il carattere di una costanza, ma quello di un'opportuna variabilità, in funzione di vari parametri che effettivamente entrano nella questione.

Anzitutto si osserva che se invece della [3] si assumesse una legge affatto generale:

$$[8] \quad G(q, q, d, i) = 0$$

dove G è simbolo di una qualsiasi funzione, allora da quest'ultima, eliminando q , con l'introduzione del rapporto R , ricavando poi q ed infine la velocità U , ossia ripetendo passo passo il procedimento sopra eseguito nei riguardi della [3] si ricaverebbe ancora la [5] salvo che il simbolo f ora avrebbe un carattere affatto generale. Allora alla [5] nella quale f è funzione arbitraria, si potrebbe muovere almeno la prima delle obiezioni precedentemente avanzate contro il caso particolare specificato, dimostrando così l'incompatibilità di qualsiasi legge del tipo [8] con quella di KENNEDY.

Questa conclusione induce quindi ad intravedere che tutto dipende dal modo nel quale si interpreta la costanza dei coefficienti a e b .

Forse, limitatamente alle esperienze che hanno servito di base per impiantare la [3] (esperienze le cui modalità non sono completamente note), può essere plausibile la costanza di a e b , ed inoltre potrà anche ritenersi fuori campo il caso limite di $R=0$, tanto da non essere suscettibile di essere inquadrato nei risultati di quelle esperienze e quindi di essere chiamato in causa contro di esso.

§ 3. COSTRUZIONE DI UNA LEGGE DELLE PORTATE. — In base agli indizi forniti dalle riflessioni che precedentemente abbiamo fatte si palesa la necessità di riprendere la questione nei suoi fondamenti, ciò che si farà nella presente nota alla luce dell'analisi dimensionale e dei suggerimenti che porgono i risultati sperimentali da tempo acquisiti.

Sembra lecito presumere che la q , pensata come funzione della q , ammetta una derivata finita, non nulla, per cui possa scriversi:

$$dq_s = k dq,$$

dove k è un coefficiente adimensionale il quale entro limiti sufficientemente ristretti si può ritenere costante, ma in un più vasto campo invece dipende da q_s e q e da altri parametri ancora. La dipendenza di k dalle due portate, solida e liquida, e da altri parametri ancora

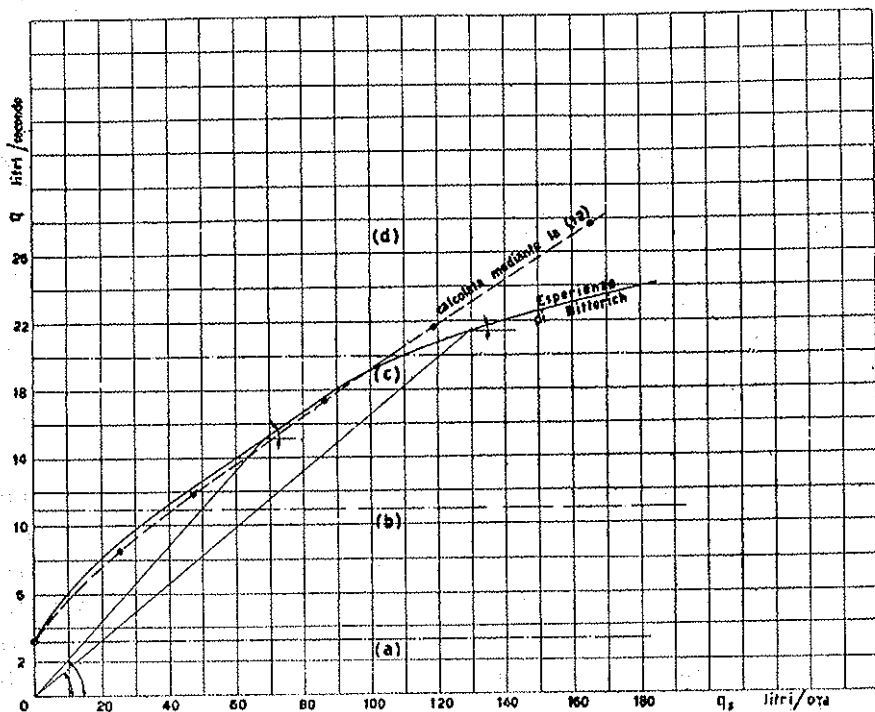


FIG. 1.

non contenenti il tempo, deve estrinsecarsi necessariamente attraverso il rapporto R , così da potersi scrivere:

$$[9] \quad dq_s = (\alpha + \beta R^m) dq.$$

In proposito si può accennare alle osservazioni compiute da BITTERICH dell'Istituto di Karlsruhe, e riportate dal Wittmann. Il BITTERICH ha compiuto notevoli osservazioni sopra il moto del materiale solido in un canale sperimentale rettilineo, lungo 35 metri, impiegando come materiale di trasporto polvere di carbon fossile. Egli a conclusione delle sue esperienze, sostiene che il fenomeno del trasporto solido

possa esprimersi come legge lineare, tra la portata liquida e la portata solida, la quale, per quanto concerne il coefficiente direttivo, varia a seconda di determinati intervalli della portata liquida per i quali è anche diverso il comportamento dello stesso materiale solido. Di questi intervalli Egli distingue:

- a) intervallo di portate liquide per il quale non si verifica alcun movimento di materiale di fondo;
- b) intervallo nel quale si ha l'inizio del movimento;
- c) intervallo nel quale si ha il movimento generale del fondo;
- d) intervallo nel quale le particelle di materiale solido passano a muoversi in sospensione in seno alla corrente.

Dall'esame del diagramma che Egli fornisce, risulta poi che la inclinazione della tangente al diagramma medio, nel quale le ascisse sono le q , e le ordinate le q , cioè $\frac{dq}{dq_s}$, rimane costante oppure diminuisce col diminuire dell'angolo (con l'asse delle ascisse) che fa il raggio condotto dall'origine ai punti del diagramma aventi ascisse crescenti: salvo un piccolo tratto iniziale l'angolo è dato da $\arctang\left(\frac{q}{q_s}\right)$. Ciò significa che la derivata $\frac{dq}{dq_s}$ aumenta con l'aumentare di R e si è perciò indotti ad assumere l'esponente m positivo.

D'altra parte se si immette un incremento dq di acqua aumenterà il contorno bagnato e simultaneamente l'altezza d'acqua sul fondo.

Ma l'incremento di contorno prima scoperto ed ora bagnato porta ad un incremento della portata solida, mentre l'aumento di altezza fa crescere il carico e con esso la forza di trascinamento sul fondo. Sono due cause cospiranti allo stesso effetto di incrementare q_s di dq_s , si può dunque ritenere approssimativamente la proporzionalità tra dq_s ed una combinazione lineare di dp e dh .

Per contro l'aumento dq di portata liquida è certamente proporzionale all'incremento dh dell'altezza d'acqua, allora la derivata $\frac{dq_s}{dq}$ è un rapporto di due termini ciascuno dipendente da una lunghezza al primo grado, mentre i termini di R , del quale la detta derivata è funzione, dipendono da lunghezze al terzo grado.

Ne verrà di conseguenza che il rapporto R dovrà necessariamente figurare nella [9] al grado $m = \frac{1}{3}$.

A complemento della argomentazione suesposta cade opportuna la riflessione seguente. Si consideri, per fissare le idee, nel corso d'acqua una fetta di un decimetro di larghezza e cento di altezza, e si supponga che per ogni decimetro cubo vi siano in media mille grani (tutti delle stesse dimensioni). Se viene immessa una quantità d'acqua Δq , senza grani, la quale faccia salire di un decimetro, cioè di un centesimo, la precedente altezza, a causa dell'aumento di carico sul fondo sarà asportata in più una quantità $\Delta' q_s$ di materiale solido. Se invece si immagina che q_s sia otto volte più grande, cioè 2^3 volte, in modo che in un decimetro cubo vi siano ottomila grani, anzichè mille, allora su ogni spigolo del cubo vi sarà adesso un numero doppio di grani, rispetto al caso precedente ed è quindi da presumere che un incremento $\Delta'' q_s$ di materiale solido, provocato dall'incremento di portata liquida Δq risulti ora doppio rispetto a $\Delta' q_s$.

In quanto ora si è detto, non è escluso che anche il coefficiente β abbia a dipendere dalla forma del profilo della sezione e quindi dal contorno p , ed eventualmente dalla pendenza i . Il coefficiente β va considerato costante entro un certo campo, ma con l'estendersi di questo può non più conservarsi tale e dipendere, invece, sensibilmente dai parametri della questione, così come ad esempio si verifica per il coefficiente di resistenza quadratica nell'avanzamento in un mezzo fluido, che effettivamente viene a dipendere dal numero di REYNOLDS. La dipendenza di β dal contorno bagnato verrà richiamata in seguito. Infine, poichè l'incremento di portata solida è da ritenersi proporzionale a $\sin i$, e quindi ad i , si porrà:

$$[10] \quad dq_s = (\alpha + \beta R^{1/3}) i dq.$$

Riterremo dapprima nullo il parametro α , per modo che si avrà adesso la:

$$\frac{(dq : dq_s)^3}{q : q_s} = \beta i,$$

l'integrazione della quale ci porterà ad una legge di trasporto solido in prima approssimazione, mentre in seguito verrà anche considerata

l'equazione completa [10], ciò che darà luogo alla legge di trasporto solido in seconda approssimazione.

L'integrazione della [10], fattovi $\alpha = 0$, fornisce:

$$[11] \quad q_s^{2/3} = \beta i q_0^{2/3} + \text{cost.}$$

Indicando allora con q_0 la portata liquida critica, cioè quella cui corrisponde l'equilibrio dei grani di dimensione prefissata d , si potrà esprimere la costante additiva in funzione di questa q_0 , giungendo così alla:

$$[12] \quad q_s^{2/3} = \beta i (q_0^{2/3} + q_0^{2/3})$$

nella quale, per essere il minuendo rappresentato da $\beta i q_0^{2/3}$, deve risultare a norma della definizione di R data in precedenza:

$$\beta i > R^{2/3}$$

diseguaglianza che si richiamerà più oltre e che si avrebbe analogamente tra i ed R , qualora l'esponente di R nella [10] fosse assunto in modo generico, sempre però avendo presupposto i positivo.

§ 4. STUDIO DELLA PORTATA CRITICA E CONFRONTI SPERIMENTALI. —

Se per portata critica si assume, come del resto fanno diversi autori, la portata per unità di contorno bagnato, allora, poichè essa è la minima portata che riesce a spostare i grani di materiale solido di una determinata dimensione d , dipenderà a parità di velocità critica (velocità corrispondente alla portata critica in una determinata sezione) oltre che dal raggio idraulico r , anche dalla forma del profilo. In questo si è d'accordo con lo SHIELDS, il quale ritiene che l'introduzione del raggio idraulico sia un procedimento affatto arbitrario, che non tiene per nulla conto della forma del profilo. Come ulteriore parametro geometrico, che, almeno per i canali nei quali l'altezza d'acqua è piccola rispetto alla larghezza, individua la sezione con molta approssimazione, si assumerà il perimetro bagnato p della sezione stessa.

Una espressione della portata critica specifica si otterrà moltiplicando la corrispondente velocità critica V_0 per un fattore di dimen-

sione uno rispetto alle lunghezze e costruito con r e p . Si presentano perciò, per ora, le due forme parimenti accettabili:

$$[14] \quad q_{01} = \rho_a g V_0 \left(\frac{r^2}{p} \right)$$

oppure:

$$[14bis] \quad q_{02} = \rho_a g V_0 \left(\frac{p^2}{r} \right).$$

Si prenda in esame il caso di un canale a sezione rettangolare di larghezza L ed altezza d'acqua H : il perimetro bagnato ed il raggio idraulico risulteranno rispettivamente:

$$p = 2H + L \quad r = L \cdot H : (2H + L)$$

e, per i casi reali, per i quali si può trascurare l'altezza rispetto alla larghezza, si potrà scrivere:

$$p = L_+ \quad r = H_+$$

che introdotte nella [14] e [14bis], danno:

$$q_{01} = \rho_a g V_0 H_+^2 : L_+$$

$$q_{02} = \rho_a g V_0 L_+^2 : H_+.$$

Ora la portata, come pure la portata specifica, quando L_+ sia scelto, poichè si intende far riferimento ad una determinata sezione del canale, sono grandezze crescenti col crescere dell'altezza d'acqua H_+ , quindi la scelta tra q_{01} e q_{02} cade evidentemente sulla prima, cioè sulla espressione [14], nella quale si dovrà sottindere una costante di proporzionalità, che si indica con γ .

Per giustificare ulteriormente la [14] occorrerà riferirsi ed esperienze che permettano la determinazione del fattore di proporzionalità del quale dovrà risultare l'invarianza rispetto agli altri vari parametri della questione.

A tal fine si sono dapprima utilizzati i dati sperimentali ricavati da INDRI col precipuo scopo di determinare la forza di trascinamento e poi le esperienze di MEYER-PETER.

L'INDRI ha esposto i risultati delle sue esperienze in numerose tabelle ricche di dati dai quali si hanno le forze di trascinamento corrispondenti a varie portate e pendenze, fino a raggiungere la portata critica. Egli compie esperienze su miscele di grani, anzichè su grani di unica dimensione, e definisce queste miscele a mezzo del « grado di uniformità ».

È stato così possibile trarre i dati riguardanti le portate critiche misurate, i raggi idraulici, le altezze d'acqua, i perimetri bagnati, e le velocità medie dell'acqua: questi si sono introdotti nel secondo membro della [14]. La q_{10} così ottenuta e quella q_0 , invece misurata sperimentalmente, differiscono tra loro (la q_0 è ottenuta facendo il rapporto tra portata totale misurata e perimetro bagnato della sezione) e si è allora potuto procedere alla determinazione del fattore di proporzionalità preannunciato γ (appunto facendo il rapporto $q_{01} : q_0$).

D'altra parte la portata critica sperimentale si può anche esprimere:

$$q_0 = \frac{Q_0}{p} = \rho_a g V_0 \left(\frac{A}{p} \right) = \rho_a g V_0 r$$

mentre la [14] da:

$$q_{01} = \rho_a g V_0 \left(\frac{r^2}{p} \right)$$

ed il rapporto:

$$[15] \quad \frac{q_{01}}{q_0} = \frac{r}{p} = \gamma$$

La media dei rapporti tra la portata calcolata dalla [14] e quella misurata sperimentalmente nelle corrispondenti condizioni è risultata eguale a 0,1175 per tutte le esperienze condotte in circostanze « critiche » dall'INDRI, d'altra parte la media dei rapporti $\frac{r}{p}$ nelle stesse esperienze è precisamente eguale a 0,1172. Risulta perciò confermata la [15], cioè la coincidenza del fattore di proporzionalità γ con il fattore di forma della sezione, relativo a condizioni critiche, cioè all'inizio del trasporto del materiale solido di prefissata dimensione d , almeno nel campo delle esperienze citate; esso dipende soltanto dal rapporto di due lunghezze caratteristiche della sezione, si manterrà perciò invari-

riato per sezioni geometricamente simili, non dipenderà nè dalla pendenza, nè dalla portata.

Risultati concordanti coi precedenti si ottengono dai dati sperimentali del MEYER-PETER, costituiti da velocità e dall'altezza d'acqua, se opportunamente interpretati. Dette esperienze riguardano la determinazione della forza critica di trascinamento attraverso: 1° - la determinazione dei valori critici della velocità media per ciascuna profondità d'acqua, per la quale avviene una modificazione del fondo; 2° - la misurazione dell'entità del trasporto di fondo; 3° - la determinazione della pendenza idraulica per ciascuna altezza d'acqua e velocità, nonché della pendenza della linea di energia (rendendo così possibile il calcolo della forza di trascinamento).

Allo scopo della riprova sperimentale della [14] si sono scelte le esperienze condotte su grandezze di grani affatto diversi da quelle usate dall'INDRI e con miscela così formata:

0,00 a 0,01 mm.	il 88 %
0,01 » 0,05 »	» 80 %
0,05 » 0,10 »	» 17 %
0,10 » 2,00 »	» 20 %

La tabella che appresso si riporta ha richiesto da parte nostra una certa elaborazione, non trovando nei dati riportati dal MEYER-PETER, esplicitamente indicate le condizioni « critiche » del trascinamento del materiale di fondo.

La tav. 21 (Fasc. 31°, *Mitteilungen des Amtes für Wasserwirtschaft*) mostra i profili longitudinali del fondo sotto differenti altezze di acqua e velocità medie; abbiamo scelto allora le sezioni per le quali, in seguito al movimento di fondo, l'altezza relativa al medesimo non fosse mutata, cioè nelle quali il materiale solido si mantiene in equilibrio, mentre esistevano sezioni immediatamente prossime, a valle, le quali erano assoggettate a trasporto di materiale solido, ma in misura irrilevante. In altri termini abbiamo assunte queste sezioni alla stregua di quelle per le quali i corrispondenti valori della portata, velocità, pendenza, ed altezza d'acqua, si potessero ritenere molto prossimi a quelli critici.

NB. - In testa alla tabella si riporta l'equivalenza di simboli tra quelli adottati nella presente nota e quelli dell'Op. cit.

$V_0 = V_m$	$H = H_m$	i	$q_0 = V_m(H_m \cdot B)$	$p = B + 2H_m$	$r = \frac{H_m B}{B + 2H_m}$	A	$\gamma = \frac{r}{p}$
0,340	0,380	0,0001	0,2651	2,780	0,2810	0,780	0,1012
0,414	0,388	0,0002	0,3210	2,776	0,2705	0,776	0,1009
0,509	0,393	0,0026	0,4000	2,786	0,2831	0,786	0,1282
0,713	0,974	0,0012	0,3880	3,948	0,4938	1,948	0,1250
0,618	0,967	0,0038	0,1940	3,934	0,4819	1,934	0,1251
0,928	0,958	0,0048	1,7780	3,916	0,4895	1,916	0,1253

Dalla quale si ottiene un valore medio di $\gamma = 0,1176$, molto prossimo a quello che abbiamo ottenuto impiegando le analoghe esperienze di INDRI. Dopo questo ulteriore confronto sperimentale si può dunque affermare che il fattore di proporzionalità da introdurre nella [14] affinché essa esprima numericamente la vera portata critica è una costante che ha molto verosimilmente il valore:

$$\frac{1}{0,1174} = 8,5188.$$

§ 5. LEGGE DI TRASPORTO SOLIDO IN PRIMA APPROSSIMAZIONE. - Quanto si è detto sopra sembra ormai sufficiente per dare solido fondamento teorico e sperimentale della [14].

Si è già accennato alla dipendenza della V_0 da altri parametri del problema, si tratta ora di procedere all'esame di questo legame.

A tal fine si osserva che per muovere il grano di peso P , occorre vincere la forza di attrito espressa dal prodotto $f \cdot P$, essendo f il coefficiente di attrito. Questa resistenza al moto è in parte vinta dall'azione di gravità, nella misura $P \cdot \sin i$, ovvero $P \cdot i$, ed in parte dall'azione dell'acqua. Per valutare quest'ultima si ricorda che il flusso della quantità di moto entrante attraverso una superficie di controllo S_0 , interamente costituita da particelle liquide e nella quale sia contenuto un solido totalmente limitato dalla superficie S_1 (contenuta nella S_0), eguaglia la somma delle pressioni sulla superficie di controllo e delle pressioni sul solido. Allora scegliendo come superficie di controllo un parallelepipedo con due facce parallele alla direzione della corrente, due altre normali a questa e due altre che possono essere fatte coin-

cidere con il pelo liquido e con il fondo, e proiettando i vettori in giuoco nella direzione della corrente, si otterrà un'equazione con vari termini dei quali uno sarà $P \cdot i$ ed un'altro sarà:

$$\rho_a V_0^2 \cdot p \cdot r$$

esprimente il flusso di quantità di moto nella sezione a monte, intendendosi per V_0 la velocità critica media delle analoghe velocità su tutti i punti della sezione di passaggio. Ne consegue che, ai fini dimensionali, si potranno eguagliare i detti termini, curando di non omettere il fattore i , da cui ovviamente V_0 dipende; ed intendendo dunque l'equazione seguente come semplice espressione dimensionale, ma non quantitativa:

$$P \cdot i = \rho_a V_0^2 \cdot p \cdot r$$

di qui, osservando che d^3 è in media il volume del grano, ρ_s la sua massa specifica, per modo che è:

$$P = (\rho_s - \rho_a) d^3 \cdot g$$

si ricava:

$$V_0^2 = \frac{\rho_s - \rho_a}{\rho_a} i \cdot g \cdot d^3 \cdot \frac{1}{p \cdot r}$$

e tenendo conto della [14]:

$$q_0 = \rho_a (\rho_s - \rho_a) i (g \cdot d \cdot r \cdot p^{-1})^{3/4}$$

e sostituendo questa espressione di q_0 nella [12] si ha, infine:

$$[16] \quad \frac{i q^{2/3}}{d} = a + b \frac{q_s^{2/3}}{d}$$

dove per semplicità si è posto:

$$a = \rho_a (\rho_s - \rho_a)^{1/3} \frac{r g^{1/3}}{p}$$

e

$$b = \frac{1}{\beta}$$

Ovviamente queste espressioni di a e b sono a carattere esclusivamente dimensionale e non quantitativo.

Si è così ritrovata la formola adottata in via sperimentale dagli autori MEYER, FAVRE, EINSTEIN, solo attraverso un esame dimensionale del problema e nello stesso tempo si è messa in evidenza la dipendenza dei coefficienti a e b , che in quella figurano, dai vari parametri del problema, come si era preannunciato.

Oltre al significativo confronto tra la [16] e la [3] si possono riscontrare altre concordanze, assai notevoli.

Dalla [16], tenuta presente l'espressione di $R = \frac{q_s}{q}$, si ricava:

$$q = i^2 \left(\frac{\rho_a (\rho_s - \rho_a)^{1/3}}{\beta i - R^{2/3}} g r d \frac{\beta}{p} \right)^{3/2}$$

nella quale il denominatore deve soddisfare alla condizione [13].

Si ha poi, tenendo conto della [5]:

$$[17] \quad U = \frac{i^2}{\rho_a} \left\{ \rho_a (\rho_s - \rho_a) r g \left(\frac{\beta d}{p (\beta i - R^{2/3})} \right)^3 \right\}^{1/2}$$

Dunque U risulta proporzionale ad $r^{1/2}$ come richiedono le formole di CHEZY e KENNEDY, inoltre per R piccolo rispetto al prodotto $(\beta \cdot i)^{3/2}$, cioè in prossimità del caso limite $R = 0$, si ha anche U proporzionale ad $i^{1/2}$ d'accordo con la stessa formola di CHEZY.

Sostituendo infine la espressione della velocità secondo la formola di CHEZY:

$$U = C (r \cdot i)^{1/2}$$

nella [17] e ricavandone il rapporto:

$$[18] \quad \frac{R^{2/3}}{\beta i} = 1 - \frac{d}{p} \left(\frac{\rho_a (\rho_s - \rho_a) g}{(C \cdot \rho_a)^2} \right)^{1/3}$$

Dall'esame di questa relazione è possibile enunciare i risultati già ottenuti dal CONTI e riguardanti « i corsi d'acqua dritti, a regime uniforme, con trasporto di materiale solido omogeneo di unica granu-

lazione, più pesante dell'acqua stessa e con alveo almeno parzialmente formato di tale materiale»: e cioè:

La pendenza i , a parità degli altri termini, è rispettivamente tanto più grande quanto più grandi sono R e d : quindi tanto minore è la portata d'acqua q (tenuto fermo q_s che figura al numeratore di R).

Il CONTRI aggiunge poi che i e p crescono insieme: orbene questo risultato può solo apparentemente essere contraddetto dalla [18]: piuttosto esso conferma il ragionamento che si è fatto nell'ipotesi già avanzata che anche β abbia a dipendere da p .

Dalla [18] poi si ottiene la dimensione dei grani, facendovi $R=0$, che si trovano in condizioni di equilibrio con la corrente:

$$[19] \quad d = \left(\frac{C^2 \rho_a}{(\rho_s - \rho_a)g} \right)^{1/3}$$

salvo, ben inteso un coefficiente adimensionale, a norma della osservazione fatta circa a e b a proposito della [16].

Inoltre vogliamo qui rilevare come la [16] ha i termini che conservano carattere invariantivo rispetto alla similitudine di FROUDE che così bene si presta ad esperienze idrauliche in scala; la stessa invarianza si ha nei riguardi della similitudine di REYNOLDS (a parità di sostanze in giuoco, $\rho_s = \text{cost.}$) previa moltiplicazione dei termini della [16] per d .

§ 6. FORMOLA DELLA PORTATA SOLIDA IN SECONDA APPROSSIMAZIONE. — Si è visto come l'aver considerato nullo il parametro α nella [9] abbia portato alla determinazione della legge di trasporto enunciata dalla [16], ora vogliamo invece considerare l'equazione [9] nella sua forma completa.

Dapprima rileviamo come l'aver supposto nullo α porta alla incongruenza che consiste nella impossibilità di rilevare una certa portata solida laddove questa non preesista ($dq_s = 0$ per $q_s = 0$). Perciò lo studio della seconda approssimazione si richiede specie se si vuol procedere allo studio delle portate vicine a quella per la quale si ha l'inizio del movimento del materiale solido.

Per semplicità di simboli si ponga:

$$A = i \cdot \alpha ; \quad B = i \cdot \beta ; \quad x = q ; \quad y = q_s ,$$

per modo che la [9] si potrà scrivere:

$$\frac{dy}{dx} = A + B \left(\frac{y}{x} \right)^{1/3}$$

che è il tipo delle equazioni omogenee. Posto $y = xZ^3$, si ottiene:

$$[20] \quad \frac{1}{3} \log x = \text{cost} + \int \frac{Z^3}{A + BZ + Z^3} dZ$$

dove la funzione integranda è una funzione razionale, la cui integrazione porta alla

$$[21] \quad \frac{1}{3} \log x \Big|_{x_0}^{\infty} = -\frac{Z_1}{2} \int_0^Z \left\{ \frac{1}{(Z - Z_1)(Z_1 - Z_3)} + \frac{1}{(Z + Z_1)(Z_1 + Z_3)} \right\} dZ$$

nella quale Z_1 e Z_3 sono radici della equazione

$$Z^3 - BZ - A = 0$$

ottenuta annullando il denominatore della funzione integranda, ed hanno il valore, rispettivamente:

$$Z_1 = B^{1/3} + \left(\frac{A}{2B} \right)$$

$$Z_3 = -\frac{A}{B}$$

la radice V_0 risulta eguale in valore assoluto alla Z_1 ma di segno contrario. Eseguendo infine l'integrazione a secondo membro della [21] e operando le sostituzioni di simboli in precedenza indicati si giunge alla seguente espressione:

$$[22] \quad \left(\frac{q}{q_0} \right)^{2/3} = \left[1 - \frac{R^{1/3}}{Z_1} \right]^{-Z_1/(Z_1 - Z_3)} \cdot \left(1 + \frac{R^{1/3}}{Z_1} \right)^{-Z_1/(Z_1 + Z_3)}$$

che verrà denominata come legge di trasporto solido in seconda approssimazione. Per un confronto a carattere numerico della legge di trasporto solido da noi determinata (formole [12] e [16] in prima approssimazione e [22] in seconda approssimazione) desumiamo dal dia-

gramma sperimentale di BITTERICH il valore della portata critica determinato nelle sue esperienze:

$$q_0 = 3,2 \text{ litri/sec}$$

e prendiamo nella [12]:

$$\beta i = \frac{1}{0,231}$$

si ottiene dunque:

$$[23] \quad q^{2/3} = 2,171 + 0,231 q_i^{2/3}$$

che dovrebbe rappresentare il fenomeno del trasporto solido che il BITTERICH ha esaminato con le sue esperienze.

La coincidenza della linea rappresentata dalla [23] con il diagramma indicato, è assicurata per un buon tratto di esso, notevoli divergenze si hanno nell'intervallo di portate liquide per le quali il BITTERICH medesimo ha però osservato il passaggio in sospensione del materiale solido prima muoventesi sul fondo. Perciò l'applicazione della [16], e, quando si conosca la portata critica, della [12], non ha significato quando si tratta del movimento del materiale solido in sospensione. Inoltre l'approssimazione che si ottiene con l'impiego della legge di prima approssimazione è tale che può evitarsi il laborioso calcolo indicato dalla [22].

BIBLIOGRAFIA DEGLI AUTORI CITATI

F. ARREDI, *Sul trasporto solido delle correnti liquide*. « Annali LL. PP. », fasc. 2°, 1935.

L. CONTI, *Trasporto solido nei corsi d'acqua*. « Annali LL. PP. », fasc. 4°, 1930, fasc. 11°, 1931, fasc. 7°, 1932.

INDRI, *Nuove ricerche sulla forza di trascinamento*. « Energia Elettrica », 1936.

E. MEYER PETER, H. FAVRE, A. EINSTEIN, *Neuere Versuchsergebnisse über den Geschiebetrieb*. « Schweizerische Bauzeitung », Bd 103, n. 13, Marzo 1934, Zurigo.

E. MEYER PETER, H. FAVRE, R. MÜLLER, *Beitrag zur Berechnung der Geschiebeführung und der Normalprofilbreite von Gebirg flüssen*. « Schweizerische Bauzeitung », Bd 105, n. 9 e 10, marzo 1935, Zurigo.

A. SCHOKLITSCH, *Geschiebebewegung in flüssen und in stauwerken*. 1926.

SCHIELDS, *Anwendung Ähnlichkeitsmechanik und der turbulenz-forschung auf die Geschiebebewegung*. Mitteilungen der Preussischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau. Berlin.

S. SHULITS, W. E. CORFITZEN, *Bed load transportation and the stable channel problem*. « American Geophysical Union », 1937, pag. 456 e segg.

H. WITTMANN, *Geschiebetrieb und flussregelung*. « Deutsche Wasser-Wirtschaft », Jahrgang 37 Heft 6, 1942.

MITTEILUNGEN DES AMTES FÜR WASSERWIRTSCHAFT, *Wasserführung, Sinkstoffführung und schlammablagerung des Alten Rheins*. Bern, 1932.

ECOLOGIA VEGETALE (*)

ANALISI POLLINICA DELL'ATMOSFERA DI TRENTO E DELL'ORTO BOTANICO DI PADOVA

F. FERRARI

SYMMARIUM. — Examinauit Auctor quatenus sit pollinis quantitas in aere, in Patavino horto botanicae provehendae, et in regione circa Tridentum in valle Atesina; huius pollinis originem statuit eiusque copiae mutationes per annum. Concludit Auctor pollinis dispersionem a ventorum vi maxime pendere, non tamen in amplum porrigi spatium.

La patologia umana ha recentemente riconosciuto come una quantità di disturbi, dapprima diversamente interpretati, possano essere dovuti a fenomeni anafilattici per l'azione del polline sull'organismo sensibilizzato per una o alcune specie polliniche.

Alcune piante, specialmente graminacee, si sono mostrate attive sotto questo punto di vista, ma numerose sono altre specie che possono, in determinate condizioni, agire in modo notevole.

È così sorta la necessità dell'identificazione delle specie di pollini attivi sotto questo punto di vista, onde studiare la possibilità di profilassi, evitando che l'ammalato abbia a esporsi all'inalazione di pollini, nonchè per raggiungere, mediante la tecnica della terapia umorale, una possibile desensibilizzazione dell'organismo ammalato.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Gola nella riunione privata del 13 gennaio 1947.

I botanici non si sono ancora gran che occupati dell'argomento, molto più i medici, i quali hanno indicato un grandissimo numero di specie come attive nei riguardi sopracennati.

Ma scorrendo tali elenchi sorge spesso il dubbio se la specie indicata dal medico sia realmente responsabile dello shock anafilattico. Alcune specie indicate come sicuramente o frequentemente patogene appaiono ai botanici così poco provviste di capacità di dispersione anemofila da far dubitare dell'esattezza del reperto. Sorge quindi il problema dell'opportunità di analizzare dal punto di vista botanico i pollini che si trovano in condizione da determinare il malanno. Già da molti anni, prima ancora che sorgesse l'analisi pollinica, si era diffuso l'esame del plancton dell'aria col quale era documentata la presenza di essa in molti granuli di polline, del resto poco interessanti allora, quando si dava maggior importanza alla quantità di sostanze minerali, batteri, ecc. ivi presenti.

Dal punto di vista botanico il lavoro più recente del quale sia venuta a conoscenza è quello sull'analisi dell'aria nell'Orto Botanico di Kaunas; di questo la conoscenza mi è venuta quando avevo pressochè terminato queste ricerche, le quali del resto collimano per i risultati.

Altri lavori non mi risulta siano stati fatti in Italia sull'argomento. Con il presente lavoro, eseguito nell'Istituto Botanico di Padova, mi sono proposta il compito d'indagare:

a) quanto frequente sia il polline nell'aria di una data località; b) come vari nel corso dell'annata; c) quanto vasta sia l'area che può fornire granuli di polline alla località nella quale si pratica la cattura del polline; d) quale rapporto vi sia tra i granuli di polline catturati e la quantità di specie in fiore nelle vicinanze.

A tale scopo ho studiato due ambienti: l'uno, l'Orto Botanico di Padova, l'altro le vicinanze di Trento sopra un rilievo di cento metri sul fondovalle, alle falde del Calisio.

La tecnica consisteva nell'esporre all'aria una lastra di vetro, sempre delle medesime dimensioni, per un periodo uguale di tempo, dopo aver spalmato la superficie con una soluzione di glicerina, acido pirico e formolo in diluizione sufficiente perchè non si verificassero fatti d'igroscopicità tali da provocare, anche nei casi di più intensa umidità dell'aria, il gocciolio dalla superficie del vetro.

La lastra, dopo essere stata esposta in luogo aperto, veniva lavata con lo stesso liquido assai più diluito. Il liquido raccolto era filtrato su un piccolissimo filtro di cotone ed il cotone, imbevuto di tutto il tritume raccolto sul vetro, veniva spappolato in 1 cc. di acqua glicerinata, la quale serviva per allestire i preparati in osservazione.

Di rado apparve necessaria la colorazione dei granuli di polline; l'analisi del preparato consistette quindi nel conteggio dei granuli di polline in un notevole numero di campi d'osservazione e nella loro determinazione di famiglia e specifica, finchè fu possibile.

Le osservazioni furono condotte tanto a Trento che a Padova per un ciclo annuale circa. I risultati sono nelle tabelle allegate.

*Reperti di analisi polliniche
dell'atmosfera dell'Orto Botanico di Padova nel 1943.*

	F.	M.			A.			M.		G.		L.			A.			S.
	26	6	10	30	6	13	23	5	23	5	14	1	15	25	1	15	25	2
Taxus . . .	8	4	26	7	8	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Cephalotaxus .	—	—	—	12	—	—	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Pinus . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	18	21	1	—	—	—	—	—	—	—
Abies . . .	—	—	—	—	—	1	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Cupressus . .	5	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Juniperus . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	6	1	—	6	—	1	1	—
Gingko . . .	—	—	—	—	—	85	188	20	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—
Pontederia . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—
Graminaceae .	—	1	1	—	—	2	6	81	57	26	15	32	9	8	4	26	10	1
Scirpus . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	8	1	—	—	—	—	—
Allium . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	—	1	—
Hemerocallis .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—
Thypha . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	—	—	—	—	—	—	—	—
Trachycarpus .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8	9	4	1	1	1	6	2	—
Juglans . . .	—	—	—	—	—	1	6	2	—	—	—	2	—	—	—	1	2	—
Salix . . .	—	—	—	—	—	5	—	2	—	—	—	1	—	2	—	—	—	—
Populus . . .	—	—	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Alnus . . .	6	30	1	3	—	2	—	—	9	1	2	—	—	—	—	—	—	—
Corylus . . .	3	48	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Betula . . .	—	—	—	6	4	7	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Carpinus . . .	—	—	—	12	5	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Ostrya . . .	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Quercus . . .	—	—	—	—	1	1	4	11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Platanus . . .	—	—	—	—	—	11	6	39	—	—	2	1	—	—	—	4	3	1
Ulmus . . .	3	34	4	1	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Celtis . . .	—	—	—	—	2	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Morus . . .	—	—	—	—	—	1	7	12	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—
Cannabis . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—	1	—	3	—
Urtica . . .	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	5	2	—	4	13	3	5	1
Parietaria . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	16	7	2	18	8	12	8
Bohemeria . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
Hippophae . .	—	—	—	—	—	1	1	2	—	—	—	1	1	6	—	—	—	—
Laurus . . .	—	—	—	—	—	5	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—
Magnolia . . .	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	3	1	1	—	—	—	—
Rumex . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15	5	3	33	18	2	—

Segue

*Reperti di analisi polliniche
dell'atmosfera dell'Orto Botanico di Padova nel 1943.*

	F.	M.			A.			M.		G.		L.			A.			S.
	26	6	16	30	6	13	23	5	23	5	14	1	15	25	1	15	35	2
Beta	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	6	2	5	—	—	—	—	—
Indet	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	3	—	—	—	—	—	—
Mesembryant.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—
Amaranthus .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—	—	—	—	—
Saponaria . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—
Stellaria . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—
Anemone . . .	—	—	1	1	—	—	—	1	—	—	—	5	—	—	4	—	—	—
Clematis . . .	—	—	—	1	—	—	—	—	1	2	—	2	—	1	—	—	1	—
Thalictrum . .	—	—	1	—	—	—	—	—	5	—	4	8	8	1	1	2	6	—
Ranunculus . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Berberis . . .	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Epimedium . .	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Papaver . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1	—	—	1	—	—	—
Arabis	1	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Berteroa . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	1	—	—	—	—
Brassica . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	3	—	—	—	—	1	—	—
Sempervivum.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—
Sedum	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
Saxifraga . .	—	—	—	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—	2	—	—
Ribes	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Spiraea	—	—	—	1	1	29	4	—	—	1	4	24	6	3	12	15	23	2
Potentilla . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
Filipendula . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	3	—	—	—	—	1	—	—
Pirus	—	—	—	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Prunus	—	—	—	2	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Cerasus . . .	—	—	—	—	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Exochorda . .	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Amygdalus . .	—	—	—	—	—	2	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Rubus	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9	—	4	2	3	1	3	—	—
Geum	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
Indet. . . .	—	—	—	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Acacia	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—
Ononis	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	—	—	—	2	—	—
Trifolium . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1	—	—

Segue

*Reperti di analisi polliniche
dell'atmosfera dell'Orto Botanico di Padova nel 1943.*

	F.				M.				A.				M.				G.				L.				A.				S.
	28	6	16	30	6	18	23	5	23	5	14	1	15	25	1	15	25	2											
Bellis . . .	—	—	—	—	—	1	—	2	—	—	—	—	—	1	—	1	—	—											
Artemisia . .	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	4	1	—	—	2	2	—	—											
Leontodon . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	2	—	—	1	—	—											
Achillaea . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—											
Centaurea . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—											
Anthemis . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—											
Indeterm. . .	—	3	7	3	1	—	1	3	—	5	2	6	6	1	8	1	—	1											

*Reperti di analisi polliniche
nell'atmosfera di Trento nel 1943*

	F.			A.			M.		G.		L.			A.			
	1	12	23	9	—	30	—	30	6	18	12	21	24	1	11	22	30
Taxus . . .	38	7	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Cephalotaxus .	—	—	—	121	—	3	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Pinus . . .	—	—	—	1	—	148	—	2	—	2	—	—	—	—	—	—	—
Abies . . .	—	—	—	2	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Cupressus . .	—	1	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Thuja . . .	23	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Ginkgo . . .	—	—	—	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Graminaceae .	2	1	—	1	—	10	—	11	8	9	61	9	7	44	9	6	6
Scirpus . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—
Trachycarpus .	—	—	—	—	—	—	—	6	1	—	—	—	—	—	—	—	—
Allium . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—	—	—	—	—
Populus . . .	—	—	3	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Juglans . . .	—	—	—	125	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Ostrya . . .	—	—	—	17	—	3	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Alnus . . .	4	4	3	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Corylus . . .	14	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Quercus . . .	—	—	—	10	—	4	—	4	2	—	—	—	—	—	—	—	—

Segue

*Reperti di analisi polliniche
nell'atmosfera di Trento nel 1943.*

	M.			A.			M.		G.		L.			A.			
	1	12	23	9	19	30	—	30	6	18	12	21	24	1	11	22	30
Platanus . . .	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Ulmus . . .	3	4	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Morus . . .	—	—	—	8	—	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Humulus . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1	—	—	17	20	3	3
Urtica . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	5	—	—	—	—	7	9	6	2
Parietaria . .	—	—	—	3	—	2	—	19	11	6	5	—	—	—	—	—	—
Laurus . . .	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Chenopodium .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6	—	4	2
Amaranthus .	—	—	—	—	—	—	—	—	1	5	6	3	—	5	7	—	10
Silene . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	—	—	—
Cerastium . .	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Anemone . . .	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Clematis . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	4	—	—	—	—	—	—	—	—
Thalictrum .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
Berberis . . .	—	—	—	—	4	4	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—
Roripa . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	2	—	—	—	1	—	—
Sisymbrium .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—
Arabis . . .	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Sedum . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	1	3	1	1	—	3	1	—	—
Spiraea . . .	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—
Prunus . . .	—	—	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Pirus . . .	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Indeter . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—
Trifolium . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—
Phaseolus . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
Ailanthus . .	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	2	—	—	—	—	—	—
Mercurialis .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—
Acer . . .	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Aesculus . .	—	—	—	—	—	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Vitis . . .	—	—	—	—	—	—	—	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Tilia . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	10	—	1	—	—	—	—	—	—
Hypericum . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8	1	2	2	—	1	—
Conium . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—
Aegopodium .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	4	—	—	—	—

Segue

*Reperti di analisi polliniche
nell'atmosfera di Trento nel 1943*

	M.			A.			M.		G.		L.			A.			
	1	12	23	—	9	30	—	30	6	18	12	21	24	1	11	22	30
Syringa . .	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Ligustrum .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	1	—	—	—	—
Fraxinus . .	—	—	—	—	4	50	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Plantago . .	—	—	—	—	—	—	—	2	6	8	35	6	4	36	8	3	1
Sambucus . .	—	—	—	—	11	13	—	3	—	1	—	—	—	—	—	—	—
Galium . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
Tussilago . .	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Artemisia . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—
Cirsium . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—
Centaurea . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—
Indeterminate	2	3	—	—	2	2	—	—	1	2	2	1	1	1	1	2	5

È da notare che i dati delle due tabelle non sono fra loro confrontabili a causa delle diverse dimensioni della lastra che serviva per le raccolte. La lastra esposta a Padova era infatti di cm² 950 mentre quella usata a Trento aveva una superficie di cm² 234 quindi la quarta parte circa.

Ma ho anche studiato tale andamento sulla base di dati corretti in modo da rendere perfettamente confrontabili i risultati delle due località; è su tali basi che esamino i valori trovati: risultano chiari due elementi:

1) il livello della frequenza è notevolmente più elevato a Trento che non a Padova;

2) l'ampiezza considerevole delle oscillazioni della frequenza nelle raccolte di Trento si contrappone a quella relativamente modesta riscontrata a Padova.

Sono diverse le condizioni topografiche dei due luoghi. Trento, in fondo alla Valle dell'Adige, è direttamente esposta alle correnti atmosferiche vallive, costanti nella presenza, varie nell'intensità e nella direzione, e favorevole alla dispersione di polline; a Padova tale fattore manca e l'atmosfera si presenta meno mossa. Anzi nell'Orto Botanico, dove si può facilmente conoscere l'ubicazione di non pochi individui

polliniferi, si può constatare come la dispersione dei pollini non si spinga affatto lontana e solo nei casi di forti venti alcuni granuli, e specialmente quelli delle conifere, possono arrivare lontano.

Frequenza di granuli pollinici più elevata troviamo dunque a Trento, sebbene la flora vi sia molto meno ricca di specie che non l'Orto Botanico (il che dimostra l'importanza della costante ventilazione dell'ambiente); inoltre brusche oscillazioni della frequenza stessa, che rispecchiano la variabile intensità dei venti, ecco le caratteristiche essenziali dei due ambienti studiati.

Per Trento ho anche tentato di studiare l'influenza della direzione del vento sulle qualità e quantità del polline catturato; i dati ottenuti sono però insufficienti, quindi non riferisco su tale ricerca.

L'esposizione della lastra è stata iniziata a gennaio tanto a Padova quanto a Trento e le prove sono risultate negative fino al 26 febbraio, rispettivamente al 1° marzo, date che segnano la comparsa delle prime specie di polline. In seguito le raccolte andarono arricchendosi e la frequenza aumentando fino a raggiungere i suoi massimi a maggio.

A Trento la frequenza registra il massimo assoluto in detto mese; un'altra ascesa del livello della stessa, ma più modesta, si nota in luglio, seguita da un terzo incremento ai primi d'agosto. In seguito i valori scendono definitivamente.

A Padova il massimo di frequenza che troviamo a maggio non è assoluto, perchè quello di luglio raggiunge lo stesso livello; poi si rileva una ripresa di minore entità in agosto, cui segue il declino.

Una particolare difficoltà nell'interpretazione della loro origine ha presentato la presenza nella raccolta di Padova del 16 marzo di due granuli di *Tilia* e di una Ombrellifera non meglio identificata.

Poichè il Tiglio fiorisce normalmente a giugno o, in condizioni particolarmente favorevoli, a maggio, e le Ombrellifere a stagione ancora più avanzata, occorre, per spiegare tale presenza, considerare la possibilità che detti granuli siano resti della fioritura dell'anno precedente.

Che tale possibilità esista effettivamente lo dimostra il ritrovamento quasi contemporaneo, intorno ad un individuo di *Quercus Ilex*, di varie infiorescenze della passata fioritura, l'esame delle quali ha rivelato, oltre alla presenza dei granuli della stessa specie, anche di polline di varie altre piante, fra cui appunto Ombrellifere.

Si può quindi fare l'ipotesi, che vale anche per il Tiglio, sebbene polline di detto genere non sia stato ivi riscontrato, che tali granuli

si siano staccati da questi organi caduti, dove si erano conservati intatti fino allora. Riguardo alla distanza da cui può giungere il polline debbo notare che non ho mai riconosciuto nelle mie raccolte a Trento alcuna specie alpina; questo fatto, unito all'osservazione che le specie di pollini trovate corrispondono quasi sempre a piante in fiore nei dintorni, fa pensare che la zona che fornisce il polline non sia molto ampia, nonostante le favorevoli condizioni per il trasporto dello stesso a notevoli distanze.

Questo per quanto riguarda Trento; a Padova la dispersione del polline è ancora più limitata e la zona da cui proviene il polline è circoscritta quasi all'Orto Botanico e alle sue immediate vicinanze.

Ho preso anche in considerazione i rapporti fra i generi di polline trovati e le piante in fiore a Trento, rispettivamente all'Orto Botanico; ne è risultato:

1) solo poco più della metà delle famiglie componenti la flora dei due luoghi compaiono nelle raccolte.

2) Nell'ambito di tali famiglie la quantità dei generi rappresentati è assai variabile, come si può mettere in evidenza confrontando le fioriture mensili e i risultati delle raccolte; spesso famiglie assai ricche di generi e specie in fiore sono presenti con un limitatissimo numero di esemplari: tale è il caso ad esempio delle Composite, che a Trento, in agosto, figurano con 28 specie in fiore, e di queste solo 4, con 17 granuli, sono state rinvenute nei preparati.

3) Dei pollini catturati l'87,8% a Trento e il 74,6% a Padova appartiene a piante decisamente anemofile; le proporzioni percentuali fra le diverse famiglie sono le seguenti:

TRENTO		PADOVA	
Coniferae	27,9%	Coniferae	7,0%
Graminaceae	13,9%	Gingkoaceae	10,5%
Juglandaceae	9,5%	Graminaceae	15,2%
Betulaceae	8,6%	Betulaceae	8,0%
Urticaceae	12,0%	Fagaceae	1,0%
Fagaceae	1,5%	Platanaceae	3,6%
Amarantaceae	2,8%	Ulmaceae	2,8%
Plantaginaceae	8,2%	Urticaceae	7,3%
altre famiglie n. 13.	8,7%	Polygonaceae	5,9%
		Plantaginaceae	2,6%
		altre 16 famiglie.	10,7%

4) il resto è costituito da piante considerate entomofile: il numero delle famiglie rappresentate è 20, rispettivamente 26.

Fra queste sono ancora da distinguere alcune famiglie per il numero dei granuli relativamente abbondante rispetto a quello delle altre entomofile.

Per esempio a Padova le Tiliaceae e le Rosaceae (in particolare le *Spireae*, fra le Rosaceae, sono le più numerose nelle raccolte), costituiscono più della metà di tutti i pollini dello entomofile.

Tale abbondanza si può spiegare considerando che se in queste piante l'impollinazione avviene ordinariamente per mezzo degli insetti, tuttavia il numero notevole dei fiori e degli stami, la morfologia del fiore stesso, e, nel caso della *Spirea*, pure le dimensioni del granulo pollinico (micron 15 circa), sono fattori tali da giustificare la presenza di un certo numero di granuli nell'atmosfera.

5) Le piante tipicamente entomofile poi, come le Labiatae, Solanaceae, Scrophulariaceae, ecc. sono totalmente assenti (es. Labiatae), o sono in proporzioni tali da potersi considerare la loro presenza come accidentale.

Si può quindi concludere che di regola il polline di dette famiglie non si trova nell'atmosfera.

SAGGIO DI SISTEMATICA DELLE CRISOSTOMACEE^(*)

DEPOSITO QUATERNARIO DI CRISOSTOMACEE IN ROMA

NOTA PREVENTIVA

(Con una tavola)

D. VITO ZANON S. O.

Deus scientiarum dominus est.

SVMMARIVM. — Dantur notitiae breves praeventivae de quodam depositu *Chrysostomacearum* Romae invento, simulque offertur tentamen systematis earum classificationis in nova genera et novas species quarum nonnullae describuntur. Inter eas tres sunt viventes exoticae. Insuper describuntur duo novae species *Archaeomonadacearum* in depositu tripolaceo Fuuriensi inventae.

Nell'attesa paziente che si attenuino le attuali difficoltà per la stampa di un più poderoso contributo, penso di poter dare ora un cenno preventivo su di un singolare deposito di Crisostomacee che mi ha dato numerose specie nuove già da me determinate e figurate, pronte per presentarsi agli studiosi della materia.

Il deposito e la sua località oltre la sua giacitura geologica, in vicinanza dell'Abazia delle Tre Fontane a S. Paolo, a sud di Roma, è stato illustrato dal Chiar.^{mo} Prof. CARMELO MAXIA di questa Università, che me lo segnalò⁽¹⁾ or sono tre anni. Esso fa parte di una

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Gola il 21 marzo 1947.

(1) MAXIA C., *Contributo alla geologia della regione delle Tre Fontane (Roma)*, «Boll. Ufficio Geologico d'Italia», anno 1943, vol. LXVIII, Parte I, Geologia, Nota V, Roma, 1945.

serie di rocce di origine elastica, deiezioni del vicino Tevere, dell'Epoca Quaternaria.

È la prima volta, credo, che un deposito così ricco di questi microorganismi venga segnalato nel mondo.

Dico deposito di Crisostomacee non nel senso che esso sia formato esclusivamente di queste, che anzi nel materiale studiato prevalgono le Diatomee, e bisognò esaminarne molto per trovare le numerose forme delle prime.

Il che anche dimostra come, sia le une che le altre, sono state trasportate dalla corrente del Tevere, avulse da altri depositi o da ambienti diversi in cui esse vivevano; giacchè ordinariamente in acque continentali ricche di Diatomee scarseggiano le Crisostomacee e viceversa in ambienti adatti allo sviluppo di queste sono più rare le prime.

Nell'Argentina il FRENGUELLI ha rinvenuto 34 specie in un sedimento pliocenico nella provincia di Mendoza ⁽¹⁾.

Gli altri contributi di diversi Autori di diverse parti del mondo sono sempre di poche entità, sebbene tutti interessantissimi.

In questo materiale romano potei finora individuare 595 specie di cui pochissime già conosciute.

Le Crisostomacee sono Flagellati vegetali, unicellulari, a guscio siliceo, viventi in acque dolci, ferme, ricche di ferro e di ceneri vulcaniche.

Numerose sono le specie attualmente viventi, ma più numerose son quelle che si incontrano nell'esame microscopico dei tripoli e farine fossili, quaternari, terziari ed anche più antichi, di origine continentale. Finora pochissime sono le specie rinvenute nei sedimenti marini, per le quali il DEFLANDRE ⁽²⁾ ha stabilito un gruppo a sè, chiamandole *Archaeomonadaceae*.

In presenza dunque di così cospicuo numero di specie nuove per la scienza, mi sono trovato nella necessità di stabilire tanti nomi nuovi non solo di specie ma anche di generi e di raggruppare questi in due Classi distinte per caratteri ben definiti.

⁽¹⁾ FRENGUELLI G., *Trachelomonadi del Pliocene Argentino*, « Mem. della Soc. Geolog. Ital. », vol. I, Roma, 1933.

⁽²⁾ DEFLANDRE G., *Note sur les Archaeomonadacées*, « Bull. Soc. Bot. Franc. », Tome 79, Paris, 1932.

Poichè ancor oggi, dal 1845, epoca in cui l'EHRENBERG rinveniva questi microorganismi fossili nei tripoli, considerandoli come *animalu-coli*, poco si conosce sul loro sviluppo biologico, e sembra che durante questo sviluppo anche il guscio assuma diversi cambiamenti, specialmente per quanto riguarda la ornamentazione intorno al poro orale, donde esce il *flagellum*, in modo che alcune forme possano identificarsi con altre appartenenti ad altri gruppi di Flagellati; così gli Autori sono d'accordo che, pel momento, cioè fintantochè non si conosca la biologia di ciascuna od almeno delle principali entità, si possa limitarsi alla descrizione delle singole forme che si rinvencono fossili o viventi, come specie a sè, evitando anche di formare della varietà, che c'è pericolo appartengano ad una specie di altro gruppo, e scansare così per l'avvenire una ingombrante sinonimia.

Questo per giustificare la moltitudine di nuovi nomi da me istituiti.

Alcuni Autori hanno osservato che in differenti stadi di accrescimento alcune Crisostomacee possono essere munite di un altro strato di silice sovrapposto alla parte silicea del guscio. Questo secondo strato è meno rifrangente al microscopio, più ialino, può variare, anche nell'ambito della specie, di spessore e di sviluppo attorno al primo strato; e pensano che quindi questa cosiddetta *silice secondaria* abbia poca importanza nell'esame di diversi individui della stessa specie.

Altri però, come l'ANDRIEUX ⁽¹⁾ affermano che la sua importanza non è trascurabile specialmente nelle forme ornamentate, poichè queste ornamentazioni sono proprio da esso costituite.

In base a queste osservazioni ed anche a quanto s'è detto sopra, che conviene descrivere per ora come entità a sè tutte le forme che si incontrano, specialmente se fossili, ho ideato la mia classificazione, dividendoli in due grandi Classi: la prima comprende le forme ad una sola membrana, la seconda comprende le forme con due o più membrane.

Ne verrà di conseguenza, che un giorno, volendo fare una revisione delle Crisostomacee, se si vorrà tener conto di questo mio concetto, converrà passare alcune specie già conosciute da un genere vecchio ad un genere nuovo.

⁽¹⁾ ANDRIEUX B., *Note sur Chrysostomacées d'une tourbe de l'Île de Kerguelen*, «Bull. Soc. Franc. de Microscopie», vol. V, fasc. II, Paris, 1936.

La stessa divisione in due classi si potrà anche applicare alle *Archaeomonadacee* di DEFLANDRE, poichè anche fra di esse si osservano forme con una sola membrana e forme con due membrane.

Perciò in Appendice (poichè non fanno parte del materiale di Roma) descrivo due specie nuove rinvenute in un tripoli di Leskoos (Fuur), livello geologico appartenente all'Eocene superiore, favoritomi anni addietro dal compianto Sig. GENEVIÈRE DI MONTBÉLIARD.

Ed anzitutto fissiamo la

TERMINOLOGIA

<i>Lorica</i>	= guscio.
<i>Membrana</i>	= parete esterna del guscio.
<i>Integra</i>	= membrana a margini non lobati o intaccati.
<i>Aculeus</i>	= prominenza non ramificata, puntuta.
<i>Dens</i>	= intacco o sporgenza piccola acuta del margine.
<i>Unguis</i>	= processo corto largo alla base più o meno adunco.
<i>Stomatocercus</i> (Andrieux)	= appendice tendente a passare al di sopra del poro.
<i>Prymnesium</i> (Andrieux)	= bitta: prominenza somigliante a quel grosso montante fisso sulla tolda della nave, a testa piatta, più allungata da un lato che serve ad ormeggiarla avvolgendovi la gomema.
<i>Tuberculum</i>	= prominenza poco elevata, ottusa.
<i>Transtillum</i>	= regolo.
<i>Paxillus</i>	= regoletto più breve.
<i>Fasciola</i>	= piccola fascia: <i>simplex</i> se costituita da una semplice linea.
<i>Porus</i>	= orificio del guscio donde esce il <i>flagellum</i> nell'individuo vivente.
<i>Collum</i>	= collo = (è il prolungamento del margine dell'orificio del poro: esso può emanare dalla parete di silice primaria del guscio (come p. e. in <i>Carnegia vermiculata</i> Freng.) oppure essere costituito da silice secondaria (come p. e. in <i>Clericia scabra</i> Andrieux).
<i>Torques</i>	= collare. È un accessorio esterno, più o meno concentrico al poro, proveniente sia da un ispessimento di silice secondaria, sia dalla parete stessa del guscio. Vi sono dunque due sorta di collari: 1° Collare ordinario costituito da silice ordinaria (p. e. in <i>Carnegia Frenguelli</i> (Cler.) Defl.); 2° Collare emanante dalla parete del guscio (vedi il gen. <i>Outesia</i>), la cosiddetta <i>gorgera</i> del Frenguelli.

SISTEMATICA

Sectio I. - MONYMENIDAE (mihi)

Lorica unica membrana confecta.

1. Lorica unico vel pluribus stomatocersis, scilicet membranis aliformibus siliceis, supra porum progredi nitentibus, interdum mere ligulis, plus minusve numerosis, semper supra porum positis, praedita *Carnegia*
(Pantocseck 1912)
2. Lorica sine talibus ornamentis 3
3. Lorica levis vel ornata, collare ad porum concentrico, ex eadem loricae membrana emanante, praedita *Autesia* (p. p.)
(Frenguelli 1925)
4. Lorica sine collari duplici, omnino levis, poro sine collo, vel collo cylindrico, humili, praedita *Chrysostomum*
(Chodat 1921)
5. Lorica sine collari duplici, plerumque sphaerica, processibus paucis, plerumque longis, interdum bifurcatis, praedita *Chrysastrella*
(Chodat 1921)
6. Lorica sine collari duplici et sine istis processibus, diversis formis, diverse ornatis, interdum levis, poro sine collo, vel praesente, praedita *Clericia*
(Frenguelli 1925)
7. Lorica sphaerica vel piriformis, levis vel leniter sculpta, collo longo, stricto, erecto vel incurvo, praedita *Feflandreia* (p. p.)
(Frenguelli 1938)
8. Lorica sphaerica, sculpta, collo cylindrico, lato, erecto, pro ratione loricae admodum ingenti, praedita *Trachelostomum*
(Frenguelli 1889)

Sectio II. - POLYMENIDAE (mihi)

Lorica duabus vel pluribus membranis confecta.

I. - *Lorica plerumque symmetrica*

1. Lorica sphaerica vel subsphaerica, levis, cum poro sine collo vel humili, cylindrico, aut trunco-conico *Parachrysostomum*
(gen. novum)
2. Lorica sphaerica, levis vel nonnullis parvis dentibus exterius munita, vel paucis tuberculis ornata, sectione pori trunco-conica vel duplici *Paraclericia*
(gen. n.)
3. Lorica plus-minusve ornamentata, extremitatibus membranarum plerumque dissimilibus una confusis, stomatocercos efformantibus *Paracarnegia*
(gen. n.)
4. Lorica levis parum ornamentata, cum collari idest collo duplici ad porum concentrico *Paraoutesia*
(gen. n.)
5. Lorica sphaerica vel piriformis, levis vel leniter sculpta cum collo longo, stricto, erecto vel incurvato *Paradeftlandreia*
(gen. n.)
6. Lorica sphaerica aculeis stellatis ornata, poro plerumque incospicuo *Asterostomum*
(gen. n.)
7. Lorica fortior, levis, plerumque piriformis, stomatocercis fortibus et variis porum ocludentibus praedita *Corymbostomum*
(gen. n.)
8. Lorica costis fortibus vel fasciis reticulatis ornata, extremitatibus plerumque dissimilibus *Anisostomum*
(gen. n.)

II. - *Lorica plerumque asymmetrica*

9. Lorica plerumque levis, poro sectione duplici vel trunco-conica *Plagióstomum* (gen. n.)
10. Lorica fortis altera extremitate aliam supergre-diente, poro concluso *Catastómum* (gen. n.)
11. Parietes loricae complicatae vel duplicatae . . . *Hemplectómum* (gen. n.)

* * *

Le specie rinvenute nel deposito sono così costituite nei vari generi:

Carnegia	N. 117
Outesia	» 10
Chrysóstomum	» 19
Chrysastrella	» 1 (?)
Clericia	» 71
Parachrysóstomum	» 7
Paraclericia	» 56
Paracarnegia	» 97
Paraoutesia	» 2
Asteróstomum	» 28
Corymbóstomum	» 69
Anisóstomum	» 36
Plagióstomum	» 4
Catastómum	» 69
Hemplectóstomum	» 9

TOTALE . . . N. 595

di cui solo 15 già conosciute.

I generi *Deflandreia*, *Paradeflandreia* e *Trachelostomum* non sono rappresentati nel deposito. Sono in dubbio se attribuire al gen. *Chrysa-strella* una sola forma.

* * *

Ed ora ecco la diagnosi di uno solo dei rappresentanti del genere del nuovo sistema, prendendo per generi mancanti nel deposito di Roma, alcune specie provenienti da materie esotico, di cui due nuove per la scienza, una già conosciuta.

CHRYSOSTOMUM ROMANUM sp. n. (fig. 1).

« Lorica trunco-conica verticibus rotundatis, basi latiore, modicum incurva, extremitatibus oblique truncatis porum latum trunco-conicum, superius latius, continuitate loricae conclusum, efficientibus ».

Dimensiones: Altitudo 20 μ , latitudo inferius 14.7 μ , superius 11 μ ; latitudo pori inferius 1.5 μ , ruperius 2.4 μ .

Distributio: Fossile in depositu quaternario alluvionali, Romae apud Tres Fontes S.^{ti} Pauli.

CLERICIA DREZEPOLSKII sp. n. (fig. 2).

« Lorica subovali, poco aperto vel ocluso, duobus uncis acutis in altum convergentibus prope porum praedita ».

Dimens.: Alt. 9.5-10 μ , lat. 9 μ , lat. pori 1.5-2 μ , alt. uncorum 2 μ , distantia ad basim eorum 2-2.5 μ , in altum 0.5 μ .

Distrib.: Fossilis Romae, ut supra.

CHRYSASTRELLA CHODATI sp. n. (fig. n. 5).

« Lorica sphaerica, superficie levi, poro collo destituto. Sex spinis crassiusculis, apice furcato, equidistantibus de inferiore parte loricae procedentibus ».

Dimens.: Diam. 14 μ , long. spinarum 6 μ .

Distrib.: Vivens in limo inter algas filiformes parvae lecunae (poz-zanghera) in monte Karisimbi ad altitudinem s. m. 3900 m., in Congo Belgico (2° lat. Sud) ⁽¹⁾.

Collegit beatus Clar. Doctor HELIOS SCAETTA, mense Octobris, anno 1930.

OUTESIA GRANULATA sp. n. (fig. 4).

« Lorica sphaerica, extremitatibus in altum elatis, apicibus incurvis vel incavatis, collum trunco-conicum inferius linea concava, superius linea convexa vel lenticula conclusum, efformantibus. Facie loricae tuberculis ornata, marginibus tuberculis vel parvis dentibus ornatis ».

Dimens.: Diam. 11-12 μ , alt. colli 2 μ , lat. infer. 2 μ , super. 1.5 μ .

Distrib.: Fossilis Romae, ut supra.

CARNEGIA UNGUICULATA sp. n. (fig. 3).

« Lorica ovali, extremitatibus dissimilibus, laeva exterius dentata, superius parum attenuata, dextera unguem interius adhuncam, porum non praetergradientem, basi interna inferius inclinata, exterius alia unguicula acuta, superius adhunca praeditam, conficiente. Poro inferius linea concava, superius lenticula concluso ».

Dimens.: Alt. 12 μ , lat. 9.5 μ , lat. pori 2 μ , alt. colli 1 μ , alt. unguis 2 μ .

Distrib.: Fossilis Romae, ut supra.

DEFLANDREIA FRENGUELLII sp. n. (fig. 6).

« Lorica sphaerica, membrana forti in longum collum bis inferius sinuatum, deinde rectum, ad dimidietatem duobus tuberculis, ad extremitatem pluribus, tuberculis minoribus ornatum, prolata. Poro lato linea convexa inferius concluso ».

⁽¹⁾ Vedi il mio lavoro: *Diatomee della regione del Kivu (Congo Belga)*, « Commentationes », Mem. Pont. Acad. Scient., anno II, vol. II, n. 14, 1938.

Dimens.: Diam. 19 μ , long. colli 30 μ , lat. colli canalis ad basim 4 μ , superius 2 μ .

Distrib.: Inter Spirogyras in limo cuiusdam rivuli apud Neguemi in Costa d'Avorio Africae Occid. Gallicae ad 12° lat. N. Collegit beatus Doct. HELIOS SCAETTA mense Augusti 1947 (1).

TRACHELOSTOMUM RAMPII Freng. (fig. 7).

FRENGUELLI G., *Chrisostomáceas del Rio de la Plata*. « Notas del Museo de la Plata », Tomo IV, Bot. n. 25, pag. 299-309, fig.

PARACHRYSOSTOMUM SIMPLEX n. gen. et n. nomen (fig. 9).

Clericia simplex Freng. — FRENGUELLI G., *Sopra alcuni microorganismi a guscio siliceo*. « Boll. Soc. geol. ital. », vol. XLIV, fasc. 1, Roma, 1925; tav. I, fig. 3.

« Lorica sphaerica duabus membranis confecta, extremitatibus ad porum sectione trunco-conico inversa, inferius linea modicum concava, superius continuitate secundae membranae conclusum, rotunde truncatis ».

Dimens.: Diam. 9.5-19 μ , lat. pori inferius 1.5 μ , super. 3 μ .

Distrib.: Fossile Romae, ut supra.

PARACLERICIA ARALDICA sp. n. (fig. 8).

« Lorica levi obovoidali angulosa, duabus membranis confecta, inferius (figura inversa) crassiore, superius attenuata angulosa apicibus brevibus aculeis armatis; poro lato sectione trunco-conica, inferius prima membrana concluso ».

Dimens.: Alt. 23 μ , lat. inf. 16 μ , super. 11 μ .

Distrib.: Fossilis Romae, ut supra.

(1) Vedi il mio lavoro: *Diatomee dell'Africa Occid. Francese*, « Commentationes », Mem. Pont. Acad. Scient., anno V, vol. V, n. 1, Roma, 1941.

PARAOUTESIA DIVERGENS sp. n. (fig. 11).

« Lorica sphaerica, levis, duabus membranis confecta, extremitatibus una superius confusis, in altum abrupte elatis, ibique exterius in ungues aequales, superius modicum incurvatas, apicibus acutiusculis, expansis; collo fere cylindrico, inferius linea concava, superius lenticula concluso ».

Dimens.: Diam. 12 μ , alt. colli 2 μ , lat. inf. 2 μ , sup. 1.8 μ , long. maximum 2 μ .

Distrib.: Fossilis Romae, ut supra.

PARACARNEGIA DEFLANDREI sp. n. (fig. 10).

« Lorica sphaerica, duabus membranis confecta, extremitatibus late incavatis, apicibus externis acutis, in altum conversis, interno laevo in altum elato truncato, dextero humiliore, obtuso, ad porum inferius linea concava, superius lenticula conclusum, producto. Supra dexterum cornu internum tubere recte geniculato et supra porum producto; supra porum et laevum cornu internum laminula rectangulari posita ».

Dimens.: Diam. 10 μ , lat. pori infer. 2.5 μ , sup. 1 μ .

Distrib.: Fossilis Romae, ut supra.

PARADEFLANDREIA ANDRIEUXI sp. n. (fig. 12).

« Lorica globosa, duabus membranis gradatim in collum longum infundibuliforme confusis, ad extremitates acutas dispari longitudine, productis. Colli canali cylindrico, modicum superius elatiori, linea parum concava obliqua concluso. Superficie loricae granulis oblongis in lineas concentricas vel spirales dispositis usque ad dimidietatem colli penitus ornata ».

Dimens.: Diam. 25 μ , long. colli 12 μ , lat. canal. colli 2 μ , ad extremitatem 3 μ .

Distrib.: Vivens in rivulo Guineae Gallicae Africae Occident. Gallicae. Invenit beatus Doot. Helios Scaetta mense aprili 1937.

Quest'altra bella *Crisostomacea Africana*, che si distingue dalla *Deflandreia Porteri* del Frenguelli per la disposizione della granulazione della superficie del guscio, per la lunghezza e conformazione del collo a pareti gradatamente attenuate fino alle estremità che sono acute ed una più lunga dell'altra, fu da me rinvenuta in un campione raccolto nell'aprile 1937 dal compianto amico Dott. HELIOS SCAETTA, già direttore dell'Ufficio agrario di Bengasi, e poi perseguitato politico rifugiato in Belgio ed in Francia ove rese segnalati servizi a quei paesi ed alla scienza, in un ruscello della riserva forestale di Banko (Abigien) nella Guinea Francese a circa 11° di lat. nord. Esso consta di fango e sabbia silicea con rare *Crisostomacee* ma ricco di *Diatomee* come *Eunotia*, *Frustulia*, *Melosira Roeseana*, *Pinnularie*, e *Synedra strangulata*.

Osservando il lavoro del FRENGUELLI sul genere *Deflandreia* ⁽¹⁾ vediamo nella figura 2, che le specie: *lagenae* Freng., *tabulata* Rampi, *somalica* Freng., *Porteri* var. *levis* Freng., hanno il guscio formato da una sola membrana; e le specie: *rugosa* Freng., *proboscidea* Freng., *robusta* Freng., *Porteri* Freng., hanno due membrane. Secondo dunque il mio punto di vista queste ultime dovrebbero essere raggruppate nel nuovo genere *Paradeflandreia*. Della *Porteri* var. *levis* Freng. poi, ne farei addirittura una specie a sè perchè ben distinta dal tipo *Porteri* pel suo contorno e per la sua superficie del tutto liscia.

CORYMBOSTOMUM IVANOFFI sp. n. (fig. 14).

« Lorica stricte ovali, duabus membranis confecta, brachiis dissimiliter in altum elatis, laevo in unguem adhuncam longe appendiculatam, truncatam, duos dentes interius conficientem cum tuberculo rectangulari ex medio appendicis exeunte. Ex primo dente unguis oritur uncus seu spina, quae inseritur in extremitate dexteri brachii, ex quo, incurve, interius prolato et oblique truncato, procedit transtillum quod pergit ultra basim appendicis unguis sinistrae. Colli lateribus concavis in altum convergentibus, ad verticem transtillo, ad basim vero linea concava, conjunctis ».

⁽¹⁾ FRENGUELLI G., « *Deflandreia* » Nuevo genero de *Crisostomaceas*. « Notas del Museo de la Plata », Tomo III, Bot. n. 18, pag. 47, fig. 2,

Dimens.: Alt. integra: 2μ , lat. maxima 12μ , crassitudo membrarum 2μ , lat. 3μ , ad basim, in altum 2.5μ , long. unguis cum appendice 8μ .

Distrib.: Fossile Romae, ut supra.

ANISÓSTOMUM FEROX sp. n. (fig. 15).

« Lorica valida, globosa-ovali; membrana prima integra, extremitatibus ad verticem truncatis, poro continuitate membranarum concluso. Secunda membrana latiore, inferius in aculeos fortes divisa, extremitatibus in ungues parum dissimiles, interius adhuncas, acutas, bidentatas expansis, linea circulari dentes superius conjungente, ad laevam aculeo brevi, ad dexteram aculeo longiori et tribus aliis brevioribus confectis; tribus aculeis subtilibus ad laevam surgentibus. Facies loricae duabus fasciis undulatis de summitate ad basim, extremitatibus aculeatis descendentes, alia brevi fasciola ad dexteram prope summitatem, ornata ».

Dimens.: Alt. integra: 27μ , lat. 24μ , aculei exclusis; pori latit. 2μ .

Distrib.: Fossile Romae, ut supra.

ASTERÓSTOMUM SATURNUS sp. n. (fig. 16).

« Lorica spherica, membrana prima circulari, secunda latiori, in quindecim mucrones et totidem sinus fere aequales divisa. Fasciis tribus fortibus oppositis aculeos, extremitatibus acuminatis, conjungentibus, tribus aliis de facie loricae ad aculeos duos ad dexteram, unum ad sinistram, procedentibus. Anulis duobus concentricis ad verticem diametri perpendicularis ».

Dimens.: Diam. integrum 23μ , diam. primae membranae 16.5μ , diam. anuli minori 3μ , maioris 9.5μ .

Distrib.: Fossile Romae, ut supra.

CATASTÓMUM AWERINZEWIANUM sp. n. (fig. 17).

« Lorica piriformi, duabus membranis integris instructa, poro, collo destituto, a latere dextero prope summitatem anulo praedito et a prima membrana contacto. Ungue brevi ad dexteram adhuc supra porum a prima membrana confecta, torque a laevo laetere inferius, in medio in altum incurva, ad dexteram subtus porum in unguem brevem in altum adhucam, desinente ».

Dimens.: Alt. $17\ \mu$, lat. max. $16\ \mu$, crassitudo membranarum $1.6\ \mu$, diam. anuli ad porum $2\ \mu$.

Distrib.: Fossile Romae, ut supra.

PLAGIÓSTOMUM RENIFORME sp. n. (fig. 18).

« Lorica reniformi, duabus membranis integris, secunda fere duplo latiori, confecta; poro lato sectione trunco-conica continuitate membranarum concluso ».

Dimens.: Alt. $15\ \mu$, lat. $11.3\ \mu$, lat. pori infer. $1.5\ \mu$, sup. $3\ \mu$.

Distrib.: Fossile Romae, ut supra.

HEMPLECTÓSTOMUM TRILOBUM sp. n. (fig. 19).

« Lorica primo aspectu tribolata, duabus membranis confecta, apicibus rotundatis; extremitatibus primae membranae in medio unius lateris oblique ad porum, inferius linea simplici, superius continuitate secundae membrane (in figura inferius positum) conclusum, truncatis. In secundo plano visivo prima membrana in anulum loricam excedentem duplicata ».

Dimens.: Alt. totalis $16\ \mu$, lat. $12\ \mu$, lat. pori infer. $1.5\ \mu$, super. $2\ \mu$.

Distrib.: Fossile Romae, ut supra.

APPENDICE

Presento ora la descrizione di due nuove *Archaeomonadaceae* di cui sopra ho parlato.

Una di esse avvicinandosi al genere *Corymbostomum* del giacimento di S. Paolo in Roma la chiamai

ARCHAECORYMBOSTOMUM nov. gen. mihi.

dal greco *archaios* = primitivo, *corymbos* = ornamento dell'estremità della nave, e *stoma* = bocca.

« Loricæ tribus membranis instructa, exteriore in collum, dispari modo hinc-inde ornatum, elata ».

ARCHAECORYMBOSTOMUM FUURIENSE sp. n. (fig. 13).

« Loricæ valida, globosa, fere cordiformi, ad polum posterius attenuata, in medio inflata, ad verticem aliquantulum depressa, tribus membranis instructa; prima (interiori) subtiliori aeruginæ coloris, reliquis hyalinis, in collum cum prima confusis, elatis, incrassatis, ad verticem obtuse dispari modo rotundatum, latere externo gibbosa, supra porum ponte ad aream conjunctis. Collo satis lato, parietibus laeva sinuata, dextera incavata; basi colli linea concava conclusa, superius duobus transtillis concavis, in medio apertis, verticibus linea convexa conjunctis ».

Dimens: Lat. max. loricae 22 μ , alt. 22 μ , crassitudo integra membranarum 3 μ , alt. colli 5 μ , lat. ad basim eiusdem 6 μ , ad verticem 4.5 μ , crassitudo pontis 3 μ .

Distrib.: Fossile in depositu tripolaceo tertiariorum insulae Læsø ad Fuur in Jutlandia.

La seconda forma avvicinandosi per la disposizione del poro al nuovo genere *Catastomum* del deposito di Roma, venne da me chiamata.

ARCHAEOCATASTÓMUM gen. n. mihi

dal greco *archaios* = primitivo; *xatà* = sotto, inferiore; *stoma* = bocca.

« Altera extremitate loricae inferiore, alia supergrediente, membrana unica ».

ARCHAEOCATASTÓMUM RAMPPI sp. n. (fig. 20).

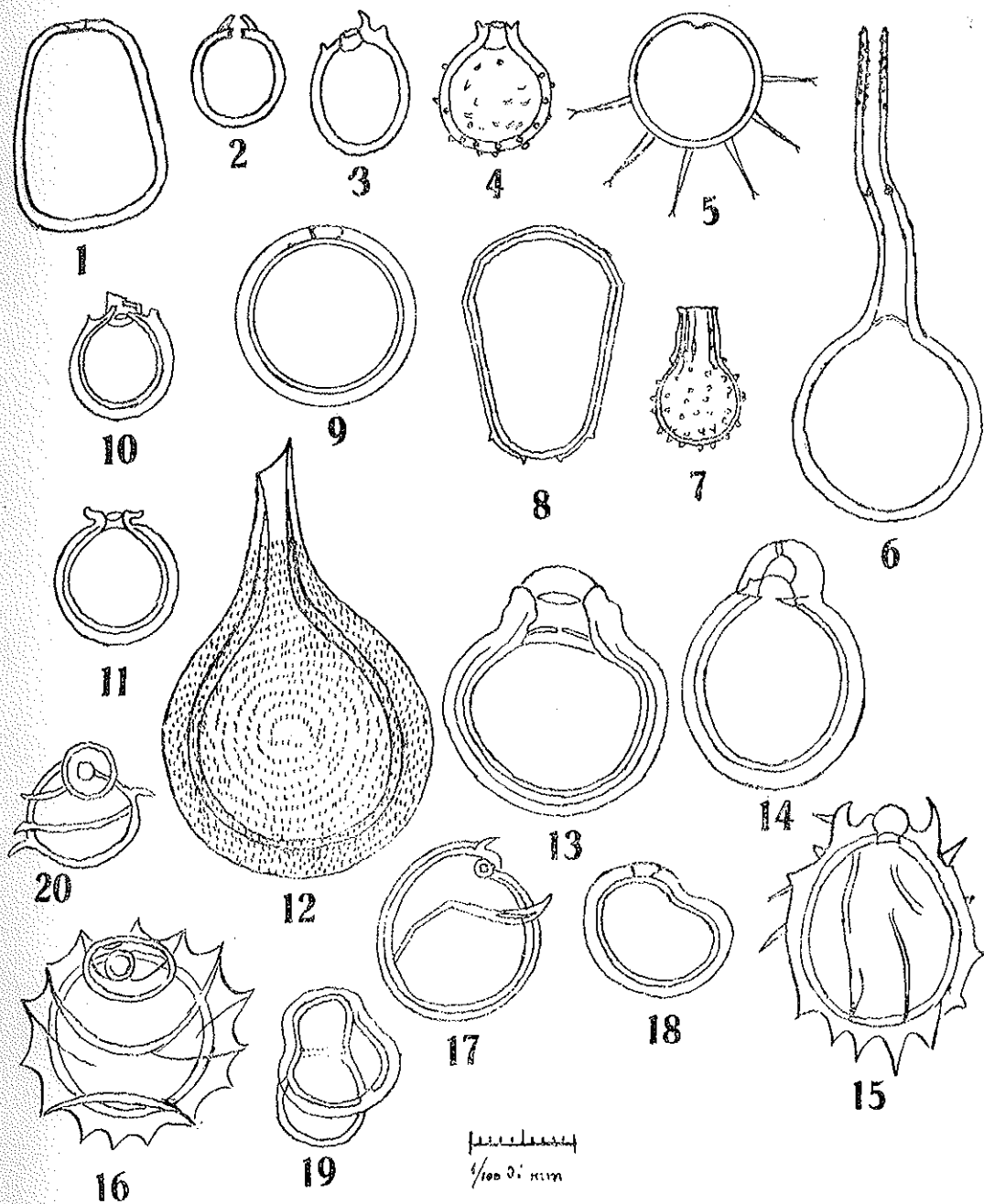
« Lorica sphaerica unica membrana confecta, ad laevam inferius in unguem strictam, acutam, inferius adhuncam, et ad dexteram superius in aliam unguem strictam, acutam inferius adhuncam expansa. Extremitate laeva in circulum interius truncata, et modicum incavata, brevibus apicibus acutis; dextera extremitate paulo inferius posita, ad porum circulo et anulo duplici conclusum, truncata. Facie loricae ad medietatem fasciola modicum inferius arcuata et ad laevam parietem excedente, ibique inferius adhunca, superius alia fasciola incurva ad laevam parietem brevius excedente, ornata ».

Dimens.: Diam. 11.2 μ ; diam. circuli ad porum 2 μ ; diam. anuli 5 μ .

Distrib.: Fossile in depositu tripolaceo tertiarario marino insulae Leschoos ad Fuur in Jutlandia.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

	PAG.
1. <i>Chrysostomum romanum</i> sp. n. foss. di Roma	50
2. <i>Clericia Drezepolskii</i> sp. n. foss. di Roma	50
3. <i>Carnegia unguiculata</i> sp. n. foss. di Roma	51
4. <i>Outesia granulata</i> sp. n. foss. di Roma	51
5. <i>Chrysastrella Chodati</i> sp. n. viv. del Congo Belga	50
6. <i>Deflandreia Frenguelli</i> sp. n. viv. della Costa d'Avorio	51
7. <i>Trachelostomum Rampii</i> Freng. viv. del Rio de la Plata	52
8. <i>Paraclerica araldica</i> n. gen. et n. sp. foss. di Roma	52
9. <i>Parachysostomum simplex</i> n. gen. et n. sp. foss. di Roma	52
10. <i>Paracarnegia Deflandrei</i> n. gen. et n. sp. foss. di Roma	53
11. <i>Parautesia divergens</i> n. gen. et n. sp. foss. di Roma	53
12. <i>Paradeflandreia Andrieuxi</i> n. gen. et n. sp. viv. dell'Africa Occid. Francese	53
13. <i>Archaeocorymbostomum Fuuriense</i> n. gen. et n. sp. foss. di Fuur.	57
14. <i>Corymbostomum Ivanoffi</i> n. gen. et n. sp. foss. di Roma	54
15. <i>Anisostomum ferox</i> n. gen. et n. sp. foss. di Roma	55
16. <i>Asterostomum Saturnus</i> n. gen. et n. sp. foss. di Roma	55
17. <i>Catastomum Awerinzewianum</i> n. gen. n. sp. foss. di Roma	56
18. <i>Plagiostomum reniforme</i> n. gen. et n. sp. foss. di Roma	56
19. <i>Hemplectostomum trilobum</i> n. gen. et n. sp. foss. di Roma	56
20. <i>Archaeocatastomum Rampii</i> n. gen. et n. sp. foss. di Fuur.	58



FORZE D'INERZIA NEI SISTEMI LAGRANGIANI E LORO CARATTERE CONSERVATIVO IN TALUNI CASI PARTICOLARI (*)

LUIGI CASTOLDI

SUMMARIVM. — Ostendit Auctor virium inertiae proprietatem conservationis sub condicionibus opportune vinculis impositis.

1. — Il carattere di dipendenza dal sistema di riferimento della nozione di *forza* risulta, nel caso di un punto materiale libero e di riferimenti cartesiani, dal teorema elementare di CORIOLIS esprimendosi; con notissimo significato dei simboli nella relazione

$$[1] \quad \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_a - \mathbf{a}_\tau - 2\mathbf{a}_c$$

tra le accelerazioni assoluta, relativa, di trascinamento e complementare. Questa, infatti, si traduce in una analoga relazione tra le forze:

$$[2] \quad \mathbf{F}_r = \mathbf{F}_a - \mathbf{F}_\tau - 2\mathbf{F}_c,$$

dove i termini

$$-\mathbf{F}_\tau - 2\mathbf{F}_c$$

costituiscono complessivamente le cosiddette *forze deinerzia*.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 26 aprile 1947.

Ci proponiamo qui, dapprima, di mostrare che un analogo carattere di dipendenza dal sistema di coordinate di riferimento appartiene alle forze attive applicate a un generico sistema dinamico soggetto a vincoli olonomi senza attrito, dipendenti o meno dal tempo; e ciò in conseguenza della struttura stessa delle equazioni dinamiche lagrangiane⁽¹⁾. Riconosceremo poi che, in particolari condizioni di vincolo e di riferimento, le *forze d'inerzia generalizzate* cui così si perviene, presentato in un senso da definirsi *lato*, carattere conservativo.

2. - Ricordiamo infatti che denotando con q_h ($h=1, 2, \dots, n$) coordinate lagrangiane indipendenti caratterizzanti le possibili configurazioni del sistema olonomo considerato e con Q_h le rispettive componenti delle forze attive, l'energia cinetica del sistema assume la forma:

$$[3] \quad T = \frac{1}{2} \sum_{h,k} A_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_h A_h \dot{q}_h + \frac{1}{2} A_0,$$

dove le A_{hk} , le A_h ed A_0 sono quantità note, funzioni generalmente delle q_h e del tempo t . Le A_h ed A_0 si annullano notoriamente allorché i vincoli applicati al sistema sono indipendenti dal tempo (o non esistono affatto), sotto l'ulteriore condizione che le coordinate q_h abbiano carattere *solidale* rispetto a tali vincoli fissi; intendendo con ciò che la definizione delle q_h è di tal natura che ad una determinata configurazione del sistema corrisponde un insieme temporalmente invariabile di valori delle q_h ⁽²⁾.

Le corrispondenti equazioni lagrangiane

$$[4] \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

scritte sotto la forma esplicita cui si perviene tenendo conto di [3], assumono l'aspetto:

$$[5] \quad \sum_k A_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{l,k} [lk, j] \dot{q}_l \dot{q}_k + \sum_k w_{kj} \dot{q}_k + \frac{\partial A_j}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_0}{\partial q_j} = Q_j$$

⁽¹⁾ Sotto ipotesi più restrittive sulla natura dei vincoli, l'osservazione del testo trovasi anche, per es., in P. FRANK und R. v. MISES, *Die Differential- und Integral gleichungen der Mechanik und Physik*. Vol. II, pagg. 52-55.

⁽²⁾ Diversamente, pur con vincoli fissi (o in assenza di essi), il secondo membro della [4] non si riduce a forma omogenea.

dove si è posto:

$$[lk, j] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial A_{jl}}{\partial q_k} - \frac{\partial A_{lk}}{\partial q_j} \right)$$

e

$$w_{kj} = \frac{\partial A_j}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_j} + \frac{\partial A_{jk}}{\partial t}.$$

Nel caso di vincoli fissi e di un riferimento solidale le [5] si riducono a

$$[5'] \quad \sum_k A_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{lk} [lk, j] \dot{q}_l \dot{q}_k = Q_j,$$

dove le A_{jk} e le $[lk, j]$ sono attualmente indipendenti dal tempo. Ma anche nel caso di vincoli e di riferimenti qualunque è possibile dare alle [5] la forma [5'] purchè si annoverino tra le forze applicate i termini

$$[7] \quad \Phi_j = - \sum_k w_{kj} \dot{q}_k - \frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_0}{\partial q_j}.$$

Posto infatti

$$[8] \quad Q_j^{(r)} = Q_j - \frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_0}{\partial q_j} - \sum_k w_{kj} \dot{q}_k,$$

le [5] assumono la forma:

$$[9] \quad \sum_k A_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{lk} [lk, j] \dot{q}_l \dot{q}_k = Q_j^{(r)}.$$

È evidente l'analogia formale tra le [2] e le [8], ed è ovvio interpretare in quest'ultime, rispettivamente i primi membri e i termini $-\frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_0}{\partial q_j}$, $\sum_k w_{kj} \dot{q}_k$ come forze relative al riferimento q_k , di trascinamento, e complementari; complessivamente, le quantità [7] come *forze d'inerzia*.

L'unica differenza tra le [5] e le [9] consiste nell'indipendenza delle quantità A_{jk} e $[lk, j]$ dal tempo, che sussiste per le prime e, in generale, non per le seconde.

D'altra parte importa qui rilevare, per quanto si dirà in seguito attorno alla natura delle forze d'inerzia in questo caso particolare, che esistono vincoli (sia fissi che mobili, o, in particolare del tutto assenti) e, con essi, particolari sistemi di coordinate lagrangiane, per cui si verifica la circostanza che, nelle corrispondenti equazioni [9] le A_{jk} e (quindi) le $[Lk, j]$ risultano esplicitamente indipendenti dal tempo. In tal caso le [5] e le [9] si identificano, per quanto riguarda la loro struttura, completamente, salvo il diverso significato di forze assolute (nelle [5]) e relative (nelle [9]) dei secondi membri.

Come esempio di riferimento mobile in assenza di vincoli, per cui si verifica la circostanza accennata, si consideri, per un punto materiale, quello costituito da una terna cartesiana ortogonale $O\xi\eta\zeta$ uniformemente rotante con velocità angolare ω relativamente ad una terna di uguale origine $Oxyz$ ritenuta fissa, essendo asse di rotazione l'asse $O\zeta$ coincidente con Oz . Si ha infatti allora:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \\ &= \frac{1}{2} m [\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + 2\omega(\dot{\xi}\eta - \eta\dot{\xi}) + \omega^2(\xi^2 + \eta^2)] . \end{aligned}$$

Come esempio, ancora per un punto materiale, di vincolo mobile, e, con esso, di conveniente scelta di coordinate, per cui ancora sussiste la proprietà accennata, si consideri quello costituito da una circonferenza in piano fisso e centro fisso, il cui raggio, partendo da un valore iniziale r_0 , cresca linearmente col tempo:

$$r = kt + r_0 .$$

Assumendo come parametro l'arco s contato da un punto A della circonferenza scelto istante per istante in modo che il raggio OA mantenga direzione fissa nel piano, si ha infatti:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \left[\dot{s}^2 - 2 \frac{ks}{r} \dot{s} + k^2 \left(1 + \frac{s^2}{r^2} \right) \right] .$$

3. - Riprendendo in generale l'espressione [7] delle forze d'inerzia, nasce spontanea la questione se esse possano presentare carattere conservativo.

Poichè i primi termini delle [7] dipendono dalle \dot{q}_h , il problema va naturalmente posto attribuendo alla nozione di forza conservativa non il significato ristretto che solitamente si dà a questa denominazione, ma quello più ampio secondo cui una forza si definisce conservativa allorchè esiste una funzione (potenziale generalizzato) $V(q_h, \dot{q}_h, t)$ degli argomenti indicati per cui le componenti F_j della forza in questione possono mettersi sotto la forma

$$[10] \quad F_j = \frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right).$$

La [10] è l'espressione più generale di cui sono suscettibili le componenti lagrangiane delle forze attive compatibilmente alla condizione che introdotta una *funzione lagrangiana*

$$L = T + V,$$

sia possibile attribuire alle equazioni dinamiche [4] la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

Per distinguere, attribuiremo a forze del tipo [10] la denominazione di *forze conservative in senso lato o derivanti da un potenziale generalizzato*.

Le condizioni generali affinché una forza di assegnate componenti lagrangiane F_h possa derivarsi da un potenziale generalizzato sono state date da HELMHOLTZ⁽¹⁾ e MEYER⁽²⁾ e, limitatamente al caso di forze dipendenti soltanto dalle derivate prime delle q_h (oltrechè naturalmente dalle q_h e da t), dal RACA⁽³⁾. Con riferimento a quest'ul-

⁽¹⁾ H. HELMHOLTZ, « Journal f. Math. » (1886).

⁽²⁾ A. MEYER, « Leipziger Berichte » (1896).

⁽³⁾ G. RACA, « Atti lincei » (1937), vol. XXV, pag. 223. Forze del tipo [10] si prestano anche ad una trattazione quantica, come è stato rilevato dal CALDIROLA, « Rend. Ist. Lombardo » (1939), vol. 72, pag. 379 e, per estensioni: « Nuovo cimento » (1941), pag. 393.

timo caso che, solo, attualmente ci interessa data la forma delle forze [7], tali condizioni sono:

1°) che le F_j siano lineari nelle \dot{q}_h , cioè della forma

$$[11] \quad F_j = \sum_k c_{jk} \dot{q}_k + c_j ,$$

colle c_{jk} e c_j funzioni soltanto delle q_h e di t ;

2°) che le c_{jk} le c_j verifichino le condizioni

$$[12] \quad c_{jk} = -c_{kj} ,$$

$$[13] \quad \frac{\partial c_{jk}}{\partial q_i} + \frac{\partial c_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial c_{ij}}{\partial q_k} = 0 ,$$

$$[14] \quad \frac{\partial c_{jk}}{\partial t} + \frac{\partial c_k}{\partial q_j} - \frac{\partial c_j}{\partial q_k} = 0 .$$

È anche dovuto al RACAÏ (nota⁽⁸⁾, pag. 225) il riconoscimento che, nel caso di una sola particella materiale libera, le uniche forze soddisfacenti alle condizioni [11], [12], [13], [14] sono del tipo di LORENTZ, cioè, sotto forma vettoriale, del tipo:

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right)$$

dove \mathbf{E} e \mathbf{B} sono vettori soddisfacenti le equazioni:

$$[16] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{B} = 0 \\ \text{curl } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 , \end{array} \right.$$

\mathbf{v} è la velocità della particella ed e e c sono costanti scalari. Ciò può formalmente interpretarsi dicendo che le forze del tipo ora considerato possono sempre assimilarsi a quelle che la particella in questione subirebbe qualora fosse dotata di una conveniente carica elettrica ed immersa in un opportuno campo elettrico e magnetico.

4. - Premesso ciò non è difficile verificare che le forze d'inerzia introdotte colle [7] del n. 2 soddisfano a tutte le condizioni [11]-[14] sotto la sola restrizione di indipendenza esplicita dal tempo delle A_{jk} .

Abbiamo dunque il risultato:

« Le forze d'inerzia cui è soggetto un sistema dinamico a vincoli olonomi lisci per cui sia possibile un riferimento a coordinate lagrangiane verificanti la relazione

$$[17] \quad \frac{\partial A_{jk}}{\partial t} = 0 ,$$

sono conservative in senso lato ».

Con riguardo al risultato particolare del РАКАН, citato alla fine del n. 3, possiamo anche dire che:

« Le forze d'inerzia cui è soggetto un punto materiale libero riferito a un sistema di coordinate soddisfacente la condizione [15] sono forze del tipo di LORENTZ ».

Nel caso considerato come primo esempio nel n. 2, con riferimento alla [7], si ha

$$\Phi_{\xi} = 2m\omega\dot{\eta} + m\omega^2\xi; \quad \Phi_{\eta} = -2m\omega\dot{\xi} + m\omega^2\eta; \quad \Phi_{\zeta} = 0 ,$$

da cui, per confronto colla [15], e indicando con \mathbf{k} il versore dell'asse fisso $O\zeta = Oz$, risulta:

$$[18] \quad \begin{cases} \mathbf{E} = \frac{m}{e} \omega^2 (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \\ \mathbf{B} = \frac{mc}{e} \omega \mathbf{k} \end{cases} ,$$

dove \mathbf{Q} è la proiezione ortogonale di \mathbf{P} sull'asse Oz .

Le [18], una volta scelti, in modo del resto arbitrario, i valori delle costanti c ed e , determinano univocamente i vettori \mathbf{E} e \mathbf{B} , ed è facile verificare che per essi risultano senz'altro soddisfatte le condizioni [16].

CONTRIBUTO AD UNA TEORIA GENERALE DEGLI OPERATORI (*)

GINO ARRIGHI

SVMMARIVM. — *Generalem doctrinam de operatoribus Auctor delibat, de inversionis problemate speciatim tractans.*

§ 1. — L'uso degli operatori trova amplissimo ufficio nelle matematiche e nella tecnica: proiettività, omografie vettoriali, matrici e gli operatori funzionali introdotti da GIORGI; ma riteniamo che il loro uso sia di non trascurabile apporto ad altre scienze come pure alla *logica* dove le applicazioni di queste ricerche saranno in prosiego mostrate.

Pertanto siamo venuti nella considerazione della opportunità di una teoria generale degli operatori alla quale, con questo scritto, intendiamo portare un, sia pur lieve, contributo.

In queste pagine, definiti gli operatori, vengono trattati i loro prodotti ordinati e le simmetrie il cui calcolo presenta forti analogie formali con quello delle radici ennesime dell'unità.

Successivamente si passa ad analizzare, dettagliatamente e per gradi successivi, l'importante problema della inversione degli operatori.

§ 2. — Diremo *operatore* applicabile ad un ente, un complesso di operazioni effettuabile sopra l'ente stesso. Indicando brevemente con α un operatore, la totalità degli enti cui α è applicabile sarà indicata con C_α e verrà detta *campo di applicabilità* di α .

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 27 aprile 1947.

Se x appartiene a C_α ed y è l'ente cui si perviene applicando α ad x scriveremo brevemente $y = \alpha x$. So, per tutti gli enti x , appartenenti ad un campo C , si ha $\alpha x = x$ diremo che α è *identità* in C , ovvero è $\alpha = I$ in C .

Se y , fornito dalla $y = \alpha x$, appartiene al campo C_β di applicabilità di un altro operatore β potrà ulteriormente aversi $z = \beta y = \beta(\alpha x)$ e scriveremo anche $z = (\beta\alpha)x = \beta\alpha x$ dove è pure posto in evidenza l'operatore $\beta\alpha$ (*prodotto ordinato* degli operatori α e β) che applicato ad x fornisce z e il cui campo di applicabilità $C_{\beta\alpha}$ è contenuto in C_α o, al più, coincide con esso. In tali ipotesi β è da riguardarsi come operatore che trasforma α in $\beta\alpha$.

In guisa analoga, quando siano verificate le condizioni per ulteriori applicabilità, potrà definirsi il prodotto ordinato degli operatori α, β, γ mediante la $(\gamma\beta\alpha)x = \gamma[\beta(\alpha x)]$ che scriveremo pure $\gamma\beta\alpha x$. Così, similmente, per prodotti ordinati di più di tre operatori.

Verificate le condizioni per le ulteriori applicabilità, potremo definire, le *potenze* con esponente intero non negativo degli operatori, mediante la legge: $\alpha^0 = I$, $\alpha^{m+1} = \alpha\alpha^m$ (con $n = 0, 1, 2, \dots$).

Si avrà allora conseguentemente

$$[1] \quad (\beta\alpha)^2 = \beta\alpha\beta\alpha, \quad (\beta\alpha)^3 = \beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha, \quad \text{ecc.}$$

$$\alpha^m \alpha^n = \alpha^{m+n}, \quad (\alpha^m)^n = \alpha^{mn} \quad (\text{con } m, n \text{ interi non negativi}).$$

Un operatore γ sarà detto *riflessivo* in un campo C se, per tutti gli enti x di C , γx appartiene ancora a C , allora ciò accadrà anche per $\gamma^n x$ (con n intero non negativo qualunque).

Due operatori α e β saranno detti *commutabili* in un campo C se, per tutti gli enti x di C , è $\beta\alpha x = \alpha\beta x$.

TEOREMA I. — Se α e β sono operatori commutabili in C ed ivi riflessivi si ha in C : $(\beta\alpha)^n = (\alpha\beta)^n = \beta^n \alpha^n = \alpha^n \beta^n$ (con n intero non negativo qualunque).

Infatti, per ipotesi, l'operatore $(\beta\alpha)^n$ potrà applicarsi agli enti di C ed inoltre dallo sviluppo, secondo le [1], si otterranno le ulteriori sue forme date nell'enunciato mediante successivi scambi.

Se per \bar{x} appartenente a C_α , con α non identità, risulta $\alpha\bar{x} = \bar{x}$ diremo che l'ente \bar{x} è *unito* rispetto ad α . Se β è commutabile con α

in un campo C cui appartiene \bar{x} , avremo $\alpha\beta\bar{x}=\beta\alpha\bar{x}=\beta\bar{x}$ ciò che prova essere unito, rispetto ad α , anche $\beta\bar{x}$. Se, permanendo le ipotesi precedenti, gli operatori α e β sono altresì riflessivi in C sarà $\alpha^r\bar{x}=\bar{x}$ (con r intero non negativo qualunque) e quindi $\alpha^r\beta^s\bar{x}=\beta^s\alpha^r\bar{x}=\beta^s\bar{x}$ (con s intero non negativo qualunque); cioè $\beta^s\bar{x}$ è ancora unito rispetto ad α^r .

§ 3. — Un operatore ε sarà detto *simmetria di ordine n* (con n intero non negativo) in un campo C se ε è ivi riflessivo e se in C è $\varepsilon^n=I$. La identità è simmetria di qualunque ordine in tutti i campi. Una simmetria di ordine n in C sarà detta *primitiva* se per m intero positivo qualunque minore di n è in generale $\varepsilon^m \neq I$.

TEOREMA II. — Se ε è simmetria primitiva di ordine n in C , gli operatori ε^r (con $r=0, 1, 2, \dots, n-1$) sono simmetrie di ordine n in C diverse fra loro.

Infatti è $(\varepsilon^r)^n=(\varepsilon^n)^r=I$. Inoltre le n simmetrie che così si ottengono, cioè le $I, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}$, sono tutte diverse fra loro giacchè se fosse $\varepsilon^{r_1}=\varepsilon^{r_2}$ (con $r_1 < r_2 < n$), applicando ε^{n-r_2} ad ambo i membri di questa, si avrebbe $\varepsilon^{n-r_2+r_1}=\varepsilon^{n-r_2+r_2}=I$; ma essendo $n-r_2+r_1 < n$ seguirebbe che la ε non sarebbe più primitiva contrariamente alla ipotesi.

Dando ad r valori interi qualunque successivi ad $n-1$ ritroviamo simmetrie del gruppo sopra scritto; ad esempio si ha: $\varepsilon^{n+2}=\varepsilon^n\varepsilon^2=\varepsilon^2$. Se l'operazione indicata nel teorema II fosse stata eseguita sopra una simmetria non primitiva ma tale che $\varepsilon^m=I$ (essendo m il minore numero intero positivo per cui questa eguaglianza è generalmente verificata) avremmo ottenuto un gruppo di sole m simmetrie diverse: $I, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{m-1}$.

TEOREMA III. — Se ε è simmetria di ordine 3 in C ed è $\varepsilon \neq I$, essa è primitiva.

Infatti se fosse $\varepsilon^2=I$, dalle $\varepsilon^3=\varepsilon$ ed $\varepsilon^3=I$, discenderebbe $\varepsilon=I$ contrariamente alla ipotesi.

TEOREMA IV. — Se ε_1 e ε_2 sono simmetrie commutabili di ordine, rispettivamente, m_1 e m_2 in C , il loro prodotto è simmetria in C di ordine eguale al minimo comune multiplo di m_1 e m_2 .

Infatti detto m il minimo comune multiplo indicato e posto $m = m_1 p = m_2 q$, si ha $(\varepsilon_1^{m_1})^p (\varepsilon_2^{m_2})^q = I$ donde segue $\varepsilon_1^m \varepsilon_2^m = I$ e, in virtù del teorema I, $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^m = I$, c. v. d.

TEOREMA V. — Se in tutto un campo C sono commutabili la simmetria ε primitiva di ordine n e l'operatore α riflessivo in C , si ha in C : $(\alpha \varepsilon^r)^n = \alpha^n$ (con $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$) e gli operatori $\alpha \varepsilon^r$ sono fra loro diversi.

Ciò segue immediatamente dai teoremi I e II.

Dando ad r valori interi qualunque successivi ad $n-1$ ritroviamo operatori del gruppo ora considerato. Se l'operazione indicata nel teorema V fosse stata eseguita con una simmetria non primitiva avremmo ottenuto un gruppo di minor numero di operatori diversi.

§ 4. — **TEOREMA VI.** — Se $\beta \alpha x$ appartiene a C_α , αx appartiene a $C_{\alpha\beta}$.

Infatti applicando α a $\beta \alpha x$, il che è lecito per ipotesi, si ha $\alpha \beta \alpha x = \alpha \beta (\alpha x)$, c. v. d. Analogamente si proverebbe che

TEOREMA VII. — Se $\alpha \beta x$ appartiene a C_β , βx appartiene a $C_{\beta\alpha}$.

Indichiamo ora con $C_{\beta\alpha}^*$ il campo (quando esista) contenuto in $C_{\beta\alpha}$ o, al più, coincidente con esso e tale che per ogni ente u appartenente ad esso si abbia $\beta \alpha u = u$; in tal caso diremo che β è *inverso* di α in $C_{\beta\alpha}^*$, ovvero che è $\beta \alpha = I$ per tutti gli u di $C_{\beta\alpha}^*$. Analogamente, indicheremo con $C_{\alpha\beta}^*$ il campo (quando esista) contenuto in $C_{\alpha\beta}$ o, al più, coincidente con esso e tale che per ogni ente v appartenente ad esso si abbia $\alpha \beta v = v$; in tal caso diremo che α è *inverso* di β in $C_{\alpha\beta}^*$, ovvero che è $\alpha \beta = I$ per tutti gli enti v di $C_{\alpha\beta}^*$. Se $C_{\beta\alpha}^* \equiv C_{\beta\alpha}$ diremo che β è *inverso* di α per tutti gli enti cui è applicabile $\beta \alpha$; e se $C_{\beta\alpha}^* \equiv C_{\alpha\beta}$ diremo che α è *inverso* di β per tutti gli enti cui è applicabile $\alpha \beta$. Se $C_{\beta\alpha}^* \equiv C_\alpha$ diremo che β è *ovunque inverso* di α , e se $C_{\alpha\beta}^* \equiv C_\beta$ sarà α ovunque inverso di β .

TEOREMA VIII. — Quando esiste il campo $C_{\beta\alpha}^*$ ogni ente u del quale verifica la $\beta \alpha u = u$, esiste altresì il campo $C_{\alpha\beta}^*$ ogni ente v del quale verifica la $\alpha \beta v = v$. Inoltre: per ogni u si ha un v tale che $\beta v = u$, per ogni v si ha un u tale che $\alpha u = v$.

Infatti, applicando α ad ambo i membri della $u = \beta \alpha u$, si ha $\alpha u = \alpha \beta \alpha u = \alpha \beta (\alpha u)$ la quale ci prova che per tutti gli αu è $\alpha \beta = I$ e quindi il campo $C_{\alpha\beta}^*$ esiste. Inoltre scelto un \bar{u} qualunque in $C_{\beta\alpha}^*$ diciamo v_1 l'ente di $C_{\alpha\beta}^*$ concidente con $\alpha \bar{u}$ cioè $v_1 = \alpha \bar{u}$, applicando β ad ambo i membri di questa si ha $\beta v_1 = \bar{u}$, c. v. d.; analogamente si prova il rimanente.

Due elementi u e v legati fra loro dalla $\beta v = u$ [o dalla $\alpha u = v$ che fa lo stesso] saranno detti *corrispondenti* e allora il teorema precedente potrà anche annunciarsi al modo seguente

TEOREMA VIII bis. — La identità di $\beta \alpha$ in un campo porta di conseguenza la identità di $\alpha \beta$ in un altro e i due campi sono costituiti da elementi corrispondenti.

Da quanto sopra, con n intero positivo qualunque, discende

$$u = (\beta \alpha)^n u = \beta (\alpha \beta)^{n-1} \alpha u = \beta (\alpha \beta)^{n-1} v, \quad v = (\alpha \beta)^n v = \alpha (\beta \alpha)^{n-1} \beta v = \alpha (\beta \alpha)^{n-1} u.$$

Nelle ipotesi superiori, se γ è riflessivo in $C_{\beta\alpha}^*$, si avrà $\gamma^{r+s} u = \gamma^r \beta \alpha \gamma^s u$ (con r e s interi non negativi qualunque).

Analogamente, se δ è riflessivo in $C_{\alpha\beta}^*$, si avrà $\delta^{p+q} v = \delta^p \alpha \beta \delta^q v$ (con p e q interi non negativi qualunque).

Se, in particolare, γ è in $C_{\beta\alpha}^*$ simmetria di ordine $n = r + s$ (con r e s interi non negativi), per quanto sopra avremo $u = \gamma^r \beta \alpha \gamma^s u$. E se δ è simmetria di ordine $n = p + q$ (con p e q interi non negativi) in $C_{\alpha\beta}^*$, avremo $v = \delta^p \alpha \beta \delta^q v$.

Se i campi $C_{\beta\alpha}^*$ e C_β hanno una parte in comune e diciamo p il generico ente di questa, tenendo presente la $u = \beta \alpha u$, sarà $\beta p = \beta^2 \alpha p$ e quindi: il corrispondente di p appartiene a $C_{\beta^2}^*$. Analogamente, se i campi $C_{\alpha\beta}^*$ e C_α hanno una parte in comune e diciamo q il generico ente di questa troveremo che il corrispondente di q appartiene a $C_{\alpha^2}^*$. Inoltre, con n intero non negativo qualunque, avremo

$$\beta p = \beta^2 (\alpha \beta)^n \alpha p = \beta (\beta \alpha)^{n+1} p, \quad \alpha q = \alpha^2 (\beta \alpha)^n \beta q = \alpha (\alpha \beta)^{n+1} q.$$

§ 5. — Supponiamo adesso che i due campi $C_{\beta\alpha}^*$ e $C_{\alpha\beta}^*$ abbiano una parte in comune il cui ente generico, che indicheremo con w , viene

adesso a godere tutte le proprietà che precedentemente si sono viste valere per u, v, p, q e che qui richiamiamo in parte ponendo $w_1 = \alpha w$ e $w_2 = \beta w$. Avremo pertanto

$$w = \beta w_1 = \alpha w_2 = \beta \alpha w_1 = \alpha \beta w_2, \quad w_1 = \alpha^2 w_2 = \alpha \beta w_1 = \alpha^2 \beta \alpha w_2, \\ w_2 = \beta^2 w_1 = \beta \alpha w_2 = \beta^2 \alpha \beta w_1.$$

Sarà inoltre

$$w = \alpha \beta^2 w_2 = \beta \alpha^2 w_2, \quad w_1 = \alpha^2 \beta^3 w_1 = \alpha \beta \alpha^2 w_2, \quad w_2 = \beta^2 \alpha^2 w_1 = \beta \alpha \beta^2 w_1.$$

Da queste ultime discende in particolare che

TEOREMA IX. — L'ente w_1 appartiene a $C_{\alpha\beta}^*$ e w_2 appartiene a $C_{\beta\alpha}^*$.

Dalle precedenti risulta pure che w e w_1 sono corrispondenti e così pure w_2 e w ; inoltre w_1 e w_2 , corrispondenti di un medesimo w , saranno detti *corrispondenti in 2° grado*.

§ 6. — Supponiamo adesso che i due campi $C_{\beta\alpha}^*$ e $C_{\alpha\beta}^*$ coincidano e diciamo ancora w il generico ente di un tal campo che, brevemente, diremo C^* . In tali ipotesi diremo che gli operatori α β sono *l'uno doppiamente inverso dell'altro* in C^* ; se fosse ancora $C_\alpha \equiv C_\beta \equiv C^*$ diremo che *l'uno è doppiamente inverso ovunque dell'altro*.

Se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{l-1}, \varepsilon_l$ sono simmetrie di ordine rispettivamente $n_1, n_2, \dots, n_{l-1}, n_l$ in un campo C si ha che $\varepsilon_1^{r_1} \varepsilon_2^{r_2} \dots \varepsilon_{l-1}^{r_{l-1}} \varepsilon_l^{r_l}$ è doppiamente inverso di $\varepsilon_l^{s_l} \varepsilon_{l-1}^{s_{l-1}} \dots \varepsilon_2^{s_2} \varepsilon_1^{s_1}$ (con $r_1, r_2, \dots, r_{l-1}, r_l, s_1, s_2, \dots, s_{l-1}, s_l$ interi non negativi e tali che $r_1 + s_1 = n_1, r_2 + s_2 = n_2, \dots, r_{l-1} + s_{l-1} = n_{l-1}, r_l + s_l = n_l$) in C ; giacchè, detto x il generico ente di C , si ha sempre

$$\varepsilon_1^{r_1} \varepsilon_2^{r_2} \dots \varepsilon_{l-1}^{r_{l-1}} \varepsilon_l^{r_l} \varepsilon_l^{s_l} \varepsilon_{l-1}^{s_{l-1}} \dots \varepsilon_2^{s_2} \varepsilon_1^{s_1} x = \varepsilon_l^{s_l} \varepsilon_{l-1}^{s_{l-1}} \dots \varepsilon_2^{s_2} \varepsilon_1^{s_1} \varepsilon_1^{r_1} \varepsilon_2^{r_2} \dots \varepsilon_{l-1}^{r_{l-1}} \varepsilon_l^{r_l} x = x.$$

Per $l=1$, si ha in particolare che: se ε è una simmetria di ordine n in C , ε^r è doppiamente inverso di ε^s (con r e s interi non negativi tali che $r + s = n$).

TEOREMA X. - L'ente w appartiene $C_{\beta\alpha}^*$ e a $C_{\alpha\beta}^*$.

Infatti w_1 che per il teorema VIII appartiene a $C_{\alpha\beta}^*$, apparterrà pure a $C_{\beta\alpha}^*$, cioè sarà $\beta\alpha^2w = \alpha w$ e, applicando β ad ambo i membri di questa segue senz'altro la prima parte dell'asserto; la seconda si proverà in guisa analoga.

TEOREMA XI. - L'ente w_1 appartiene anche a $C_{\beta\alpha}^*$ e w_2 appartiene anche a $C_{\alpha\beta}^*$.

La prima parte di questo teorema, che complessivamente viene ora ad essere un complemento del teorema IX, si prova senz'altro osservando che w_1 , appartenendo a $C_{\alpha\beta}^*$, è identificabile con un w ed applicando il teorema X; in guisa analoga si proverà la seconda parte.

TEOREMA XII. - Gli operatori α e β sono riflessivi in C^* .

Ciò che segue senz'altro dalle $(\alpha\beta)\alpha w = \alpha w$ e $(\beta\alpha)\beta w = \beta w$.

Vale osservare che nel caso in cui gli operatori α e β sono l'uno doppiamente inverso ovunque dell'altro può vantaggiosamente porsi $\beta = \alpha^{-1}$ e $\alpha = \beta^{-1}$, potendosi così definire le potenze con esponente intero negativo $\alpha^{-r} = (\alpha^{-1})^r = \beta^r$ e $\beta^{-s} = (\beta^{-1})^s = \alpha^s$ (con r e s interi positivi qualunque).

TEOREMA XIII. - Se γ è un operatore riflessivo in C^* ed ivi commutabile con α , osso è altresì commutabile con β .

Infatti, per essere $\gamma w = \gamma\alpha\beta w$, si avrà per ipotesi $\gamma w = \alpha\gamma\beta w$ e, applicando β ad ambo i membri di questa, discenderà $\beta\gamma w = \beta\alpha\gamma\beta w = \gamma\beta w$ giacchè $\gamma\beta w$ appartiene pur esso a C^* e, con ciò, il teorema è dimostrato.

Sia adesso ε una simmetria primitiva di ordino n in C^* ; ponendo $\gamma = \delta = \varepsilon$ e $u = v = w$ nelle $u = \gamma^r\beta\alpha\gamma^s u$ e $v = \delta^p\alpha\beta\delta^q v$ (con r, s, p, q , interi non negativi e tali che $r+s=p+q=n$) si ottiene $w = \varepsilon^r\beta\alpha\varepsilon^s w$ e $w = \varepsilon^p\alpha\beta\varepsilon^q w$, ma è pure $\alpha\varepsilon^s\varepsilon^p\beta w = w$ e $\beta\varepsilon^r\varepsilon^q\alpha w = w$; cosicchè dal confronto ordinato di queste due coppie di formule ricaveremo corrispondentemente due sistemi di $n-1$ coppie in generale diverse di enti corrispondenti in 2° grado e di tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{1,s}^* = \alpha\varepsilon^s w \\ w_{2,r}^* = \varepsilon^r\beta w \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} w_{1,p}^* = \varepsilon^p\alpha w \\ w_{2,q}^* = \beta\varepsilon^q w \end{array} \right.$$

con r, s, p, q , interi positivi e tali che $r + s = p + q = n$.

Se ε è commutabile con α in C^* i due sistemi di coppie ora considerati si riducono ad uno solo giacchè allora per $s = p$ si ha corrispondentemente $w_{1,s}^* = w_{1,s}^{**}$ e, per il teorema XIII, $w_{2,r}^* = w_{2,r}^{**}$.

Se ε non è primitiva si hanno riduzioni in entrambi i casi.

TEOREMA XIV. — Un ente di C^* , unito rispetto ad α lo è anche rispetto a β .

Infatti, per quanto detto al termine del § 2, è $\alpha\beta\bar{w} = \beta\bar{w}$; ma è pure $\alpha\beta\bar{w} = \bar{w}$ e quindi $\beta\bar{w} = \bar{w}$, c. v. d.

APPUNTI DI MALACOLOGIA MEDITERRANEA (*)

GIORGIO SILVIO COEN

SVMMARIVM. — Studia brevia nonnulla conchyliorum maris Mediterranei haec sunt in quibus genera etiam nova exarminantur.

Langue, ormai da molti anni, fra noi lo studio della malacologia mediterranea; dopo i lavori dei nostri antichi, dal COLONNA all'OLIVI, al CHIEREGHINI, al GUALTIERI, e, attraverso ai Dalmati, da DANILO e SANDRI al BRUSINA; dopo le opere cospicue dei Siciliani, dal BRUGNONE al BENOIT ed al mio Maestro amato e rimpianto, il MONTEROSATO, si può dire che taccia la nostra scienza; mentre anche all'estero, dopo il RISSO, il KOBELT, il WEINKAUFF, il BOURGUIGNAT ed ultimo fra i grandi, l'indimenticabile mio amico, il DAUTZENBERG, poco si è trovato di nuovo nei nostri mari. Mentre proseguono attivi gli studi biologici (dando a questa parola il vasto e vago significato attuale), la ricerca di nuove forme di molluschi e lo studio descrittivo e sistematico di esse, e la loro monografia ove occorra, non ha fatto sufficienti progressi. Ciò sebbene le opere stesse dei migliori Autori abbiano sovente bisogno di revisione, specialmente generica.

Non vi ha, invece, dubbio che nel Mediterraneo e particolarmente nell'Adriatico vi sia sempre molto da fare: io stesso, nella mia oscura condizione di studioso individuale, ho trovato e descritto, in questi ultimi anni, parecchie specie nuove, e persino, in Adriatico, tre nuovi

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 5 giugno 1943.

generi ormai riconosciuti e citati nelle grosse opere più recenti; ho descritto inoltre, in Mediterraneo, quattro specie nuove di *Emarginula* ed un grosso *Calliostoma*, del tutto insospettati; ed ho potuto compilare varie monografie di specie note, talvolta col risultato di rettificare attribuzioni generiche inesatte.

Ciò dico non per mettere in rilievo il mio modestissimo lavoro, ma per mostrare come se un semplice studioso, sprovvisto di mezzi di vasta ricerca, ha potuto fornire qualche utile contributo, assai più si potrà fare quando quei mezzi di studio potranno aiutare lavori seriamente organizzati.

La sistematica, *ars longa*, è purtroppo trascurata, a favore di ricerche biologiche, anatomiche ed altre, preziose senza dubbio e necessarie, ma non sempre richiedono la lunga preparazione che esige la sistematica!

In queste pagine sono raccolti alcuni studi recenti, relativi a specie o gruppi mediterranei: vi si esamina, ad esempio, la *Tritonalia erinaceus* Lin. (Murex) nelle sue forme tanto numerose e diverse, non tutte descritte o studiate prima; ed a questa nota ne va aggiunta una seconda, che esamina il genere in base a caratteri finora trascurati, con occasionali osservazioni su un attuale e pericoloso indirizzo della sistematica; altrove vi si studia la *Charonia Sequenzae* Aradas (Tritonium), tanto discussa e che spero rimanga definita nelle sue varie forme; vi sono esposte indagini sui *Pseudofusus* ed i *Vulgocerithium* e le forme della *Astraea (Bolma) rugosa* Lin. (Turbo); si ritorna sul *Pseudomurex Sofiae* Benoit (Murex); infine vi è una monografia del *Murex (Bolinus) brandaris* Linn. e di alcune sue forme mostruose.

Questi brevi studi hanno qualche interesse in sè, e soprattutto spero possano almeno richiamare l'attenzione dei pochi studiosi della malacologia mediterranea, e risvegliare in essi il desiderio di una nuova attività di ricerche sistematiche nell'ambito della nostra malacofauna, nella quale, ripeto, penso vi sia tuttora non poco da fare.

EMARGINULA DUBIA n. sp.

Conchiglia conica, allungata, molto regolarmente convessa; apertura subellittica coi lati, subretti nel mezzo, raccordati da due semicerchi, dei quali il posteriore è più ampio; la fessura, a lati taglienti, si addentra abbastanza profondamente verso il centro; essa è lunga m/m 2,5 sulla lunghezza complessiva di m/m 10 e cioè 1/4 dell'intera conchiglia.

L'apice, spirale e molto incurvato, dista, in proiezione verticale, m/m 1,75 dall'orlo posteriore, e cioè 1/8 della totale lunghezza.

Il peristoma è dovunque, ma non profondamente, crenato in corrispondenza con le costole radiali. Queste sono abbastanza sporgenti, a superficie arrotondato-convessa, lisce, in numero di 21 per ciascun lato, oltre a quella mediana posteriore; in tutto dunque 43. Esse sono incontrate da funicoli orizzontali più sottili e meno sporgenti, che determinano, al loro incontro, lievi noduli piatti, e, fra di esse, profonda e regolare clatratura.

Il fondo della fessura si prolunga fino all'apice in un largo profondo solco mediano; questo è diviso da grossi setti, posteriormente concavi, in una serie di profonde celle, delle quali si conta una ventina prima che si obliterino verso l'apice.

L'interno è lucente, vitreo, con l'impressione muscolare poco o nulla apparente; leggeri solchi radiali rispondono alle costole esterne. Gli orli interni della fessura, a differenza degli esterni acuti, sono ottusi e leggermente callosi. La sottigliezza e trasparenza del nicchio fa sì che dall'interno si scorga benissimo la scultura esteriore.

Il colore, internamente candido, è all'esterno di un grigio giallognolo,

Dimensioni: $L = m/m 10$, $l = m/m 6$, $h = m/m 4$.

Habitat: Mediterraneo (Spinelli, sic.).

Osservazioni: La specie, che era etichettata *E. fissura*, si stacca naturalmente tanto dalle specie capuliformi (*fissura* L., *cancellata* Phil., *capuliformis* Phil., *conica* Sch., *punctata* Monts.) quanto da quelle piatte (*Huzardi* Payr., *crebrisculpta* Coen., *octaviana* Coen) e si accosterebbe piuttosto, per la forma e le proporzioni alla *cristata*

Coen ⁽¹⁾; ma ne differisce anzitutto per il solco mediano in luogo della carena o « cresta » di quella specie, oltre che per il maggior numero, 43 invece di 33, delle costole radiali.

Per tutto quanto sopra, ritengo trattarsi di specie nuova, alla quale, malgrado la mia riluttanza, pongo il nome specifico di *dubia* appunto per l'incertezza che ha destato in me prima del suo studio più accurato. Penso che si troveranno ancora molte nuove forme di molluschi nel nostro mare, ove vi sia chi se ne occupi con passione e con seria preparazione; « quod est in votis ».

SUL « MUREX SOFIAE » ARADAS & BÉNOIT

Un mio breve studio precedente ⁽²⁾ dimostrava che il *M. Sofiae* ARADAS & BÉNOIT, il cui esemplare, tipico ed unico, appartiene alla mia collezione personale, è un *Pseudomurex*, per il quale, dal nome di ARADAS, feci la sezione *Aradomurex*; e provava soprattutto che la specie non è affatto una *Nassaria* (= *Hindsia* di H. & A. ADAMS), Buccinide di patria indo-australiana.

Il *M. Sofiae* era stato attribuito alle *Hindsia* dal KOBELT ⁽³⁾ e dal DAUTZENBERG ⁽⁴⁾. Quest'ultimo Autore, a proposito della specie raccolta dal Principe di Monaco alle Azzorre, da lui denominata *H. Grimaldii* e descritta e figurata a pag. 33 e figg. 4 a, b, c, d, della tav. 2, dice (*sic*): « Le *H. Grimaldii* appartient à un genre représenté dans l'Océan Indien et en Australie per une dizaine d'espèces; on n'en avait encore « indiqué aucune dans l'Océan Atlantique ».

Ed aggiunge (qui sta il bello): « La coquille décrite par ARADAS & BÉNOIT (*Conch. mar. viv. della Sicilia*, pag. 270, tav. 5, fig. 7) sous le « nom de *Murex Sofiae*, et dont le seul exemplaire a été trouvé à Palerme dans la zone coralligène, est également un *Hindsia*, mais elle « diffère essentiellement de la présente espèce par sa spire plus élevée,

⁽¹⁾ Per le 3 specie citate, vedi COEN, Pont. Acad. Scient., « Acta », a. III, vol. III, n. 10.

⁽²⁾ COEN, *Sulla pretesa presenza nel Mediterraneo del Gen. Hindsia etc.* « Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti », 1929, tomo 88, parte 2^a.

⁽³⁾ KOBELT, *Iconogr. der Schalent. Europ. Meeres-Conch.*, 1883, vol. 4^o, pag. 129-130, tav. 58, fig. 13.

⁽⁴⁾ DAUTZENBERG, *Contrib. à la faune malac. des Iles Açores*, Monaco, 1889.

« son dernier tour plus petit, sa sculpture plus délicate, composée de « côtes longitudinales moins fortes, plus espacées, et de cordons dé- « currents plus faibles; la conformation de l'ouverture est aussi très « différente chez le deux espèces; tandis qu'elle est rétrécie à la base « et qu'elle se termine par un canal effilé et double chez le *M. Sofiae*, « elle est fortement dilatée et terminée par un canal court et simple « chez le *H. Grimaldii* ».

Sempre nel citato mio studio osservavo che il *M. Sofiae* non può assolutamente confondersi con una *Hindsia*, richiamandomi alla diagnosi generica di questa, che riporto dal FISCHER⁽¹⁾: « Coquille ovale- « fusiforme; spire acuminée; tours costulés longitudinalement et treil- « lissés; ouverture ovale, terminée en avant par un long canal courbé « en dehors; labre arqué, épais, variqueux en dehors, sillonné intérieu- « rement, muni en arrière d'un tubercule dentiforme ». Caratteri questi precisi e generali di un genere nel quale è, a prima vista, variabilissima la forma delle conchiglie; per cui riproducevo figure di *Hindsia* dal CHENU⁽²⁾ e dagli ADAMS⁽³⁾ e figuravo un ottimo esemplare, della mia collezione, di *H. recurva* Sow.

Ad abundantiam, aggiungo ora quanto dice il WENZ⁽⁴⁾ a pag. 1174; ehe cioè, fra altro, il labbro delle *Hindsia* è « *innen gefürcht* » e al difuori « *meist varixartig* », ma soprattutto la columella, sopra quasi diritta, in basso arcuata, è « *mit Knötchen oder Fältchen* »; e l'orlo parietale, più o meno calloso, possiede posteriormente un tubercolo, « *einen Höcker* ».

Tornando sull'argomento, noto che il DAUTZENBERG, nell'*op. cit.*, così descrive la *H. Grimaldii*: « ...ouverture ovulaire, anguleuse ou « sommet, et se terminant à la base en un canal oblique et très court. « Labre arrondi, évasé, fortement épaissi à l'intérieur, tranchant et fine- « ment denticulé au bord ». Nulla di comune dunque con la *Hindsia* degli Adams; e pertanto nessun reperto di *Hindsia* nell'Atlantico.

Del resto, lo stesso DAUTZENBERG, in uno scritto posteriore⁽⁵⁾, retifica l'attribuzione della sua specie alle *Hindsia*; descrivendo infatti

(1) FISCHER, *Manuel de Conchyliologie etc.*, Paris, Savy, 1887, pag. 681.

(2) CHENU, *Manuel de Conchyliologie*, Paris, 1869, vol. 2°, pag. 161.

(3) ADAMS H. & A. *The Geners of recent mollusca*, 1858, pag. 138.

(4) WENZ, *Handbuch der Paläozoologie*, Gastropoda, Berlin 1941, pag. 1175.

(5) DAUTZENBERG & FISCHER, *Mollusques des dragages Ouest de l'Afrique*, Monaco 1906, pag. 25, figg. 6,7,8,

una seconda specie, *Anura clathrata*, egli aggiunge che « la coquille « que l'un de nous a décrite en 1889 sous le nom de *Hindsia Griedii* appartient au genre *Anura* et diffère de l'*A. Clathrata* etc... ».

Il FISCHER (*op. cit.*, pag. 629) descrive il gen. *Anura* Bellardi 1871 (tipo *Murex inflatus* Brocchi) ⁽¹⁾ come segue: « Coquille ovale-ventrue; « tours de spire convexes; labre arqué, subvariqueux extérieurement, « mais non sillonné; columelle simple, tordue; canal très court, fortement tordu en dehors ».

Questa diagnosi si riferisce al genere fossile, le due specie viventi del DAUTZENBERG essendo state scoperte dopo.

Mentre appare evidente l'appartenenza delle due specie dautzenberghiane alle *Anura*, sorprende che il valoroso conchigliologo abbia confuso con esse il gen. *Hindsia*, e tanto più che abbia in quest'ultimo posto il *M. Sofiae* che ha il peristoma continuo delle Coralliophilidae.

Da quanto sopra, appare ormai definitivamente chiaro:

- a) nell'Atlantico non si è mai trovato il gen. *Hindsia* (Buccinacea, Buccinidae);
- b) nell'Atlantico si sono invece scoperte due specie di *Anura*;
- c) il *Murex Sofiae* Aradas & Benoit ed il *M. serratus* Tiberi sono dei *Pseudomurex* (Muricacea, Coralliophilidae).

SU UN NUOVO GENERE DI BUCCINIDE.

Quanto precede ha origine da innegabili somiglianze fra conchiglie appartenenti a famiglie, anzi a superfamiglie, tanto diverse quando sfugga, anche a naturalisti di chiara fama e di grande valore, qualche carattere precipuo, con la conseguenza di errori grossolani. Appunto la somiglianza, notevole, della conchiglia in esame con quelle di cui sopra si è trattato, ma con le quali non ha nulla a vedere, mi ha indotto a studiarla.

Fra i relitti, non determinati, di una vecchia collezione, mi venne fatto di trovare una conchiglia, la cui attribuzione generica mi diede molto a pensare.

⁽¹⁾ BROCCHI, *Conchiologia fossile subappennina*, vol. 2º, tav. 9, figg. 6, 7.

Essa assomiglia, a prima vista, moltissimo ad una *Nassaria* (= *Hindsia*), ed ha scultura quasi identica a quella della *Anura Grimaldii*; ma si differenzia dalle *Anura* per il canale, che è piuttosto breve ed aperto, ma perfettamente formato e distinto e non bruscamente deviato a sinistra ed indietro, e per il labbro internamente non marginato nè ingrossato; e si stacca nettamente dalle *Nassaria* per la columella perfettamente liscia (cioè senza pieghe o rugosità e senza il tubercolo posteriore) e per il labbro internamente levigato senza crenature nè strie. Stranamente, ricorda assai non il *Murex Sofiae*; ma le pessime figure di esso date, specialmente dal KOBELT (*op. cit.*); un esame un poco meno superficiale distrugge questa impressione, quando si constati che il peristoma è completamente staccato dall'orlo columellare, mentre nel *M. Sofiae* è con esso continuo, come si conviene ad una specie Coralliofilide.

Essa mi pare rappresentare un nuovo genere di Buccinide, e fortunatamente (sebbene un poco « rotolato » dalle onde) l'esemplare è benissimo conservato. Per la grande rassomiglianza con le *Nassaria* e per la columella liscia, chiamerò il genere

Liohindsia gen. nov.

e, per la scultura bene caratteristica, chiamerò la specie

Liohindsia dimidiata n. sp.

Testa solida bucciniformis, ventricosa; spira conica elevatiuscula, apice obtuso-rotundato; anfr. 6 convexi, sutura parum impressa (nisi infra anfr. IV° et V° partim canaliculata). Anfractus embryonales 3, globosi, laevigati, (paullum erosi), a sequentibus bene distincti; anfractus normales 3, funiculis 5 decurrentibus valde prominulis (ultimo anfractu 13) induti, interstitiis undique funiculo minori dimidiatis; testa tota undis longitudinalibus validioribus creberrime signata, quae super funiculos nodulos regulares formant, sic superficiem eleganter clathratam. Ultimus anfractus magnus, 1/2 testae totius altus; apertura oblongo-ovata, postice acutiuscula, antice in canalem subrectum patulum, postice paullum deviatum, desinens. Labius simplex, extus non varicosus, intus non marginatus, non incrassatus, non crenatus nec sulcatus; columella excavata, laevis, infer torto-plicata, callo adnato.

Color undique albidus, interstitiis funicularum luteo-fuscis, apertura ac columella candidae.

Operculum: ?

Dimensiones: L = m/m 31, l = m/m 19; apertura L = m/m 18, l = m/m 9.

Habitat: ?

Conchiglia solida bucciniforme ventricosa, con spira conica piuttosto alta ad apice arrotondato ottuso; i giri sono convossi, separati da sutura poco impressa, salvo un tratto fra il 4° ed il 5° giro, dove essa è canaliculata (ma questo è carattere individuale). I primi giri embrionali, 3, sono globosi, lisci, molto ben distinti dai seguenti normali, che sono ancora 3, percorsi da 5 funicoli spirali sporgenti (13 sull'ultimo giro) i cui intervalli sono regolarmente dimezzati da un funicolo minore; l'intera conchiglia ha inoltre frequenti onde longitudinali, forti, le quali, all'incontro coi funicoli, formano noduli regolari, rendendo così elegantemente clatrata la superficie. L'ultimo giro è grande, alto la metà dell'intera conchiglia. L'apertura è ovato-oblunga. posteriormente piuttosto acuta; essa finisce anteriormente in un canale subretto, aperto, non deviato a sinistra e solo lievemente curvato all'indietro. Il labbro è semplice, non varicoso all'esterno e non marginato nè ingrossato, e non crenato nè solcato internamente; la columella è incavata, perfettamente liscia, con callosità parietale lieve ben distinta.

Colorazione uniforme biancastra, salvo gli intervalli fra i cordoni, che sono giallo-bruni, bocca e columella candide.

Opercolo: ?

Dimensioni: L = m/m 31, l = m/m 19; apertura, L = m/m 18, l = m/m 9.

Habitat: ?

SULLE TRITONALIA FLEMING 1828 (= OCINEBRA GRAY 1847).

Premetto a questa nota qualche osservazione su quanto non saprei definire se non come un eccesso, o vera mania, che ha già infettato, e minaccia sempre più gravemente la sistematica: e ciò perchè ne è sorto lo spunto proprio dallo studio dell'argomento che qui ci occupa.

In un'opera utilissima, che purtroppo è rimasta, e forse rimarrà incompleta ⁽¹⁾, il WENZ designa, con mia grande sorpresa, come *Purpura* Martyn 1784, le *Tritonalia*; nel WENZ si cercherebbe invano, anche in sinonimia, il gen. *Purpura* Bruguière 1789 (genotipo *P. persica* L.), nome usato sempre per il genere, ora scisso in numerosi altri generi e sottogeneri: ma il gen. *Purpura* del WENZ non è affatto quello di BRUGUIÈRE, ma del MARTYN; e ne indagai il perchè.

Consultando la traduzione letterale della *Universal Conchology* del MARTYN (pubblicata nel 1845 dallo CHENU), trovo che il MARTYN chiama *Purpura foliata* una *Tritonalia* del s. g. *Cerastoma*, che il WENZ pone senz'altro come genotipo di *Purpura* Martyn.

Ora occorre osservare che quest'ultimo Autore chiama *Purpura* tutti i *Murex*, ai quali da tutti, compreso il WENZ, è rimasto conservato il nome *Murex*, e che si tratta di un grossolano errore, come se ne trovano tanti nel MARTYN; questi chiama, per esempio, *Cardium* tutti i Veneridi (come *Tapes euglyptus*, *Lioconcha castrensis* ecc.) e persino MACTRIDI (come *Schizodesma Spengleri*) e battezza *Voluta* i *Conus*, *Patella* le *Dolabella* ed *Umbrella* e persino *Aratrum* uno *Strombus*, e così via. Ma, se si può spiegare e scusare tale confusione nel MARTYN, non è perdonabile che un autore moderno giunga a sconvolgere la sistematica, per una pretesa precedenza di data, basandosi su un errore di un antico: si tratta senz'altro di un capriccio; perchè, infatti, il WENZ non chiama addirittura *Purpura* tutti i *Murex*? e dove porrebbe la *Purpura persica* di Linneo?

Guai se l'opera del MARTYN cadesse in mano ad un principiante, e guai se anche quella del WENZ, pur ottima sotto tanti altri aspetti, fosse presa per base da un collega non abbastanza agguerrito per raccapezzarsi e per sbrogliare una simile matassa: ne avverrebbe una vera Babele; chè, se potremmo cavarcela quando si trattasse di generi noti, dove si andrebbe se fossero nuovi o non abbastanza famigliari al lettore?

La verità è che ora si fa un abuso della legge delle precedenza, che fu approvata appunto per evitare confusione e per dirimere le questioni che sorgessero sulla sistematica e sulla sinonimia; ora, il rimedio è peggiore del male; siamo arrivati al punto che si distruggono e

⁽¹⁾ *Handbuch der Palaeozoologie*, vol. 5, *Gastropoda*, per W. WENZ, edito da O. H. Schindewolf, F.lli Borntraeger, Berlino.

creano generi a iosa, anche per capriccio o per ambizione personale o per nazionalismo; si fanno, in una parola, quelle che un illustre amico mio chiama «tedesche»! E non è certo inutile risvegliare l'attenzione dei naturalisti, e gettare addirittura un grido d'allarme.

Ed ora entriamo nel nostro argomento.

Chiamiamo pure *Tritonalia* Fleming 1828 le *Ocinebra* Gray 1847.

Il numero e la disposizione delle varici sugli anfratti, e la presenza di onde o «costole» (rigonfiamenti longitudinali), fra due varici consecutive sono caratteri di grande importanza sistematica, come quelli che indicano sulla conchiglia lo sviluppo del mollusco durante la vita, ed hanno perciò un significato anatomico e fisiologico che trascende la conchiglia considerata in sè. Infatti, i numerosi generi che oggi sostituiscono il gran genere *Murex* di Linneo sono appunto fondati sui caratteri suaccennati; calza benissimo al nostro caso l'esempio del gen. *Chicoreus* Montfort 1810, divenuto poi sezione di *Murex* ed oggi riassunto al grado di genere a sè: esso porta precisamente tre varici a 120° intramezzate da una «costola». Per brevità chiamerò quest'*habitus*: «cicoroide».

Nelle *Tritonalia*, anzi nella stessa specie genotipo *T. erinaceus* L., esistono forme senza varici e con varici in numero variabile, ed è strano che anche autori sommi, come B. D. D. ⁽¹⁾ non abbiano tenuto in alcun conto un carattere tanto essenziale.

Il numero delle varici nella *T. erinaceus* — come tuttora la si considera — è variabilissimo, da zero (es. var. *torosa* Lam. = *Murex torosus* olim) a 13-14 (es. var. *clathrata* mihi), tutte però senza la «costola» intervaricale propria delle forme cicoroidi: e la specie comprende ancora alcune di queste.

Le forme non cicoroidi anderebbero, a mio avviso, raggruppate in sottogenere, che chiamerò:

- A) *Tritonalia* Fleming 1828 sensu stricto (= *Ocinebra* Gray 1847), con:
- » *erinaceus* L. s. s. — Atlantico, Mediterraneo, Adriatico — mia collezione;
 - » *rotunda* mihi, senza alcuna varice, ma solo con cercline labiale saliente cavo, e con profondi solchi interni penetranti — Inghilterra (Fulton) — mia collezione;

⁽¹⁾ BUCQUOY, DAUTZENBERG & DOLFFUS, *Mollusques du Roussillon*, Parigi, Buillièrre, 1882-1886, vol. I.

A) *Tritonalia lampusiopsis* mihi, di forma assai simile ad una *Lampusia*, con una sola varice prelabiale e labbro internamente crenato - Inghilterra (Fulton) - mia collezione;

» *humilis* mihi, piccola, non varicosa, con numerose costole longitudinali e forte cercine labiale - Napoli - mia collezione;

» *ruscuriana* Monterosato, altra piccola forma similissima ad un *Urosalpinx*, con grosso cercine labiale - Spagna meridionale, Algeria (Monterosato) - mia collezione;

» *torosa* Lam. (*Murex*), tozza, a grossi cordoni decorrenti, senza varici, ma, nell'adulto, con potente cercine labiale formato da ingrossamenti terminali dei cordoni - Marocco, Sicilia (Monterosato) - mia collezione;

» *cavernosa* Reeve (*Murex*), magnifica forma con 7 varici ampiamente foliose - rarissima nel Tirreno (Sowerby) - mia collezione.

Qui vengono le forme, non cirocoidi, provviste del « dente » o « corno » labiale, tutte pacifico-americane; questo carattere, comune a più generi, si considera ora di scarsa importanza: infatti, tutte le specie che lo posseggono, e che erano riunite in un solo genere, *Monoceros*, ora sono poste in *Nucella* (Sottogeneri *Acanthina*, *Acanthinucella*), in *Rapana* (Sottogeneri *Chorus*), in *Leucozonia*; Si avrebbe tutt'al più una sezione di *Tritonalia*:

» (*Cerastoma*) *spirata* Conrad - California (Field) - mia collezione;

» (*Cerastoma*) *engonata* Conrad - California (Field) - mia collezione.

Seguono le forme *cicoroidi* in un sottogenere:

B) *Ternaria* n. s. g. caratterizzato appunto da tre varici a 120° fra loro con « costola » intervaricale. Così:

» *chicoroides* mihi, con le varici grosse, ottuse, e costole assumentiformi di varici ma non raggiungenti il canale - Coste portoghesi (Monterosato) - mia collezione.

B) *Ternaria mercaensis* mihi, con le varici come la precedente ma ottuse ed arricciate - Somalia - mia collezione.

» *Hanleyi* Dautzenberg, grande e superba forma, simile alla *T. cavernosa* Reeve, con la quale gli Inglesi la confondono; ha tre grandi varici, che la rendono tipicamente triquetra, e forti costole intervaricali subvaricose, altrettanto foliate - Algeria (Tiberi-Monterosato) - mia collezione.

» *rejecta* Monterosato, piccola, a scultura attenuata - Portogallo (Monterosato) - mia collezione.

» *decussata* Risso - Tirreno (Monterosato), Adriatico (legi) - mia collezione. Questa forma, che è il *Murex decussatus* di Gmelin, è indicata come fossile del Piacentino dal BROCCHI, la cui figura è riprodotta dal WENZ; il PUSCH, nel 1937, ne fece un sottogenere *Jaton*, secondo WENZ: perchè?

» *eurypteron* Reeve (*Murex*), con vaste varici foliiformi e costole simili minori; di queste specie il JOUSSEAUME fece un sottogenere *Ocinebrellus* (1880) che non ritengo, come per la specie precedente, abbia alcuna ragione di essere.

Anche qui starebbe bene una nuova sezione per le *Ternaria* a corno labiale, per le ragioni più sopra esposte, e cioè:

» (*Spinostoma*), di cui sono esempi:

» » *Nuttalli* Conrad - California (Field) - mia collezione.

» (*Spinostoma*), *foliosa* Martyn (*Purpura*), di cui ho detto più sopra - Oceano Indiano.

Segue il sottogenere:

C) *Poropteron* Jousseaume 1880, comprendente piccole forme sudafricane, a 3 varici arricciate bene sviluppate ed intervalli lisci, caratterizzato da un particolare processo posteriore digitiforme delle varici, che si incurva verso la spira, conferendo alla conchiglia un aspetto speciale:

C) *Poropteron uncinarium* Lamarek (*Murex*) - Capo di B. S. - mia collezione;

» *Graagae* mihi: in questa specie il processo posteriore delle varici si incurva tanto verso la spira da raggiungere addirittura l'anfratto precedente, col quale si salda, in modo che ogni varice termina superiormente in un anello chiuso, affatto particolare alla specie. Essa trae il nome da quello della Sig.^{na} De Graag, naturalista olandese, che volle donarmi l'esemplare tipo, credendolo però un *Typhis Belcheri* - Margate (Natal) - mia collezione.

Va elencato finalmente il sottogenere:

D) *Dermomurex* Monterosato 1890, che il WENZ pone come sinonimo di *Tritonalia* - raro ma ben noto nella sua specie: » *scalarinus* Bivona - Palermo (Monterosato), Capri (Belini) - mia collezione.

DI UNA NUOVA FORMA MOSTRUOSA DI MUREX BRANDARIS L.

MUREX (BOLINUS) BRANDARIS LINN. N. VAR. *MONSTR. TUDICLOIDES*

In una antica collezione trovai una conchiglia classificata *Tudicla spirillus*, prov. Coromandel, ma che a prima vista si rivelava come tutt'altra cosa, sebbene la forma generale se ne avvicinasse un poco, rozzamente, a quella specie: anzitutto i caratteri generici delle *Tudicla* (primo l'apice turbinelloide elevato mammillare) non hanno nulla a vedere con quelli dell'esemplare di cui si tratta (primo l'apice acuto muricoide); poi un'analisi accurata dimostra evidentemente che si tratta di un individuo mostruoso di un Murice, e precisamente del *M. (Bolinus) brandaris* L., specie della quale ho avuto la ventura di descrivere altre interessanti anomalie (¹).

La conchiglia, nettamente biconica, è del tutto priva di spine; la spira, regolarmente conica, ad apice normale, è composta di sei giri,

(¹) Vedi COEN, *Nuova Sylloge Moll. Adriat.*, 1937, note 133, 134, figg. e « Boll. Soc. Ven. Storia Nat. », 1934, pag. 43, tav. 2, fig. 1, 2.

l'ultimo dei quali è circoscritto da una grossa carena ottusa ed ondulata, omologa e rispondente per posizione a quella che, nella forma normale, porta la serie superiore di spine; questa carena, internamente cava, forma, tutt'intorno al giro, un canale interno a sezione semicircolare terminante, su una profonda intaccatura aperta, svasata e riflessa, del peristoma, che viene così inciso in modo cospicuo e particolarissimo.

Sotto la carena, l'ultimo giro si attenua verso il basso in forma nettamente conica fino all'inizio del canale, il quale è retto, lungo, completamente aperto; tutta la conchiglia porta nove linee varicose longitudinali, cerciniformi sopra la carena, e sotto di essa crenate ed evidentissime sebbene poco o nulla sporgenti, che vanno dall'apice fino alla fine del canale; salvo lungo la carena, tutta la superficie è corsa da spessi funicoli spirali doppi, superanti le varici e separati da intervalli lisci.

L'apertura è di forma normale, a parte la svasatura in corrispondenza della carena; il labbro, liscio ed ingrossato sopra la carena, è al disotto crenulato e sporgente nella sua parte inferiore; la callosità columellare è sottile, applicata nella metà superiore, staccata e libera nella inferiore.

La colorazione è uniforme, giallo-cornea, e diviene rugginosa lungo le varici sopra la carena e su tutta questa; columella candida.

Dimensioni dell'esemplare descritto: $L = m/m\ 47$, $l = m/m\ 32$.

Habitat: il vecchio cartellino portava una indicazione indiana, naturalmente perchè si credeva trattarsi di una *Tudicla*; ma evidentemente è invece mediterraneo, dato che abbiamo davanti un *Bolinus brandaris*.

Ciò posto, la mente corre spontanea alla famosa *Pyrula provincialis* Martin, rivelatasi poi come mostruosità della *Cassidaria echinophora* L⁽¹⁾; e il procedimento, per dir così, della anomalia nei due casi è tanto analogo, che suggerisce una identità o per lo meno una stretta affinità dei due processi fisiologici e teratologici, origine delle due mostruosità.

(¹) Vedi COEN, in « Journal de Conchyliologie », 1928, pag. 77, pag. 5



SULLA PRESENZA E SULLA DISTRIBUZIONE DEL *LEUCOCHLORIDIUM MACROSTOMUM* (RUD.) IN ITALIA (*)

CARLO PIERSANTI

SUMMARIVM. — Ostendit Auctor nusquam alibi in Italia nisi certis in plagis, quae ad radices pertinent Alpium, *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) inveniri, idque tam raro, ut iure conici possit ad assuescendum Italiae regionibus condiciones necessarias non subesse. Quoniam vero animadvertit solas duplici transitu aves, in his autem illas tantum, quae ex Europae septentrionali parte advolaverint, *Leucochloridii macrostomi* (Rud.) adulta exemplaria secum ferre, cum et simplici transitu aves et eae, quibus Italia stabilis est sedes, omnino sint immunes, Auctor hypothesim hanc proponit: duplici transitu volucres parasitico illo distomide infectas, iter per Italiam facientes, idoneis uti condicionibus, quibus a parasitis liberentur.

Si sa che il *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) è un Trematode parassita, eterosseno, digenetico, emimetabolo (manca nel suo ciclo evolutivo lo stadio di redia), che ha quali ospitanti provvisori per le fasi monontiche dello sviluppo (*miracidi*, *sporocisti*, *cercarie*) alcuni Polmonati Stilommatofori del genere *Succinea*, e quali ospitanti definitivi per la fase anfiontica molteplici Uccelli che gli Autori riferiscono a specie di ampia diffusione.

Nello studio della distribuzione geografica del predetto distomide, che risulta abbastanza frequente nei territori dell'Europa settentrionale (paesi Scandinavi, Germania, Russia, Inghilterra, Francia, Sviz-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Lepri il 5 giugno 1947.

zera, ecc.) è interessante notare come dagli elmintologi non ne sia stata finora citata la presenza in Italia, se non limitatamente all'unico rinvenimento accennato dallo Stossich, il quale, appunto nel 1892, trovò presso Monfalcone (Gorizia) forme adulte di *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) su *Numenius tenuirostris* Wieill.

Occupandomi particolarmente delle condizioni di vita delle specie di *Succinea* italiane, in più di 20 anni di peregrinazioni e di raccolte sistematiche condotte personalmente attraverso varie zone della nostra Penisola, ho potuto non soltanto verificare qua e là, in periodi diversi, la presenza del *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) sulle *Succinea*; ma, dopo lo studio di abbondante materiale necroscopico (materiale costituito principalmente di visceri intestinali), procuratomi da tassidermisti, da cacciatori e da gestori di paretai che erano meco in relazione, mi è occorso di stabilire altresì un abbastanza frequente parassitamento da parte del *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) su Uccelli catturati in epoche e regioni diverse.

Le *Succinea* italiane che interessano questa mia particolare nota, perchè portatrici intermedie di *Leucochloridium macrostomum* (Rud.), appartengono alle 4 specie più comuni del genere predetto, e sono precisamente: la *Succinea putris* L.; la *Succinea pfeifferi* Rossm.; la *Succinea elegans* Risso; la *Succinea oblonga* Drap.

Corologicamente considerate, le 4 specie indicate hanno, con altre affini, una vasta dispersione specialmente nella Valle Padana, scendendo anche ad arricchire, in alcune località ben definite, la fauna malacologica costiera ed interna dell'Italia centrale e meridionale.

Trattasi di specie igrofile di Gasteropodi che amano i territori permanentemente acquitrinosi ed umidi, preferendo la vicinanza dei corsi più o meno grandi o dei bacini di acqua dolce (fiumi, canali, laghi, stagni). Si trovano di solito aderenti alla base dei ciuffi di *Carex*, di *Scirpus*, di *Juncus*, di *Glyceria*, oppure sui fusti e sulle foglie delle piante che mostrano di costituire il loro cibo preferenziale (*Urtica urens*; *Brunella vulgaris*; *Sisymbrium officinale*; *Veronica beccabunga*; *Malachium aquaticum*; *Sinapis arvensis*; *Knautia arvensis*, ecc.).

DATI RACCOLTI E FATTI OSSERVATI

In due Tabelle che seguono sono elencati, con riferimenti cronologici, i dati relativi ai reperti da me effettuati tanto per le forme monontiche quanto per quelle anfiontiche del *Leucochloridium macrostomum* (Rud.). Tali dati, per quanto non troppo numerosi o discontinui, inducono a fare alcuni importanti rilievi ed a stabilire speciali considerazioni che mi sembrano degne di un certo interesse.

Più precisamente: la Tabella I si riferisce alla indicazione dei rinvenimenti di *Succinea* italiane infestate dal *Leucochloridium macrostomum* (Rud.); la Tabella II invece riguarda le osservazioni compiute su Uccelli parassitati dallo stesso Distomide.

A. - Osservazioni sugli stadi di infestazione verminosa
negli ospitatori intermediari.

1. - Non v'è dubbio che la presenza del *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) nel territorio della nostra Penisola assume, per le fasi nepioniche ospitate da *Succinea*, aspetto di rarità e di pronunciata limitazione nell'area distributiva. È da notare in modo particolare che l'area distributiva dei focolai di parassitamento identificati non si effonde in ampie propaggini, nè lungo la pianura Padana, nè, tanto meno, in altre zone, ancorchè adatte, dell'Italia centrale e meridionale (ciò è stato accertato mediante estesa esplorazione di molte regioni del territorio italiano). Detta area sembra interessare soltanto poche stazioni isolate e sparse della fascia subalpina, abitate dalle *Succinea*.

2. - La mancanza sulle *Succinea* di reperti di forme larvali di *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) in zone in altre epoche infestate fa pensare ad una sporadica immissione del parassita, immissione destinata ad esaurirsi per l'impossibilità del compimento del ciclo biologico.

3. - Come fatto del tutto nuovo, è da rilevare il parassitamento da parte del *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) di alcune specie di *Limnaea* (*Limnaea peregra* Müll.; *Limnaea limosa* L.) e di *Physa*

fontinalis L. concomitanti con le *Succinea* infestate dallo stesso verme e trovate fuori dell'acqua (gli Autori hanno sempre descritto le forme larvali di *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) come tipiche ed esclusive inquiline delle specie di *Succinea*).

A proposito della variata mediazione del *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) ho compiuto alcune ricerche provocando il parassitamento sperimentale della *Limnaea peregra* Müll. Sono riuscito, seguendo i procedimenti usati da ZELLER e da HECKERT per le *Succinea*, a controllare per individui allevati in laboratorio l'effettivo sviluppo su *Limnaea peregra* Müll. di miracidi provenienti da uova di *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) adulti rinvenuti in Uccelli, ed a seguire sugli ospiti occasionali la successiva evoluzione dello stroma austorio e delle corrispondenti sporocisti. Debbo rilevare in merito che gli esperimenti dello sviluppo del *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) sulle *Limnaea* sono stati condizionati al mantenimento degli individui mediatori in uno stato di conveniente emersione dell'acqua; mentre in caso di sommersione nell'acqua del bacino di allevamento non mi è riuscito di ottenere in alcun modo l'evolversi del parassitamento (questo fatto farebbe supporre che lo stato di emersione dall'acqua da parte del mediatore forma una necessità per la vita del *Leucochloridium* in rapporto col suo ospite, come del resto avviene nelle *Succinea*, che in effetti vivono sempre in ambiente umido, ma fuori dell'acqua).

B. - Osservazioni sugli stadi di infestazione verminosa
negli ospitatori definitivi.

1. - In base al materiale studiato, è da osservarsi in Italia l'esclusivo parassitamento da parte delle forme gerontiche del *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) sugli Uccelli migratori di doppio passo, trasferentisi dall'Europa settentrionale ai quartieri meridionali del bacino mediterraneo e non in senso inverso.

2. - Appare impressionante la costante integrità nei confronti del *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) da parte degli Uccelli stanziali d'Italia. Tale integrità è tanto più notevole in quanto si è sempre verificata sugli animali di questa categoria che si trovavano nelle medesime zone abitate dalle *Succinea* parassitate.

CONCLUSIONI

Se ulteriori e più vaste indagini riusciranno a confermare quanto da me è stato osservato ed esposto, a proposito della presenza e della diffusione del *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) nel territorio italiano, bisognerà riconoscere che esistono realmente nel nostro Paese elementi di interferenza tali da rendere impossibile o comunque da frenare la propagazione del parassita per una conseguente endemizzazione.

Dove ricercare le possibili cause inibitrici di ciò?

Mi preme insistere sul fatto molto significativo per cui da noi gli Uccelli stanziali non si mostrano mai parassitati dal *Leucochloridium macrostomum* (Rud.), anche dove esistono focolai di *Succinea* infestate da tale verme; mentre d'altra parte si registrano soltanto casi di Uccelli mediatori affetti da *elmintiasi leucochloridica* nel periodo migratorio che fa spostare detti Uccelli dai quartieri settentrionali d'Europa a quelli Italiani, più meridionali, e non in senso inverso. Siccome, sperimentando su alcuni nidiacei di merli (*Turdus merula* L.) appositamente parassitati da *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) sono riuscito, mediante speciale vittitazione obbligata (con frutti di *Bryonia dioica*), a provocare la completa disinfezione verminosa, penso che anche in natura l'ingestione spontanea, accidentale o ricercata, di bacche, di semi, o di altri organi di piante a principî vermifughi trovati non di rado nell'ingluvie o nel ventriglio di Uccelli (assenzio, tanaceto, timo, valeriana, asaro officinale, semi di cocomero asinino, semi di *Teucrium scordium*, ecc.), talora di speciali insetti, o di convenienti cibi o bevande utili, possa agire favorevolmente nel medesimo senso. In questo caso le migrazioni di certi Uccelli assumerebbero un ruolo terapeutico particolare, partecipando, con provvidi effetti antielmintici, in occasione del cambiamento del quartiere, ad una funzione di disinfezione curativa.

TAVOLA I.

Specie di <i>Succinea</i> parassitate in Italia da cercarie di <i>Leucochloridium macrostomum</i> (Rud.)	Indicazione degli anni e delle zone esplorate, corrispondenti al parassitamento di <i>L. macrostomum</i> (Rud.) su <i>Succinea</i>	Specie di <i>Gasteropodi Pulmonati</i> concomitanti delle <i>Succinea</i> ed occasionalmente parassitate da <i>Leucochloridium macrostomum</i> (Rud.) con indicazione degli anni del rinvenimento	Indicazione degli anni in cui le <i>Succinea</i> di talune zone, in altre occasioni rinvenute parassitate da cercarie di <i>L. macrostomum</i> (Rud.), sono state trovate completamente libere dal parassita predetto
<i>Succinea putris</i> L.	Bobbio 1912, 1926, 1928, 1934, 1938, 1940. Como (vicinanze del lago), presso Varenna 1929, 1940. Lugano (vicinanze del lago) 1926, 1932. Saluzzo (nei pressi) in tre zone diverse 1934.	<i>Limnaea (Radix) peregra</i> Müll. 1928 2 esemplari. <i>Physa fontinalis</i> L. 1926 2 esempl., 1932 5 esempl.	Bobbio 1929, 1930, 1931, 1935, 1936. Saluzzo 1930, 1931, 1935, 1936.
<i>Succinea pfeifferi</i> Rossm.	Lago di Pusiano (Brianza) 1928. Lugano (vicinanze del lago) 1926. Varese (vicinanze del lago) 1941.	<i>Limnaea (Radix) peregra</i> Müll. 1928, 5 esemplari. <i>Limnaea (Radix) limosa</i> L. 1926, 1 esemplare.	

TAVOLA I.

Segue

Specie di <i>Succinea</i> parassitate in Italia da cercarie di <i>Leucochloridium macrostomum</i> (Rud.)	Indicazioni degli anni e delle zone esplorate, corrispondenti al parassitamento di <i>L. macrostomum</i> (Rud.) su <i>Succinea</i>	Specie di <i>Gasteropodi Pulmonati</i> concomitanti delle <i>Succineae</i> ed occasionalmente parassitate da <i>Leucochloridium macrostomum</i> (Rud.) con indicazione degli anni del rinvenimento	Indicazione degli anni in cui le <i>Succineae</i> di talune zone, in altre occasioni rinvenute parassitate da cercarie di <i>L. macrostomum</i> (Rud.), sono state trovate completamente libere dal parassita predetto
<i>Succinea pfeifferi</i> Rossm.	Aquileia 1931, 1932, 1933, 1942. Resia (vicinanze del lago) 1929, 1939, 1941.		Aquileia 1934, 1935, 1936, 1938. Resia (vicinanze del lago) 1930, 1931, 1932.
<i>Succinea elegans</i> Risso.	Alba 1928, 3 esemplari.		
<i>Succinea oblonga</i> Drap.	Susa 1913. Moncenisio 1920. Iseo (vicinanze del lago) 1931, 1940.		

N. B. — Tutte le catture della *Succinea* parassitate da *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) sono state effettuate al termine della primavera od all'inizio dell'estate.

TAVOLA II.

Specie di Uccelli europei più comunemente indicati quali ospiti definitivi di <i>Leucochloridium macrostomum</i> (Rud.)	Rapporti delle specie con la sede frequentata in Italia. S = specie stazionaria. P = specie di passo. D. P. = specie di doppio passo.	Specie di Uccelli italiani rinvenuti parassitati dalla forma adulta di <i>Leucochloridium macrostomum</i> (Rud.); (le specie parassitate sono indicate dall'asterisco)	Data, località e numero degli esemplari catturati in Italia di Uccelli parassitati da <i>Leucochloridium macrostomum</i> (Rud.)
<i>Acanthis cannabina</i> L. (fanello) . . <i>Acrocephalus aquaticus</i> Gmel. (pagliarolo) <i>Acrocephalus arundinaceus</i> L. (canaraccione) <i>Acrocephalus palustris</i> Bechstein. (cannaiaola verdognola) <i>Copella gallinago</i> L. (beccaccino) .	D. P. e S. P. D. P. (estiva) D. P. (estiva) D. P. (invernale)	— — * * *	— — 1924 (ottobre) Ferrara 1 es. 1921 (ottobre) Padova 1 es. 1925 (ottobre) Lugano 1 es. 1920 (ottobre) Futa 1 es. 1927 (ottobre) Molinella 1 es. 1932 (ottobre) Comacchio 3 es. 1935 (fine settembre) Vercelli 1 es. 1938 (ottobre) Grosseto 1 es.
<i>Carduelis carduelis</i> L. (cardellino) . <i>Cinclus cinclus</i> Brehm. (merlo acquaiolo) <i>Coracias garrulus</i> L. (ghiandaia marina) <i>Corvus corone</i> L. (cornacchia nera) . <i>Emberiza palustris</i> Savi. (passera di palude)	S. S. D. P. S. S.	— — — — —	— — — — —

TAVOLA II.

Specie di Uccelli europei più comunemente indicati quali ospitatori definitivi di <i>Leucochloridium macrostomum</i> (Bud.)	Rapporti delle specie con la sede frequentata in Italia. S = specie stazionaria. P = specie di passo. D. P. = specie di doppio passo.	Specie di Uccelli italiani rinvenuti parassitati dalla forma adulta di <i>Leucochloridium macrostomum</i> (Bud.); le specie parassitate sono indicate dall'asterisco	Data, località e numero degli esemplari catturati in Italia di Uccelli parassitati da <i>Leucochloridium macrostomum</i> (Bud.)
<i>Emberiza schoeniclus</i> L. (migliarino di palude)	D. P. (<i>invernale</i>)	*	1925 (ottobre) Ferrara 1 es. 1928 (novembre) Comacchio 1 es. 1930 (ottobre) Iseo (presso lago) 1 es.
<i>Erethacus rubecula</i> L. (pettirosso) . <i>Fringilla coelebs</i> L. (fringuello) . . <i>Fulica atra</i> L. (folaga) <i>Gallinula chloropus</i> L. (gallinella d'acqua) <i>Garrulus glandarius</i> L. (ghiandaia) <i>Lanius excubitor</i> L. (avetia maggiore) <i>Larus ridibundus</i> L. (gabbiano comune) <i>Limicola falcinellus</i> Pontopp. (gambecchio frullino)	S. S. S. S. S. D. P. P.	— — — — — — —	— — — — — — —
<i>Luscinia megarhynchos</i> Brehm. (rosignolo) <i>Lymnocyptes minimus</i> Brün. (frullino) <i>Motacilla alba</i> L. (ballerina)	D. P. (<i>estiva</i>) D. P. D. P. S.	* — — —	1921 (settembre) foci Arno 1 es. 1936 (settembre) Codigoro 1 es.

TAVOLA II.

Segue

Specie di Uccelli europei più comunemente indicate quali ospiti definitivi di <i>Leuconchloridium macrostomum</i> (Rad.)	Rapporti delle specie con la sede frequentata in Italia. S = specie stazionaria. P = specie di passo. D. P. = specie di doppio passo.	Specie di Uccelli italiani rinvenuti parassitati dalla forma adulta di <i>Leuconchloridium macrostomum</i> (Rad.); (le specie parassitate sono indicate dall'asterisco)	Data, località e numero degli esemplari catturati in Italia di Uccelli parassitati da <i>Leuconchloridium macrostomum</i> (Rad.)
<i>Motacilla flava</i> L. (ourettola gialla) <i>Numenius phaeopus</i> L. (chiurlo picc.)	D. P. D. P. (<i>invernale</i>)	— *	— 1920 (agosto) Saluzzo 1 es. 1924 (settembre) Pavia 1 es. 1925 (settembre) Comacchio 3 es. 1929 (settembre) Pisa 1 es. 1930 (settembre) Ferrara 5 es.
<i>Numenius tenuirostris</i> Vieill. (chiurlo) <i>Panurus biarmicus</i> L. (basettino) <i>Passer domesticus</i> L. (passera oltrem.) <i>Passer montanus</i> L. (passera mattugia) <i>Philomachus pugnax</i> L. (combattente) <i>Phoenicurus phoenicurus</i> L. (codirosso)	D. P. (<i>invernale</i>) S. S. S. D. P. (<i>invernale</i>) D. P. (<i>estiva</i>)	* — — — * *	1938 (settembre) Codigoro 2 es. — — — 1926 (settembre) foci Arno 1 es. 1930 (ottobre) Merano 1 es. 1931 (ottobre) Merano 2 es. 1932 (fine settembre) Resia (presso lago) 1 es.
<i>Picus viridis</i> Hart. (picchio verde) <i>Porzana porzana</i> L. (vottolino) <i>Pyrrhula pyrrhula</i> L. (ciuffo magg.) <i>Rallus aquaticus</i> L. (porciglione) <i>Recurvirostra avosetta</i> L. (avocetta)	S. D. P. D. P. S. D. P. (<i>invernale</i>)	— — — — *	— — — — 1925 (settembre) Ravenna 1 es.

Specie di Uccelli europei più comunemente indicati quali ospitatori definitivi di <i>Leucocloridium macrostomum</i> (Bnd.)	Rapporti delle specie con la sede frequentata in Italia. S = specie stazionaria. P = specie di passo. D. P. = specie di doppio passo.	Specie di Uccelli italiani rinvenuti parassitati dalla forma adulta di <i>Leucocloridium macrostomum</i> (Bnd.); (le specie parassitate sono indicate dall'asterisco)	Data, località e numero degli esemplari catturati in Italia di Uccelli parassitati da <i>Leucocloridium macrostomum</i> (Bnd.)
<i>Scolopax rusticola</i> L. (beccaccia) . .	S. e D. P. (<i>invernale</i>)	*	1921 (ottobre) Loiano 1 es. 1925 (ottobre) Jesi 1 es. 1926 (settembre) Imola 1 es. 1929 (ottobre) Raticosa 1 es. 1939 (settembre) Como 1 es. — — —
<i>Sitta europaea</i> Wolf. (picchio murat.) <i>Sylvia atricapilla</i> L. (capinera) . . <i>Sylvia communis</i> Lath. (sterpazzola) <i>Sylvia nisoria</i> Bohst. (bigia padovana) <i>Turdus philomelos</i> Brehm. (tordo comune)	S. S. e D. P. D. P. P. P. (<i>invernale</i>)	— — — — *	1921 (ottobre) Loiano 2 es. 1922 (ottobre) Imola 2 es. 1924 (ottobre) Jesi 1 es. 1929 (ottobre) Ferrara 1 es. 1933 (ottobre) Bobbio 2 es. — —
<i>Turdus merula</i> L. (merlo) <i>Turdus viscivorus</i> L. (tordela) . . <i>Vanellus vanellus</i> L. (pavoncella) .	S. S. D. P. (<i>invernale</i>)	— — *	1922 (ottobre) Vercelli 1 es. 1931 (novembre) Comacchio 1 es. 1932 (ottobre) Pavia 1 es. 1938 (novembre) Budrio 1 es.

ANNOTAZIONI ALLA TAVOLA II.

a) Le osservazioni sugli Uccelli ritenuti probabili portatori di *Leucochloridium macrostomum* (Rud.) sono state compiute su materiale raccolto in diverse stagioni ed in varie regioni d'Italia;

b) Per le specie stanziali le osservazioni stesse, espletate per numerosi individui, sono state specialmente effettuate nelle aree nelle quali esistevano focolai di *Succinea* parassitate;

c) Nella maggior parte dei casi i vermi trovati sugli Uccelli parassitati aderivano superficialmente alla mucosa intestinale, meno numerosi negli individui di specie di mole minore (talora soltanto due o tre), più numerosi negli individui di mole maggiore (persino una cinquantina). In tutti gli Uccelli parassitati l'intestino e la cloaca si presentavano più o meno spiccatamente congestionati, raramente ulcerati. I contenuti fecali contenuti negli intestini medesimi erano di solito notevolmente fluidi.

BIBLIOGRAFIA

1. BRAUER A., *Die Süßwasserfauna Deutschlands*. «Jena», 1909.
2. CARUS C. G., *Beobachtungen über einen merkwürdigen schlingefärbten Eingeweidewürm, Leucochloridium paradoxum mihi und dessen parasitische Erzeugung in einer Landschnecke, Succinea amphibia Drap. Helix putris L.* «Nova Acta Leop. Carol», 1885.
3. DAWES. *The Trematoda*, Cambridge, 1946.
4. ENIGK K., *Leucochloridium paradoxum in Succinea oblonga*. «S. B. Ges. Naturf. Fr.», Berl., 1932.
5. HECKERT G., *Zur Naturgeschichte des Leucochloridium paradoxum*. «Zool. Anz.», 1887.
6. — *Untersuchungen über die Entwicklungs- und Lebensgeschichte des Distomum macrostomum*. Cassel., 1889. Bibliotheca Zoologica.
7. Mc. INTOSH A., *Notes on the genus Leucochloridium Carus (Trematoda)*, «Parasitology», 1927.
8. PARONA C., *L'elmintologia italiana dai suoi primi tempi all'anno 1910-1912*.
9. SCHULTZE M., *Ueber ein exemplar von Leucochloridium paradoxum aus Succinea amphibia*. «Sitzgsber d. niederrhein. Ges. f. Natur. u. Heilkunde zu Bonn.», 1871.
10. SIBBOLD C. T., *Leucochloridium paradoxum*. «Z. wiss. Zool.», 1853.
11. STOSSICH M., *Distomi degli Uccelli*. Lavoro monografico. «Boll. Soc. Adriat. Sc. Nat.», vol. XIII, Trieste, 1892.
12. — *Osservazioni elmintologiche*. «Boll. Soc. Adriat. Sc. Nat.», Trieste, 1900.
13. WESEMBERG. LUND. C., *Contributions to the development of the Trematoda Digenea*. Part. I. — *The biology of Leucochloridium paradoxum*. «Naturw. Math. Abh.», Raekke, 1931.
14. WOOHEAD A. E., *The mother sporocysts of Leucochloridium*. J. Parasit., 1932.
15. — *An extraordinary case of multiple infection with the sporocyst of Leucochloridium*. J. Parasit., 1936.
16. ZELLER E., *Ueber Leucochloridium paradoxum Car. Und die weitere Entwicklung seiner Distomenbrut*. «Zeitsch. f. wiss. Zool.», 1874.

DEDUZIONE DEI RISULTATI DI UNA GALLERIA AERODINAMICA DA QUELLI DI UN CANALE IDRICO(*)

PIETRO TEOFILATO

SVMMARIVM. — Auctor tradit quomodo ratio, qua se gerit bidimensionalis flatus aëris in obstaculum incurrens repraesentari possit per similem aquae rationem.

Quod maximi est momenti, cum ita de aëris ratione investigari possit parvis hydraulicis machinis, vitatis magnis sumptibus quibus opus est ad aerodynamicos cuniculos instruendos.

POSIZIONE DEL PROBLEMA

§1. — Il problema della rappresentazione del fenomeno fluidodinamico di una corrente bidimensionale di aria in presenza di un ostacolo, mediante analogo fenomeno di una corrente di acqua, è stato già oggetto di due miei precedenti lavori⁽¹⁾.

L'importanza di questa rappresentazione risiede nella grande economia di potenza e di impianti che verrebbe raggiunta, allorchè, in luogo di una galleria aerodinamica a grande velocità, sia pure ultrasonora, si sperimentasse sopra un canale di acqua, a corrente sia pure ipercritica.

Se si pone l'ipotesi che nel canale siano trascurabili le accelerazioni verticali dell'acqua rispetto all'accelerazione g della gravità, si

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Armellini il 19 luglio 1947.

(1) P. TEOFILATO, *Contributo alla rappresentazione analitica di una corrente gassosa mediante una corrente idrica*, «Atti del VI Congresso di Mecc. Appl.». Parigi, 1946; *Monografie scientifiche del Ministero dell'Aeronautica*. 1947, Febbraio.

ottiene un'analogia scoperta dal BLABOUCHIWSKY⁽¹⁾ tra il comportamento dell'acqua e quello di un gas cosiddetto ipotetico, perchè inesistente in natura, in quanto il rapporto dei suoi calori specifici è eguale a 2.

L'analogia richiede che il rapporto delle altezze di acqua si muti nel rapporto delle radici quadrate delle pressioni in gas, mentre rimangono identici i rapporti tra le velocità omologhe e le rispettive velocità di ristagno nei due campi, tenuto presente che il potenziale di velocità in acqua soddisfa alla stessa equazione cui soddisfa il potenziale di velocità in gas, salvo a mutare la velocità critica locale \sqrt{gh} (h altezza di acqua) nella locale velocità del suono.

L'inesistenza del gas ipotetico porta che l'analogia *quantitativa* tra acqua e gas ipotetico, divenga solo *qualitativa* tra acqua ed aria, mentre, veramente interessante, stante l'economia degli impianti idrici, sarebbe una corrispondenza quantitativa tra fenomeni in acqua e fenomeni in aria. Per questo occorre poter passare quantitativamente dai fenomeni in gas ipotetico a quelli in aria, e la ricerca di un metodo che permettesse tale passaggio ha formato appunto l'oggetto dei miei sopra citati lavori.

Lo scopo è stato da me raggiunto esibendo una trasformazione la quale muta l'equazione del potenziale di velocità del gas ipotetico, in quella relativa all'aria, dove invece il rapporto dei calori specifici è eguale ad 1,4. Però la prolissità dei calcoli necessari per arrivare ai richiesti risultati quantitativi finali, mi ha presto sollecitato ad esaminare un caso approssimato, ove fosse possibile semplificare straordinariamente i calcoli. I profili sottili a debole incidenza si sono prestati allo scopo, e l'analogia (quantitativa) che ad essi si riferisce è stata studiata nel secondo dei due lavori accennati⁽²⁾.

Tuttavia, il desiderio di svincolare lo studio dalle limitazioni imposte dalla validità dei risultati approssimati ora specificati, mi ha indotto a riprendere in esame il problema generale, e nella nota presente sono riuscito difatti ad ottenere il passaggio dai risultati quantitativi in acqua a quelli quantitativi in aria per profili ed incidenze qualsiasi.

(1) PREISWERK, *Anwendungen gasdynamischer Methoden auf Wasserströmungen mit freier Oberfläche*. Züsich 1938, Ediz. Leemann.

(2) P. TEOFILATO, *loc. cit.*, Appendice I.

§ 2. - L'EQUAZIONE DEL POTENZIALE DI VELOCITÀ. - L'equazione del moto stazionario [piano (xy) di un fluido compressibile dipendente da un potenziale di velocità $\varphi(x, y)$ è notoriamente]:

$$[1] \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left[1 - \frac{1}{U^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{1}{U^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left[1 - \frac{1}{U^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0 .$$

dove U è la velocità locale del suono, cioè:

$$[2] \quad U^2 = \frac{k-1}{2} (\beta^2 - u^2 - v^2) ,$$

espressa per mezzo di k , rapporto dei calori specifici, di u, v componenti di velocità secondo gli assi x ed y , di β velocità massima. La [1] è valida tanto nel campo subsonoro che in quello ultrasonoro.

Mediante la trasformazione di LEGENDRE, data dalle formole:

$$[3] \quad \varphi = ux + vy - \Phi(u, v); \quad x = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial v}; \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

la [1] si muta in:

$$[4] \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \left[1 - \frac{v^2}{\alpha^2 (\beta^2 - u^2 - v^2)} \right] + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \frac{uv}{\alpha^2 (\beta^2 - u^2 - v^2)} + \\ + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \left[1 - \frac{u^2}{\alpha^2 (\beta^2 - u^2 - v^2)} \right] = 0 ,$$

dove si è posto:

$$[5] \quad \frac{k-1}{2} = \alpha^2 .$$

Sotto l'ipotesi del § 1, la [1] e la [2] sussistono inalterate per una corrente in acqua, purchè la U si interpreti come velocità critica ($U^2 = g \cdot h$)

dove h è il livello del liquido e si assuma $k=2$, ossia $\alpha^2 = \frac{1}{2}$.

Inoltre si ha per le velocità massima e minima:

$$[6] \quad V_{\max} = \beta; \quad V_{\min} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cdot \beta = \beta_0$$

dove β_0 e β sono come è noto ⁽¹⁾ i raggi dei due cerchi del piano odografo tra i quali sono comprese le epicicloidi costituenti le linee caratteristiche dell'equazione [4].

Introducendo le coordinate polari:

$$[7] \quad \xi^2 = u^2 + v^2, \quad \eta = \arctan \frac{v}{u},$$

e ponendo:

$$[8] \quad F^2 = \frac{\xi^2(1 + \alpha^2) - \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2(\beta^2 - \xi^2)\xi^2}$$

si ottiene in luogo della [4]:

$$[9] \quad L(\Phi) = \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - F^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 \eta^2} - \xi F^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \Phi = 0.$$

§ 3. TRASFORMAZIONE DEL PIANO ODOGRAFO E DEL PROFILO. - È facile verificare ⁽²⁾ che, posto:

$$[10] \quad \theta(\xi, \alpha) = -\frac{\beta}{\beta_0} \arccot \cot \frac{\beta_0}{\beta} \xi F + \arccot \cot \xi F,$$

la trasformazione:

$$[11] \quad \begin{cases} \theta(\xi, \alpha) = \theta(\xi_0, \alpha_0) \\ \eta = \eta_0 \end{cases}$$

muta il piano odografo (ξ_0, η_0) del gas (α_0) , cioè del gas per cui il rapporto dei calori specifici è legato ad α_0 mediante la [5], nel piano odografo (ξ, η) del gas (α) . Infatti le [11], insieme con altra equazione che non trascriviamo, trasformano l'equazione [9] avente il parametro α_0 , nella medesima, ma col parametro α .

Orbene, suppongasì conosciuto il profilo nel gas α_0 e siano:

$$[12] \quad x_0 = \varphi_0(s_0), \quad y_0 = \psi_0(s_0)$$

le sue equazioni parametriche nelle quali il parametro s_0 è l'arco.

⁽¹⁾ « Atti del Covegno 1935, Acc. d'Italia », pag. 186.

⁽²⁾ Cfr. P. TROFILATO, *loc. cit.*

Avremo:

$$[13] \quad \frac{dx_0}{ds_0} = \dot{\phi}_0(s_0) = \cos \eta_0, \quad \frac{dy_0}{ds_0} = \dot{\psi}_0(s_0) = \sin \eta_0, \quad \frac{ds_0}{dt} = \xi_0,$$

mentre, per il profilo trasformato di equazioni:

$$[14] \quad x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad (s = \text{arco trasformato})$$

avremo, tenuto conto della seconda delle [11]:

$$[15] \quad \frac{dx}{ds} = \cos \eta_0, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \eta_0, \quad \frac{ds}{dt} = \xi$$

ossia:

$$[16] \quad \frac{dx}{ds} = \dot{\phi}_0(s_0), \quad \frac{dy}{ds} = \dot{\psi}_0(s_0);$$

e da [13] e [15]:

$$[17] \quad ds : ds_0 = \xi : \xi_0.$$

Ma, dalle [11], esplicitando ξ si otterrà:

$$[18] \quad \xi = \Gamma(\xi_0, \alpha, \alpha_0) \quad (\Gamma \text{ funzione nota});$$

per cui la [17] diverrà:

$$[19] \quad ds = \frac{\Gamma}{\xi_0} ds_0.$$

Immaginiamo per un momento di conoscere la funzione $\xi_0(s_0)$ (che determineremo nel paragrafo seguente); cioè si conosca la velocità ξ_0 in funzione dell'asse s_0 , lungo il profilo del gas α_0 , ed allora la [19] diverrà:

$$[20] \quad ds = \Gamma(\xi_0(s_0), \alpha, \alpha_0) \frac{ds_0}{\xi_0(s_0)}$$

onde dalle [16] e [20] risulterà:

$$x = \int \dot{\psi}_0(s_0) \Gamma(\xi(s_0), \alpha, \alpha_0) \frac{ds_0}{\xi_0(s_0)} ; \quad y = \int \dot{\psi}_0(s_0) \Gamma(\xi(s_0), \alpha, \alpha_0) \frac{ds_0}{\xi_0(s_0)} ;$$

che sono appunto le equazioni del profilo trasformato per il gas (α), in funzione del parametro s_0 arco del profilo di partenza immerso nel gas (α_0).

§ 4. RICERCA DI $\xi_0(s_0)$. - Lungo il profilo trasformando si può ottenere $\xi_0(s_0)$ sperimentalmente ⁽¹⁾, ma anche mediante il calcolo teorico.

Difatti è noto che, se $\bar{\alpha}$ è l'angolo che la corrente fa, con la normale all'onda di urto, è $\Delta\bar{\alpha}$ eguale all'angolo di deviazione della corrente ⁽²⁾.

Pertanto, nel caso di urti infinitesimi e cioè di deviazioni infinitesime (come avvengono lungo un profilo nel quale la curvatura vari con continuità) sarà $d\bar{\alpha}$ niente altro che l'angolo di contingenza del profilo e perciò, se $R_0(s_0)$ indica il raggio di curvatura nel punto che corrisponde all'arco s_0 , sarà:

$$[22] \quad d\bar{\alpha} = \frac{ds_0}{R_0(s_0)}, \quad \bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 + \int_0^{s_0} \frac{ds_0}{R_0(s_0)}.$$

D'altra parte, la nota condizione di rifrazione ⁽⁴⁾ della corrente attraverso la linea d'onda dà:

$$\frac{\tan \bar{\alpha}}{\rho} = \frac{\tan (\bar{\alpha} + \Delta \bar{\alpha})}{\rho + \Delta \rho},$$

dove ρ è la densità; quindi, per salti infinitesimi:

$$[23] \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\bar{\alpha}}{\sin \bar{\alpha} \cos \bar{\alpha}}$$

⁽¹⁾ Tenendo conto che in gas ipotetico (α_0) e in acqua i profili sono identici e così pure sono eguali i rapporti di velocità in due coppie di punti omologhi.

⁽²⁾ Cfr. STEFANO TEOFILATO (Junior), « 1° Supplemento alle Monografie Scientifiche del Ministero dell'Aeronautica », Gennaio 1947.

Se poi p è la pressione, V la velocità, allora il principio di energia e la legge adiabatica [a patto che si escludano discontinuità finite ⁽¹⁾] forniscono:

$$[24] \quad \frac{dp}{\rho} = -d\left(\frac{V^2}{2}\right), \quad p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k.$$

Così, dalle [22], [23], [24], eliminando p, ρ, α si ricaverà mediante semplici quadrature V , ossia ξ_0 , in funzione di s_0 . Si sarà ottenuta quella funzione $\xi_0(s_0)$ che occorre per effettuare le quadrature [22] le quali danno le equazioni parametriche del profilo trasformato.

Per il gas ipotetico ($k=2$), indicando con l'indice uno gli elementi relativi alla punta di prua, si ha:

$$(\xi_0(s_0))^2 = (\xi_0^2)_1 - \frac{2}{k-1} \frac{\rho}{\rho_1} + \frac{2p_1}{k-1} \cdot \frac{\tan\left(\bar{\alpha}_1 + \int_0^{s_0} \frac{ds_0}{R(s_0)}\right)}{\tan \bar{\alpha}_1}.$$

§ 5. CALCOLO DELLE PRESSIONI. — Anzitutto ricordiamo la formola:

$$[25] \quad \frac{p}{p_0} = \left[1 + \frac{\rho_0}{p_0} \frac{k-1}{2k} (V_0^2 - V^2)\right]^{\frac{k}{k-1}},$$

dove ρ_0, p_0, V_0 sono densità, pressione e velocità in un dato punto P di un generico filetto fluido. Poichè d'altra parte, essendo U_0 la velocità del suono in quel punto, si ha:

$$U_0^2 = \frac{p_0 k}{\rho_0},$$

la formola [25], tenuta presente la [5], diventa:

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 + \alpha^2 \frac{V_0^2 - V^2}{U_0^2}\right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

Se poi il punto P è un punto di ristagno (serbatoio), allora, valendosi delle formole:

$$U^2 = \alpha^2 (V_{\max}^2 - V^2), \quad U_0^2 = \alpha^2 V_{\max}^2,$$

(1) Ciò accade fra l'onda di prua e quella di poppa.

e adottando l'indice s per gli elementi del serbatoio, avremo:

$$q = \frac{p}{p_s} = \left(1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

ovvero, per la [18]:

$$q = \left[1 - \frac{\Gamma^2(\xi_0, \alpha, \alpha_0)}{\beta^2}\right]^{1/2}$$

e, per il principio di omogeneità:

$$q = \left[1 - \frac{\xi_0^2}{\beta^2} \Gamma_*^2\left(\frac{\xi_0}{\beta}, \alpha, \alpha_0\right)\right]^{1/2}.$$

Si supponga adesso che α_0 corrisponda al gas ipotetico. Dalle esperienze in acqua a quelle in gas ipotetico, si passa, a norma dell'analogia di RIABOUCHIWSKY, mantenendo lo stesso profilo ed il rapporto $\xi_0:\beta$ (tra velocità locale e velocità massima del gas ipotetico) eguale al rapporto analogo dell'acqua. D'altra parte, quest'ultimo, a causa del principio di energia (e in assenza di viscosità), è dato da:

$$\left(\frac{\xi_0}{\beta}\right)^2 = \frac{h_s - h}{2h_s},$$

dove h_s è l'altezza d'acqua di ristagno ed h l'altezza locale generica.

Pertanto, essendo nell'aria $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e nel gas ipotetico $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

risulterà:

$$q = \left[1 - \frac{h_s - h}{2h_s} \Gamma_*^2\left(\sqrt{\frac{h_s - h}{2h_s}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^{1/2}$$

e si otterranno così le pressioni lungo il profilo in aria, mediante il rilievo delle altezze d'acqua lungo il profilo in acqua.

PROPOSTA DI TUBO ROENTGEN
CON ANODO ANULARE E DIAFRAMMA FENESTRATO
PER L'AUMENTO
DEL TASSO DI ASSORBIMENTO IN PROFONDITÀ
DELLE RADIAZIONI IN TERAPIA (*)

RENZO BOSSI

SVMMARIVM. — Auctor proponit rationem solvendi problema concentrationis radiationum X, adhibito tubo aliquo qui anodum toroidalem habet et diaphragma radiationes ipsas in fascem convergentem colligens. Tubi et diaphragmatis exemplum exhibetur.

Uno dei fini per i quali i radiologi si sono maggiormente battuti è quello di trasportare nelle profondità dei tessuti una dose percentuale alta di radiazioni, in rapporto alla dose che incide in superficie, il che impropriamente si suol dire migliorare il tasso di trasmissione in profondità. In realtà al radiologo non interessa migliorare detto tasso riferito alla radiazione, in quanto alte intensità di energia radiante raggiungano i piani profondi, ma aumentare la quantità di energia radiante *assorbita* in profondità, in relazione a quella assorbita in superficie. Gli effetti biologici della radiazione non sono infatti dovuti all'energia radiante che attraversa l'organismo, ma a quella

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Gustavo Colonnetti il 17 luglio 1946.

che viene assorbita o degradata (attraverso ai fenomeni rispettivamente dell'assorbimento e diffusione), nè quest'ultima è sempre proporzionale alla prima. Sarebbe perciò più proprio parlare di tasso di energia assorbita o dose relativa di profondità (relative Tiefendosis).

Sino ad ora si è cercato di migliorare detto tasso variando la qualità o la forma dei fasci radianti; scopo della nostra ricerca è di migliorare ulteriormente il rapporto dell'energia assorbita modificando il focolaio di emissione dei tubi generatori di raggi X.

Non sarà fuor di luogo passare qui brevemente in rassegna quali sono le possibilità dei primi due gruppi di accorgimenti riguardanti qualità e forma dei fasci. Le modificazioni di qualità dei fasci hanno una finalità evidente finchè sono contenute in certi limiti: occorre anzitutto omogeneizzare il fascio policromatico che esce dall'ampolla, privandolo delle radiazioni troppo molli che verrebbero assorbite in totalità dagli strati superficiali. Questo scopo viene raggiunto con la filtrazione. L'omogeneità che noi richiediamo al fascio di radiazioni è relativa ai tessuti viventi: tale che la percentuale di radiazioni che viene assorbita in strati successivi sia sempre la stessa: le λ del fascio omogeneizzato devono pertanto essere comprese in valori tali (sempre piccoli) per cui il coefficiente di assorbimento del tessuto vivente per le varie λ che compongono il fascio, sia pressapoco uguale.

L'omogeneità può essere raggiunta nel campo di onde più o meno piccole: gamme di onde assai brevi comportano un maggiore assorbimento negli strati profondi di quanto non avvenga per onde più lunghe. Oltre un certo limite, però, essendo la quantità assorbita sempre più piccola e non crescendo in rapporto inverso la quantità diffusa, il vantaggio di usare brevi λ non è più sensibile, specie quando si usino grossi campi. A ciò si aggiunga che tutti i tentativi per avvicinare alle λ delle radiazioni γ quella dei raggi Roentgen sono subordinati all'aumento di potenza degli impianti radiologici, aumento di potenza che, quando ci si voglia portare ai milioni di Volta, importa tale mole, costo e complicatezza degli impianti, da renderne l'uso limitato a pochissimi Istituti altamente dotati e specializzati.

Ai fini pratici, essendo l'effetto biologico delle radiazioni indipendente dalla lunghezza d'onda delle stesse, è sufficiente usare tensioni massime al tubo di 180, 200 kV. Tensioni maggiori non compor-

tano un vantaggio che sia proporzionale alla mole ed al costo degli impianti.

È utile richiamare qui brevemente alcuni concetti fondamentali relativi alle misure Roentgen: l'unità internazionale r è la quantità di radiazione che libera, in un cm.³ di aria a 0° centigradi e a 76 cm. di pressione di colonna di mercurio, una quantità unitaria di elettricità. Essa deve intendersi perciò come unità di energia assorbita, relativa all'unità di volume e cioè al centimetro cubo. L'attività biologica delle radiazioni è in rapporto alla concentrazione del flusso Roentgen, e cioè all'illuminazione, relativamente all'assorbibilità delle radiazioni considerate. È perciò la dose per unità di volume, normalmente tradotta in r , ma che può anche essere espressa dalla differenza tra flusso entrante e flusso uscente, che determina gli effetti sulla sostanza vivente.

Al radiologo però non interessa solo la dose per unità di volume, ma anche la quantità complessiva di radiazioni che viene assorbita nel corpo del paziente e che, per forza di cose, va a colpire anche i tessuti sani portandovi alterazioni biologiche che sono dannose e che occorre contenere nel limite minimo. In altre parole non è desiderabile l'assorbimento di radiazioni Roentgen al di fuori del focolaio che si desidera irradiare.

Quest'ultimo concetto di dose-volume (Raumdosis: Chaoul) può essere espresso in $r - \text{cm}^2$ o, più comodamente in $r - \text{litro}$ ed è calcolabile con complesse formule matematiche. Ma un'idea chiara noi possiamo formarci di quello che è la dose di volume, immaginando un fascio radiante conico che colpisca un corpo di un dato spessore.

La parte del corpo irradiata ha forma di un tronco di cono che noi possiamo dividere in tanti strati ciascuno di spessore unitario. Considerando per semplicità una dose uniforme in ciascun punto di ogni strato e misurando il numero di r ricevuto per ogni cm.³ dei vari strati, potremo ricavare la dose di volume moltiplicando la dose in r di ogni strato per il volume stesso e sommando poi tutti i valori.

Ne deriva che radiazioni che erroneamente vengono dette avere le stesse intensità in quanto forniscono lo stesso numero di r in superficie, possono dare una dose di volume assai diversa a seconda della loro forza di penetrazione (strato emivalente). In realtà, radiazioni assai penetranti e radiazioni molli che forniscano lo stesso numero di r in

superficie, sono di assai diversa intensità. Le prime infatti, dopo aver subito in superficie un assorbimento pari alle seconde, sono in grado di portare agli strati profondi una quantità di radiazioni percentualmente sempre più alta in rapporto a quella trasportata da un fascio di raggi molli. In altre parole le radiazioni più dure, possedendo un'energia maggiore ed essendo pertanto meno assorbibili devono essere più intense per fornire lo stesso numero di r : la dose infatti non è altro che quella parte dell'irradiazione che viene assorbita.

La cosiddetta gammaterapia nel campo delle radiazioni Roentgen, oltre a non modificare sostanzialmente la dose relativa di profondità, richiederà pertanto una intensità di radiazione assai maggiore che la normale terapia profonda. In ogni caso la terapia profonda verrà fatta a costo di alte dosi di volume, maggiore ancora quando vengono usate altissime tensioni.

Non possiamo evitare di fare qui un'osservazione: si ha l'impressione che fino ad oggi il concetto di dose-volume sia stato piuttosto trascurato dai radiologi, il che è anche spiegabile con la mancanza di un'unità che traduca la dose totalmente assorbita. A ciò non serve infatti l'unità r : dire, ad esempio, che ad un corpo sono stati somministrati un certo numero di r con una determinata qualità di radiazioni, su un campo rispettivamente di 200 e di 400 cm.², muta sostanzialmente il quadro dell'irradiazione, non soltanto per il tasso di energia assorbita in profondità, che sarà nel secondo caso lievemente superiore, ma anche per la dose-litro assorbita complessivamente dal paziente che sarà nel secondo caso ben due volte maggiore.

Accorgimenti che sfruttano la forma e ripartizione dei fasci permettono di migliorare ulteriormente la dose relativa di profondità: il primo accorgimento vantaggiosamente usato è di limitare al minimo la divergenza dei raggi, allontanando il tubo quanto più è possibile dalla pelle, relativamente al rendimento del tubo stesso che rapidamente decresce in proporzione inversa al quadrato della distanza. Con tale accorgimento, la densità del flusso nel corpo irradiato, via via che ci si allontana dai tessuti superficiali, sarà maggiore che usando radiazioni più divergenti, perchè il fascio primitivo sarà meno disperso. La dose assorbita per unità di volume risulterà quindi più grande.

Un altro accorgimento sfrutta non più le radiazioni primitive ma quelle secondarie generate in ogni punto del corpo del paziente, per

degradazione delle radiazioni primitive. Dette radiazioni che si propagano in ogni direzione, vanno ad aggiungersi alle radiazioni primitive che colpiscono la zona da irradiare, situata al centro del campo. È ovvio che potremo accrescere la quantità delle radiazioni secondarie senza mutare la dose superficiale accrescendo la massa irradiata, ingrandendo quindi il campo di irradiazione. Crescerà conseguentemente, come già si è detto la dose litro.

Esistono dei limiti oltre i quali l'ingrandimento del campo non è più vantaggioso: le radiazioni secondarie, di λ piuttosto grande, sono infatti facilmente assorbibili, e, per poter essere utilizzate nella zona che interessa, devono essere originate non molto lontano da essa.

Altro accorgimento utile alla metodica roentgenterapica è la moltiplicazione delle porte d'entrata, il che porta alla convergenza dei vari fasci nella zona profonda che interessa. Con ciò si ottiene una migliore ripartizione spaziale e si evita un forte carico su un volume limitato di tessuti sani. Detto artificio può essere ancora migliorato usando la cosiddetta terapia rotatoria: ruotando cioè il tubo o il paziente, talchè la zona interessata sia il fulcro del movimento rotatorio.

Ciò può essere ottenuto a spese di impianti estremamente complessi e costosi: in ogni caso, pur diluendo notevolmente la dose sulla cute e la dose unitaria che viene assorbita dai tessuti sani, la dose-volume totale assorbita dal paziente è la stessa che si usasse un campo unico e fisso con limitatore analogo. La terapia rotatoria può essere applicata solo in Centri altamente dotati, mentre correntemente si usa aumentare il numero delle porte d'entrata: in media tre campi.

Riassumendo, possiamo, con i sistemi fino ad ora sfruttati, migliorare il tasso di energia assorbita in profondità sia uniformando il fascio radiante con l'uso di filtri, sia aumentando la penetrazione delle radiazioni, sia usando forti distanze focali, sia impiegando grandi campi. Una maggiore diluizione di radiazioni nei tessuti sani si ottiene moltiplicando le porte d'entrata o con la terapia rotatoria.

Detti accorgimenti non possono essere spinti oltre ad un certo limite sia per la complicatezza e costosità degli impianti Roentgen ad altissime tensioni, e degli impianti per terapia rotatoria, sia per la diminuzione di rendimento del tubo quando si impieghino forti distanze focali, sia per la dannosità dei grandi campi in relazione alle forti dosi litro assorbite dal paziente.

* * *

Un deciso miglioramento della tecnica roentgenterapica potrebbe essere raggiunta qualora noi disponessimo di un fascio di radiazioni convergente. Potremmo in tal modo concentrare in profondità le radiazioni del fascio primario. Detta idea non è nuova: il LENZI, riprendendo le esperienze del fisico PIERUCCI, ha sperimentato speciali collettori, costruiti con cristalli di mica o di grafite, che funzionano come una lente astigmatica e prevede vantaggi notevoli per il terapeuta, qualora questi possa disporre di radiazioni convergenti, che concentrino l'energia Roentgen in una ristretta zona - ed in quella sola - spazialmente ben definita, risparmiando così i tessuti circostanti. Le sue esperienze, che durano da anni, non hanno ancora portato a risultati pratici a causa delle forti difficoltà incontrate.

Noi crediamo tuttavia che lo stesso scopo potrebbe essere raggiunto mediante una radicale modificazione del sistema generatore e convogliatore delle radiazioni X, le cui basi teoriche formano appunto l'oggetto di questo lavoro ⁽¹⁾.

Il LENZI stesso cita un progetto di VON WIESER, ripreso dal MARAGLIANO, di un tubo formato di un grosso anticadoto concavo, accoppiato ad un limitatore costituito da un cilindro di piombo perforato da numerosi canalicoli, diretti in modo tale da assicurare il passaggio di fasci convergenti in un dato punto e solo in questo, cilindro che eventualmente potrebbe essere rotante, secondo la proposta di MARAGLIANO.

Detto progetto presta il fianco a obiezioni che, forse, spiegano le ragioni per cui non è mai stato portato a termine: le grandi dimensioni che è necessario dare allo specchio anticatodico, unitamente alla piccola distanza focale necessaria per ottenere un fascio di radiazioni sufficientemente convergente su un fuoco di una certa estensione, sono due requisiti incompatibili uno con l'altro. Dovendo infatti il catodo incandescente essere posto al centro geometrico della callotta sferica costituita dall'anticadoto, e dovendo essa callotta se di grandi dimensioni, avere una curvatura assai grande, il catodo dovrà essere posto a tale distanza dall'anticadoto da rendere necessaria la costruzione di un tubo così esteso in altezza da vietare l'impiego di brevi

(1) Proprietà intellettuale dello scrivente: brevetto n. 4500 del 12 giugno 1946.

distanze focali a meno di ridurre la callotta a piccole dimensioni. In tal caso, però le radiazioni, su un fuoco esteso qual'è quello richiesto dalla roentgenterapia profonda, avrebbero un decorso solo debolmente convergente. La natura del diaframma poi, è tale da consentire la convergenza dei fasci soltanto ad una distanza fissa dal diaframma stesso.

Secondo il nostro progetto, invece, il tubo radiogeno presenta un anticatodo nastriforme, incurvato così da costituire un circolo chiuso, a foggia di anello, e un catodo pure anulare, concentrico ad esso. La superficie anticatodica è verticale. Le radiazioni emergenti da ogni punto dell'anticatodo vengono diaframmate da una lamina di piombo fenestrata, sottostante al tubo. La finestra è di forma anulare, di diametro inferiore a quello dell'anticatodo ed è attraversata da una serie di lamine radiali di piombo, di numero e dimensioni convenienti che la suddividono in camere separate. Tali lamine radiali hanno la funzione di permettere il passaggio delle radiazioni provenienti dalla superficie anticatodica e contenute in piani verticali, mentre assorbono le irradiazioni più inclinate. Le radiazioni contenute in un piano verticale, ma fortemente oblique, che tenderebbero ad uscire dalla camera diametralmente opposta della finestra schermante, sono arrestate da un corto limitatore cilindrico, entro il quale la finestra stessa è racchiusa. (fig. 1 e 2).

Si realizza così la possibilità di irradiare la cute con un numero altissimo (teoricamente infinito) di campi convergenti in un fuoco situato al disotto della cute stessa. La zona di sovrapposizione dei fasci componenti il nostro sistema avrà la forma di due coni contrapposti, aventi base comune. Supponendo i fasci di forma lamellare il fuoco sarà concentrato su una linea verticale che unisce i due apici dei coni, passando per il centro della base. Il fuoco infatti verrebbe a ricevere radiazioni da tutti i punti dell'anticatodo, mentre ogni punto compreso in altra zona dei coni, riceverebbe radiazioni solo da due punti diametralmente opposti dell'anello anticatodico.

In realtà il fuoco sarà una larga stria cilindrica, e non una linea, vuoi perchè l'anticatodo non è, in sezione, un punto, vuoi perchè le concamerazioni della finestra schermante lasciano in realtà uscire un fascio radiante esteso nelle tre dimensioni.

Le radiazioni X che fuoriescono da un settore della finestra illumineranno una sezione qualsiasi dei coni, per esempio la base, secondo una striscia passante per il centro della sezione, completamente sovrapposta alla striscia di illuminazione inviata dal settore controlate-

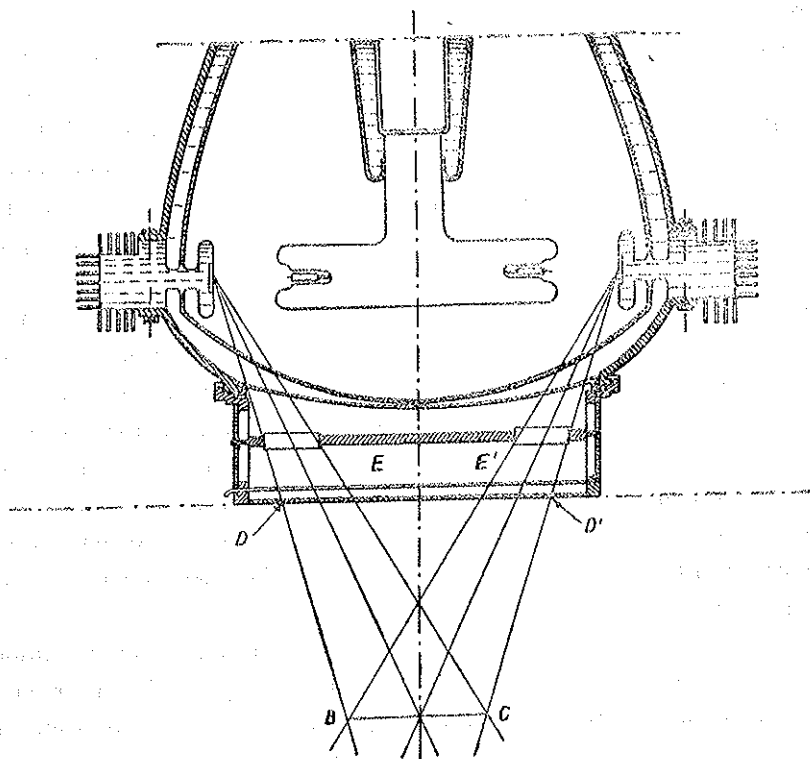


FIG. 1.

Schema costruttivo del tubo ed accessori e decorso di due fasci contrapposti.

rale della finestra e parzialmente sovrapposta a quelle contigue. Detta striscia ha un'illuminazione uniforme: la somma delle distanze di ogni suo punto dai due fuochi contrapposti, è infatti pressapoco uguale. La sovrapposizione di tutte le striscie su quel piano determinerà però una maggiore illuminazione al centro, che rappresenta la sezione della striscia cilindrica focale. Rende chiaramente l'idea il seguente esempio: una moneta messa di spigolo su un tavolo e vista dall'alto presenta

uniformità di tono sul contorno semicircolare che possiamo scorgere, e che a noi appare rettilineo. Ma se diamo alla moneta movimento di trottola, potremo scorgere un cerchio concentrico ben distinto e una zona circostante sfumata sempre più man mano che ci si avvicina alla circonferenza.

In realtà abbiamo fino ad ora considerato solo le radiazioni primarie che costituiscono una parte soltanto delle radiazioni che giun-

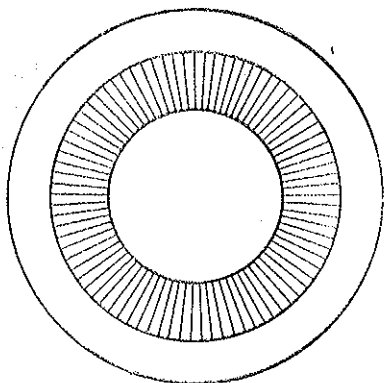


FIG. 2.

Pianta della finestra schermante.

gono in profondità, (per esempio: a una profondità di 10 cm. dalla cute ritroviamo solo il 20 % delle radiazioni del fascio primario generato da un apparecchio a tensione costante di 180 kV, filtro un mm. Cu., distanza focale 60 cm., mentre tenendo conto delle radiazioni secondarie la dose relativa di profondità è, a 10 cm. del 40 %).

Le radiazioni secondarie che si propagano in ogni senso verranno a colmare in parte la sproporzione di dose fra centro e periferia della zona di sovrapposizione dei fasci. Solo con l'esperimento sarà possibile stabilire esattamente la ripartizione delle dosi nei due coni di sovrapposizione. È tuttavia prevedibile che concentrando le radiazioni in un volume assai piccolo, la dose alle varie altezze del cono, sarà praticamente uniforme. Un maggior carico centrale si avrà invece concentrando i raggi su focolai più grandi. Usando i comuni accorgimenti

della metodica roentgenterapica è presumibile che si possano raggiungere dosi uniformi: basterà, nelle sedute successive, mettere a fuoco punti sempre diversi, e usare due campi contrapposti.

È d'altra parte probabile che la possibilità di creare una zona centrale di maggior carico di dose possa, in determinate eventualità della pratica terapeutica, costituire un non trascurabile vantaggio.

Si realizzerebbe infatti, in queste condizioni, una situazione assai prossima a quella che si produce con l'infissione di preparati radiferi nella compagine dei tessuti neoplastici.

Con questo metodo il focolaio di irradiazione (radium) viene portato al centro della massa patologica, dove si ha, così, il massimo di carico di dose, e si aggredisce il tumore dal centro verso la periferia, anzichè dalla periferia verso il centro come avviene nella normale radioterapia e nella radiumterapia di superficie.

E i risultati pratici, quali ne possano essere le spiegazioni teoriche fisico-biologiche su cui non è qui il caso di intrattenerci, dimostrano come, nei casi in cui la pratica dell'infissione è attuabile, siano frequentemente assai più favorevoli che non con gli altri metodi.

È difficile poter stabilire teoricamente il rendimento del sistema qualora si irradi un corpo dello stesso coefficiente di assorbimento dei tessuti organici, soprattutto per la pratica impossibilità di stabilire a priori l'entità delle radiazioni secondarie. È in ogni caso prevedibile una ben migliore utilizzazione delle stesse, condizionatamente alla forma del fascio radiante. Dette radiazioni, globalmente considerate, saranno generate infatti in punti più vicini al focolaio irradiato di quanto non sia in un fascio divergente avente le stesse caratteristiche e lo stesso flusso.

Per avere un'idea della possibilità del sistema, basta immaginare quale potrebbe essere il rendimento nell'aria. In tal caso vengono considerate solo le radiazioni primarie trascurando l'assorbimento dell'aria stessa: il flusso Roentgen che passi per un piano anulare corrispondente alle linee D E e E' D' della figura che ne rappresenta una sezione, taglierà analogamente un piano circolare più lontano il cui diametro sia B C.

Essendo detto piano circolare più piccolo del primo, la densità del flusso (illuminazione) passante per lo stesso, sarà in proporzione

inversa al rapporto tra le due superfici. Detto rapporto, del quale parleremo più a lungo tra poco, varia, nelle condizioni in cui vorrebbe impiegato il sistema per roentgenterapia profonda, da 2 a 5.

Riassumendo, mentre le radiazioni del fascio primario che rispondono alla legge del quadrato delle distanze, andranno nel nostro caso concentrandosi in profondità, sulla zona descritta, essendo i fasci molteplici e convergenti, le radiazioni secondarie verranno più vantaggiosamente impiegate che nei sistemi ora in uso per la favorevole ripartizione spaziale dei punti nei quali vengono generate rispetto alla zona che interessa irradiare.

Sostanzialmente viene realizzato un sistema analogo a quello delle irradiazioni con campi multipli o della terapia rotatoria, con il vantaggio, oltre che della maggior semplicità della metodica e minore complicatezza dell'impianto, relativamente alla terapia rotatoria, di poter efficacemente ridurre, a parità di dose di focolaio, la dose di superficie e la dose litro complessivamente assorbita dal corpo del paziente. Nella terapia rotatoria e nella terapia con campi multipli, infatti, mentre, come prima si è detto, le radiazioni che colpiscono i tessuti sani vengono diluite (ad esempio: basterà dare 2000 *r* su tre porte diverse anziché darne 6000 su una sola, raggiungendo lo stesso scopo di fornire 3000 *r* di dose di focolaio essendo del 50 % il tasso di assorbimento in profondità), la dose litro è la stessa che se si usasse un campo unico delle stesse dimensioni. Naturalmente gli effetti sono meno gravi in relazione alla diluizione di cui si è parlato.

Col sistema in istudio, invece, nelle condizioni tecniche di impiego di cui si parlerà più oltre, il campo di ingresso delle radiazioni sarà di media grandezza ed il tasso di assorbimento in profondità nettamente superiore a quello ora ottenibile per le ragioni più sopra elencate e correlate al decorso dei raggi primari e alla utilizzazione dei secondari.

Essendo ad esempio il tasso di trasmissione dell'1,5 %, si potranno, nelle condizioni dell'esempio più sopra citato, fornire 3000 *r* sul focolaio con la stessa qualità di radiazioni, dando una dose litro tre volte inferiore (eventualmente ripartita in due o più campi di irradiazione). L'ideale dell'irradiazione si ha, secondo CHAOU, quando il rapporto tra dose-volume del focolaio e la dose-volume totale è

uguale ad 1, il che si osserverebbe solo quando tutte le irradiazioni assorbite fossero concentrate nel focolaio. In realtà mentre la dose-volume del focolaio è il 25 % di quella totale nella plesio-roengenterapia, esso scende al 3 % nella radiumterapia a contatto, all'1,6 % nella roentgenterapia rotatoria, e a meno del 0,1 % nella roentgenterapia su ampi campi.

Da quanto si è detto derivano i due fondamentali vantaggi del sistema:

possibilità di concentrare alte dosi di radiazioni in profondità con piccole dosi di superficie;

meno estesa e diffusa irradiazione del paziente.

A parità di irradiazione del paziente si raggiungeranno invece dosi di focolaio molto più grandi di quelle ora raggiungibili; ciò renderebbe possibile il trattamento di tumori ad alta radioresistenza situati profondamente, i quali, coi metodi attuali, non possono essere raggiunti da quantità sufficienti di radiazioni per pericolo di radiolesioni cutanee.

Ciò che soprattutto caratterizza il sistema in esame è la concentrazione in profondità dei raggi del fascio primario, concentrazione che avverrà in rapporto inverso a quello della superficie della porta cutanea rispetto a quella di un piano che coincida con le basi dei due coni di sovrapposizione. Detto rapporto è più grande se l'obliquità dei raggi centrali è maggiore. Sarà quindi realizzabile un miglior rapporto costruendo un tubo con un forte diametro dell'anello anticatodico, usando piccole distanze focali e riducendo al minimo, mediante una finestra adeguata, il volume dei due coni. Non è possibile, per ovvie ragioni, aumentare il diametro anticatodico o diminuire la distanza fuoco-pelle oltre un certo limite.

Noi abbiamo studiato i rapporti per diametri anticatodici da 30 cm. a 20 cm., e distanze fuoco-pelle di 15 cm. e per coni di sovrapposizione, aventi un diametro della base dai 15 ai 5 cm.

Ne abbiamo ricavato i seguenti dati:

ponendo la base dei coni, ove i punti radianti dell'anticatodo convogliano tutte le loro radiazioni, alla profondità di 10 cm., abbiamo avuto: per diametri anticatodici di 30-25 e 20 cm. e campo profondo

(base dei coni) del diametro di 15 cm.: rapporti rispettivamente di 1,92- 1,61- 1,18; per gli stessi diametri antikatodici e campo profondo del diametro di 10 cm.: 2,9- 2,4- 1,9; e per campo profondo del diametro di 5 cm.: 5,8- 4,4- 3,8.

Allontanando il campo profondo dalla cute, si ha un rapporto più alto, avvicinandolo un rapporto inferiore. Ecco i rapporti dei diametri antikatodici di 30, 25 e 20 cm. e campo profondo del diametro di 15 cm. a 15 cm. di profondità: 2- 1,68- 1,29; mentre per campi profondi a 5 cm. di profondità si ottiene:

campo del diametro di 15 cm.: 1,58- 1,40- 1,12.

campo del diametro di 10 cm.: 2,25- 1,9- 1,55.

campo del diametro di 5 cm.: 4,4- 3,85- 3,55.

Avvicinando ulteriormente i coni si ha rapporto sempre più vicino a 1.

Anche la forma dei coni varia volta a volta: la forma ideale sarebbe quella che più è vicina alla sfera: l'altezza di un cono dovrebbe essere uguale al raggio della base. In realtà, il cono più lontano è, per effetto di proiezione, sempre più alto dell'altro.

I coni poi tendono ad allungarsi quanto più l'irradiazione è profonda ed a schiacciarsi quando più si opera vicino alla pelle, mentre l'altezza dei coni sarà ridotta se si usano antikatodi a grande diametro. Il diametro di 30 cm. dà, ad una profondità di 10 cm.: per campo di 15 cm. di diametro: altezza del cono superiore cm. 8,2; per campo di 10 cm. di diametro: altezza del cono superiore cm. 6,2; per campo di 5 cm. di diametro: altezza del cono superiore cm. 3,6. Mentre alla profondità di cm. 5 l'altezza del cono superiore è lievemente inferiore al raggio della base.

La porta cutanea è quasi sempre di forma anulare. Se l'apice del cono superiore tocca o supera la cute, sarà a forma di cerchio. La superficie del campo varia, negli esempi sopra citati, da 80 a 340 cm.². La ripartizione della dose sulla cute non può essere che lievemente disuniforme, essendo le parti periferiche dell'anello cutaneo più vicine all'antikatodo. Maggiore disuniformità si avrà quando l'apice del cono superiore tocca o supera la cute: il che accade quando si facciano sovrapporre le radiazioni su larga base ed a piccola profondità: si avrà in tal caso un sovraccarico di dose al centro del campo cutaneo.

Tecnicamente sarà cosa facile raggiungere lo scopo di « mettere a fuoco » il campo profondo: la superficie di sovrapposizione totale dei fasci radianti sarà condizionata infatti dalla forma della finestra, mentre variando l'altezza della stessa rispetto al fuoco di emissione essendo tenuta costante la distanza fuoco-pelle, varierà la profondità della zona di convergenza. Praticamente quindi lo scopo sarà raggiunto costruendo una serie di limitatori in ognuno dei quali sia contenuta una finestra scorrevole in senso verticale, di diverse dimensioni.

Una corsa di pochi centimetri consentirà una messa a fuoco alla profondità voluta su un'estensione di 10-15 cm. Si realizza così la possibilità di mettere accuratamente a fuoco, usando una tecnica perfetta, anche piccoli campi situati in profondità. Si opererà in ogni caso usando corti limitatori cilindrici, chiusi verso il basso da uno strato di sostanza plastica per arrestare le radiazioni secondarie emesse dai filtri che, per comodità di costruzione, dovranno essere situati al disotto della finestra, e quindi a breve distanza dalla cute.

Si prospettano indubbiamente difficoltà per la costruzione del nostro tubo Roentgen. Essendo infatti necessario contenere la distanza fuoco-pelle, in limiti assai piccoli, occorre limitare al minimo possibile la distanza tra piano anticatodico e parete inferiore del tubo. Essendo il diametro anticatodico di 30 cm., il tubo assumerebbe grandi dimensioni e la curvatura della parete opposta all'anticatodo dovrebbe pertanto essere così grande da compromettere la capacità di resistenza delle pareti stesse nel riguardo della pressione atmosferica.

Ad ovviare tale inconveniente si propone di ridurre le dimensioni del tubo conservando inalterato il diametro anticatodico, col portare l'anticatodo stesso a far corpo colle pareti del tubo collegate a terra.

Il tubo verrebbe così ad essere di dimensioni minori, e sarebbero consentite distanze focali di 15 cm. Il limitatore verrebbe, come nella figura, ad avere un'altezza di cm. $8\frac{1}{2}$ ai lati. Un grosso blocco anulare di rame verrebbe saldato all'anticatodo, colla funzione di convogliare all'esterno il calore prodotto. Altri particolari costruttivi possono essere desunti dallo schizzo di massima contenuto nella figura.

Essendo l'anticatodo collegato alla cuffia ed a terra, il raffreddamento per conduzione risulterà notevole; ed il tubo potrà anche fun-

zionare da autoraddrizzatore, consentendo così di racchiudere tubo e trasformatore in unico blocco.

Il carico unitario anodico sarà assai basso: assorbendo il tubo una potenza di 1500 Watt, e supponendo l'anticatodo alto 15 mm., ogni millimetro quadrato del fuoco, sopporterà poco più di 1 Watt al secondo, ove il carico specifico del tungsteno è di 200 Watt e la potenza normalmente assorbita da ogni millimetro quadrato di tungsteno nei tubi attualmente in uso è di 75 Watt al secondo, considerando una macchia focale di 20 mm² e funzionamento con corrente continua di 180 kV e 8 mA. Saranno raggiunte quindi condizioni ideali per evitare soprariscaldamenti dell'anticatodo.

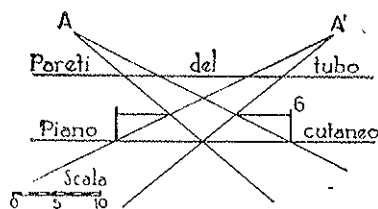


FIG. 3.

Schema del decorso delle radiazioni
nella plesioterapia.

L'illuminazione fornita in superficie sarà assai alta, in relazione alla piccola distanza focale (maggiore utilizzazione delle radiazioni X). Si realizzeranno quindi in campo tecnico innegabili vantaggi:

- durata pressochè illimitata del tubo per la notevole estensione della massa focale e scarso carico sull'unità di superficie.
- semplificazione dei sistemi di raffreddamento.
- economia di esercizio (a parità di potenza impiegata dal tubo si ha un'illuminazione oltre 6 volte maggiore che usando distanze focali di 60 cm., normalmente impiegate in terapia profonda).

Un'ultima interessante applicazione del tubo ad anticatodo anulare riguarda la roentgenterapia di vicinanza (plesioroentgenterapia) su ampi campi. Facendo incrociare totalmente i raggi dei punti focali opposti al disopra della superficie cutanea, mediante una finestra non più anulare, ma circolare (in tal caso non verrà usato il diaframma del tipo più sopra illustrato), si otterranno radiazioni fortemente di-

vergenti. Diminuendo l'altezza del cilindro limitatore fino a distanze focali minime, la divergenza verrà ancora aumentata, senza che pertanto si abbiano forti squilibri di dose fra centro e periferia del campo, quali si osserverebbero ponendo un normale antiscattero all'apice del cono superiore di sovrapposizione dei fasci del sistema in esame, antiscattero che nelle stesse condizioni, invierebbe sulla cute radiazioni della stessa divergenza (figura 3).

I notevoli vantaggi conseguibili nella terapia profonda e in quella superficiale, che fanno praticamente del tubo un tubo universale, giustificano sufficientemente il nostro intento, per quanto grandi possano essere le difficoltà costruttive.

Confidiamo di poter presto portare un definitivo contributo sperimentale alla nostra tesi, una volta in possesso del tubo.

ELEMENTI D'ACQUA DOLCE E MARINA (*)
IN UN CALCARE FARINOSO
NELLA ZONA DELLA «SEDIA DEL DIAVOLO» IN ROMA

VITO ZANON

SVMMARIVM — Dantur notitiae de quodam depositu tripolaceo alluvionali fluminis Anionis in loco «Sella diaboli», dicto, in Via Nomentana, Romae, in quo inveniuntur elementa aquae dulcis et marinae.

Nel 1914 pubblicai l'analisi di una farina fossile di un giacimento in profondità sulla destra della bassa valle dell'Aniene in località «Sedia del diavolo» presso la Città Giardino, nella Via Nomentana, in Roma⁽¹⁾.

Quel giacimento, sito a m. 10 circa di profondità del livello del suolo circostante (spianate le preesistenti colline per la costruzione di strade ed edifici) denotava la formazione quaternaria di un laghetto costeggiante l'Aniene, nel quale certamente, oltre le acque di pioggia, si era avuto l'apporto del fiume che nelle sue piene vi aveva depositato materiali di varia natura, marne, argille, conglomerati vari, tufi litoidi, insieme a resti vegetali ed animali.

Nella presente nota prendo in esame un calcare farinoso formante una montagnola di m. 5-7 di altezza, sovrastante il suolo ove giace il predetto deposito di farina fossile, montagnola anche essa prodotto

(*) Nota presentata dell'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Gola il 4 agosto 1947.

(1) ZANON VITO, *Giacimento di farina fossile nella bassa valle dell'Aniene «Sedia del Diavolo» (Roma)*. «Comment.», Pont. Accad. Scient., anno VIII, vol. VIII, n. 14, 1944.

delle deiezioni dell'Aniene, una delle tante che formavano la località detta « Sedia del diavolo », in gran parte, come si è detto già fatte scomparire dal piano regolatore.

Mentre scrivo la montagnola in esame è in via di sparizione pei lavori di sbancamento che si stanno operando per riempire gli avvalamenti adiacenti e procurare nuova area fabbricabile. L'area occupata della montagnola si estendeva dal rudero romano alla linea ferroviaria Roma-Orte che passa lì vicino.

L'imponenza di queste deiezioni dell'Aniene appare ancor più rilevante osservando i banchi di tufi clastici alti una ventina di metri che si vedono procedendo poche centinaia di metri verso Nord, costeggiando sempre la suddetta linea ferroviaria, nei quali raccolsi numerosi frammenti di tronchi d'alberi silicizzati.

Dopo quanto ho detto nel mio precedente lavoro sopra citato (pagg. 426-427), nulla c'è da aggiungere circa l'età e la natura di queste formazioni fluviali.

Il materiale ora in esame che formava la massa della montagnola suddetta si presenta come un tripoli marnoso di colore bianco-giallognolo, friabile alla piccola pressione delle dita, a qualche altezza anche fogliettato, che, per avere circa due terzi di sostanza calcarea e pochissima argilla, ho denominato calcare farinoso.

Vi si riscontrano particelle di vegetali in decomposizione e friabili, venature rosse di ferro organogeno, qualche frammento di ossa di vertebrati silicizzate, venature nere di sostanze animali in decomposizione, e, nella parte superiore della montagnola, rare conchigliette terrestri frammentarie.

La parte superiore è formata da sottile strato di terreno agrario, a cui succedono strati di breccia, con diversi frammenti di calcare bianco e vari elementi di natura vulcanica.

Come lo indica il titolo della nota, questo calcare farinoso è interessante per la varietà degli elementi che vi si riscontrano all'esame microscopico.

Rilevante è la varietà delle specie di Diatomee, come lo dimostra il ricco elenco qui aggiunto, la maggior parte, quelle più grandi specialmente, frammentarie, il che dimostra che sono state convogliate dall'Aniene nelle sue piene precipitose.

La quasi totalità sono specie d'acqua dolce, ma ad esse vanno congiunte forme d'acqua salmastra, cosa spiegabilissima coll'immaginare che esse siano state avulse da laghetti o stagni continentali, i quali coll'evaporarsi dell'acqua ed il conseguente concentrarsi della composizione salina, poterono albergare successivamente Diatomee d'acqua salmastra adattabili ad acque continentali ricche di sali di magnesio.

Il materiale in esame contiene inoltre numerosi frammenti e placche silicee di Graminacee, numerose spicule di Spongieri d'acqua dolce e marina (queste più rare), rare laminette di mica, rari glomeruli rossi di ferro d'origine organica e numerose Crisostomacee.

Queste sono alghe unicellulari flagellate a guscio siliceo, viventi in acque continentali poco profonde, come stagni, fossi, paludi e ricche di ferro e di ceneri vulcaniche.

Di esse tratterò a parte perchè interessanti.

Ma quello che è più interessante è il rinvenimento di elementi marini. Anzitutto Diatomee decisamente marine.

Fra queste:

Nitzschia granulata Grun. vi si riscontra frequentissima, di varie dimensioni e di forme svariate, da ovali ad ellissoidi, o citriformi a vertici appuntiti (vedi fig. 3).

È specie marina e d'acqua molto salmastra delle coste dell'Atlantico e del Pacifico. Il PERAGALLO nella sua opera sulle Diatomee marine di Francia dice che manca nel Mediterraneo, ma io la rinvenni benchè rara nella laguna di Venezia.

Nitzschia hybrida Grun. è specie marina dei mari nordici, di acque molto salmastre e delle saline.

Nitzschia marginulata Grun. var. *constricta* Grun. è specie marina dei mari del Nord, Indie Occidentali, Baia di Campeggio; specie polimorfa con frequenti forme costrette nel mezzo (vedi fig. 5).

Hantzschia marina (Donk.) Grun., è specie marina delle coste dell'Atlantico e del Mediterraneo (vedi fig. 6).

Rhaphoneis nitida (Greg.) Grun., è specie marina di grande diffusione e variabile nel contorto e nella disposizione della granulazione del guscio (vedi fig. 4).

Actinocyclus sp. è un genere della famiglia delle Discacee che comprende diverse specie tutte marine e di cui rinvenni solo un frammento indeterminabile figurato al n. 7.

Coscinodiscus sp. sp. Anche questo genere di Discacee comprende specie quasi tutte marine, di cui rinvenni numerosi frammenti figurati ai n. 8, 9.

E finalmente fra le Diatomee marine due specie di *Stephanopyxis*. Sono forme planctoniche marine, ma i gusci si trovano anche nei fondi, alcuni anche viventi.

Alcune specie sono viventi nei mari caldi ed oceani, la maggior parte sono fossili nel Terziario (vedi figg. 10, 11).

Ma quello che mi ha più meravigliato ed insieme mi ha rassicurato sulla origine di queste diatomee marine fu il rinvenimento di altri elementi più decisamente marini planctonici e di fondo, vale a dire le Silicoflagellate ed i Radiolari.

E in primo luogo, perchè più frequente, e più integro, è l'*Actiniscus pentasterias* Ehr. (vedi fig. 23), microorganismo unicellulare a guscio siliceo di cui per lungo tempo fu indecisa l'assegnazione ad una Classe ben definita, avendolo alcuni Autori assegnato chi ai Radiolari, altri alle Diatomee, e solo recentemente fu riconosciuto per una Silicoflagellata. È specie marina di fondo, ma si trova anche nel plancton. Io lo rinvenni nel mare sporco di Fiume⁽¹⁾, mentre l'EHRENBERG, fondatore di questo genere, lo ritrovò fossile in vari depositi tripolacei miocenici, e vivente nel Mare Artico e nel porto di Cristiania.

Altre Silicoflagellate interessanti furono poi rinvenute. Esse sono microorganismi unicellulari decisamente ritenute per alghe marine planctoniche a guscio siliceo formato da anelli e bastoncini perforati nel mezzo.

Una forma che mi riuscì in un primo tempo problematica, ricobbi poi subito per un frammento staccato da una specie caratteristica e ben conosciuta. Si tratta di un anello apicale di *Distephanus crux* (Ehr.) Haeckel (vedi fig. 21) come si può facilmente riscontrare esaminando la fig. 50 a pag. 59 del trattato sulle Silicoflagellate di

⁽¹⁾ ZANON VITO, *Esame di un campione di mare sporco di Fiume*. « Mem. Pont. Accad. d. Sc., Nuovi Lincei », vol. XV, Roma, 1931.

K. GEMEINHARDT⁽¹⁾. È specie marina vivente nell'Oceano Pacifico e fossile in vari depositi tripolacei terziari, come: Nyermegy (Ungheria), S. Monica, Redondo (Nord America), Oamoru (Nuova Zelanda), tutti del Neogene medio.

Io la rinvenni fossile nei tripoli terziari italiani di: Marmorito, Serralunga di Crea, Bergonzano, Montedissito, Montefiori, Grotte di Sicilia, Recalmuto, Messina⁽²⁾.

Altra Silicoflagellata è la *Mesocena polymorpha* Lemm. var. *octonaria* Schultz, ma mentre il tipo misura da 20-82 μ di diametro e le spine da 15 a 18 μ di lunghezza (vedi GEMEINHARDT, loc. cit., pag. 31) questa è una forma nana di 12 μ di diametro, con le spine brevissime, sebbene alcune siano certamente spezzate (vedi fig. 22); di modo che se ne potrebbe fare una sottovarietà, e non addirittura una specie nuova.

Il tipo è vivente nell'Oceano Pacifico e trovasi fossile nel Perù ed a Kittanai nel Giappone.

Altra ancora è la *Dictyocha triacantha* (Ehr.) fo. *minor* Schultz; anche questa mia (vedi fig. 20) è forma nana che misura 15 μ di lato, mentre la forma dello SCHULTZ ne misura da 26-41 μ . È anche un po' aberrante da essa che presenta tre fenestrelle nel mezzo, mentre nella mia i setti ne formano cinque (vedi GEMEINHARDT, loc. cit., pag. 40, fig. 29).

Fu trovata dallo SCHULTZ allo stato fossile insieme alla specie a Mors e Fuur, Greifswalder-Oie, Bojarkino, Simbirsk, Kusnetz, Maryland, Oamaru.

Finalmente credo di poter attribuire ad una *Dictyocha navicula* (Ehr.) var. *rectangularis* Schultz il frammento da me figurato al n. 14; anche questa è una forma nana misurante 14 μ di lunghezza per 15 μ di larghezza, col dente apicale di 1,5 μ , in confronto del tipo che misura 60-72 μ di lunghezza per 15-30 μ di larghezza con denti apicali di 4-8 μ (vedi GEMEINHARDT, loc. cit., pag. 36, fig. 23). La forma dello SCHULTZ è solamente fossile nei depositi di Mors e Fuur (Eocene infer.) ed a Zante (Neogene super.), mentre la specie si trova anche vivente nell'Atlantico e nell'Adriatico.

⁽¹⁾ GEMEINHARDT K., *Silicoflagellate* in « Rabenhorst's Kryptogamen Flora », Bd. X, Abteil. 2, Leipzig, 1930.

⁽²⁾ ZANON VITO, *Silicoflagellate fossili Italiane*. « Atti Pont. Accad. d. Sc., Nuovi Lincei », anno LXXXVII, sess. I, 16 gennaio 1934.

Più frequenti sono i frammenti di Radiolari, indeterminabili appunto perchè in questo stato, di cui dò alcune figure che potrebbero essere riconosciute da uno specialista (vedi figg. 15, 19).

Frequenti sono, come dissi le spicule di Spongiari di cui alcune certamente marine (vedi figg. 13, 16, 17).

Un bel esemplare intero di *Ephydatia* misura 67 μ di lunghezza (vedi fig. 18).

Ora, come si spiega la presenza di tanti e così vari elementi di origine marina in questa località così lontana dal mare, in un materiale di indubbia origine clastica, netta formazione di deposito del torrente Aniene?

Non si spiega altrimenti che col pensare che essi furono avulsi da marne e calcari di formazione marina, certamente di età anteriore al quaternario.

Di tali marne e calcari è indubbia la presenza nella regione a monte dell'Aniene e da esso attraversata.

Ecco dunque come si può ricostruire la genesi di questa località della Sedia del Diavolo:

Un avvallamento del terreno adiacente al torrente divenne un lago d'acqua dolce nel quale si sono sviluppate le Diatomee che formarono il deposito di farina fossile oggetto del mio studio antecedente a questo.

Questo lago fu riempito in seguito da un sedimento che ebbe origine dal dilavamento di terreni ed in seguito dalla denudazione e corrosione di rocce calcaree e di marne più o meno compatte, formando una soluzione acquosa che venne a depositare i suoi elementi là dove la corrente del fiume, ostacolata da qualche sbarramento accidentale, divenne più lenta, o si fermò del tutto, formando una colmata di dimensioni ed estensione ed altezza imponenti.

Gli elementi marini, come i Radiolari, le Silicoflagellate e talune forme di Diatomee marine devono aver avuto la loro origine dalla disaggregazione operata dall'acqua di pioggia di rocce calcaree di formazione marina in cui erano rimaste imprigionate. Questi calcari non sono stati di formazione corallogena, ma devono aver avuto la loro origine da precipitazione ohimica di acque calcaree continentali a contatto del carbonato ammonico derivante dalla decomposizione di organismi viventi nel mare.

In questo precipitato nel fondo del mare rimasero impigliati gli elementi suddetti a guscio siliceo e insieme con esso dovettero formare una nuova montagna ritornata alla luce del sole, che a sua volta doveva essere disgregata ed invece di andare a finire in mare doveva fermarsi alla località detta « Sedia del Diavolo ».

Or ecco l'elenco delle diatomee rinvenute nel deposito:

ELENCO DELLE SPECIE

(Abbreviazioni: a. d. = d'acqua dolce; sm. = d'acqua salmastra;
m. = marina; fr. = frequente; fr. = molto frequente)

	<i>Achnmathes exigua</i> Grun.	a. d.
	» <i>Hauxiana</i> Grun.	a. d.
	» <i>lanceolata</i> Bréb.	a. d.
	» <i>minutissima</i> Ktz.	a. d.
	» » var. <i>cryptocephala</i> Grun.	a. d.
	<i>Actinocyclus</i> sp..	m.
fr.	<i>Amphora ovalis</i> Ktz.	a. d.
fr.	» » var. <i>pediculus</i>	a. d.
fr.	» <i>perpusilla</i> Grun.	a. d.
	» <i>veneta</i> (Ktz.) Hust.	a. d., sm.
	<i>Anomoeoneis sphaerophora</i> (Ktz.) Pfitz.	a. d., sm.
	» » var. <i>sculpta</i> Ehr. O. Müller fo. <i>deli-</i> <i>cata</i> (Perag.)	a. d., sm.
	<i>Bacillaria paradoxa</i> Gurelin.	a. d., sm.
	<i>Caloneis alpestris</i> (Grun.) Cl.	a. d.
	» <i>bacillum</i> (Grun.) Mersch.	a. d.
	» <i>inversestriata</i> sp. n.	a. d.
	» <i>Schumanniana</i> (Grun.) Cl. var. <i>biconstriata</i> Grun.	a. d.
fr.	» <i>silicula</i> (Ehr.) Cl.	a. d.
fr.	» » var. <i>diabolica</i> var. n.	a. d.
	» » var. <i>gibberula</i> (Ktz.) Grun.	a. d.
fr.	» » var. <i>truncatula</i> Grun.	a. d.
fr.	» » var. <i>ventricosa</i> (Ehr.) Cl.	a. d.

fr.	<i>Eunotia monodon</i>	Ehr.	a. d.
fr.	»	<i>pectinalis</i> (Ktz.)	Rabh.	a. d.
	»	»	var. minor (Ktz.)	Rabh.	a. d.
	»	»	»	fo. intermedia	Krasske	.	.	.	a. d.
	»	»	var. ventralis (Ehr.)	Kust.	a. d.
	»	<i>tenella</i> (Grun.)	Hust.	a. d.
	»	<i>veneris</i> (Ktz.)	O. Müll.	a. d.
fr.	<i>Fragilaria brevistriata</i>	Grun.	a. d.
	»	»	var. subcapitata	Grun.	a. d.
fr.	»	<i>construens</i> (Ehr.)	Grun. var. venter (Ehr.)	Grun.	a. d.
	»	<i>capucina</i>	Desmaz.	a. d.
	»	<i>gracillima</i>	Mayer	a. d.
	»	<i>Harrissonii</i>	W. Sm.	a. d.
	»	»	var. dubia	Grun.	a. d.
	»	<i>intermedia</i>	Grun.	a. d.
fr.	»	<i>pinnata</i>	Ehr.	a. d.
fr.	<i>Gomphonema acuminatum</i>	Ehr.	a. d.
fr.	»	»	var. coronata (Ehr.)	Ralfs	a. d.
	»	»	var. trigonocephala (Ehr.)	Grun.	a. d.
fr.	»	»	var. turris (Ehr.)	Cl.	a. d.
fr.	»	<i>augur</i>	Ehr.	a. d.
fr.	»	<i>constrictum</i>	Ehr.	a. d.
	»	»	var. capitata (Ehr.)	Cl.	a. d.
	»	»	»	fo. curta	Frike	.	.	.	a. d.
fr.	»	<i>gracile</i>	Ehr.	a. d.
fr.	»	<i>intricatum</i>	Ktz.	a. d.
fr.	»	»	var. pumila	Grun.	a. d.
fr.	»	<i>lanceolatum</i>	Ehr.	a. d.
	»	»	var. insignis (Greg.)	Cl.	a. d.
fr.	»	<i>longiceps</i>	Ehr. = <i>G. mustela</i>	Ehr.	a. d.
fr.	»	»	var. subclavata	Grun.	a. d.
	»	»	»	fo. gracilis	Hust.	.	.	.	a. d.
fr.	»	<i>olivaceum</i> (Lyug.)	Ktz.	a. d.
fr.	»	»	var. minutissima	Hust.	a. d.
fr.	»	<i>parvulum</i>	Ktz.	a. d.
fr.	»	»	var. micropus (Ktz.)	Cl.	a. d.
	»	»	var. subelliptica	Cl.	a. d.

	<i>Gyrosigma acuminatum</i> (Ktz.) Rabh.	a. d., sm.
	» <i>attenuatum</i> (Ktz.) Rabh.	a. d., sm.
	» <i>Spenceri</i> (W. Sm.) Cl.	a. d., sm.
	» » var. <i>nodifera</i> Grun.	a. d., sm.
fr.	<i>Hantzchia amphioxys</i> (Ehr.) Grun.	a. d.
fr.	» » var. <i>maior</i> Grun.	a. d.
	» » var. <i>stricta</i> Hust.	a. d.
	» <i>elongata</i> (Hantz.) Grun.	a. d.
	» <i>marina</i> (Donk.) Grun.	m.
fr.	» <i>virgata</i> (Roper) Grun. var. <i>capitellata</i> Hust.	a. d.
	<i>Mastogloia Smithii</i> Thw. var. <i>lacustris</i> Grun.	a. d.
	<i>Melosira distans</i> (Ehr.) Ktz. var. <i>pfaffiana</i> (Reinsch) Grun.	a. d.
	» <i>granulata</i> (Ehr.) Ralfs.	a. d.
	» » var. <i>angustissima</i>	a. d.
	» <i>islandica</i> O. Müll. subsp. <i>helvetica</i> O. Müll.	a. d.
fr.	» <i>italica</i> (Ehr.) Ktz.	a. d.
	» <i>Roesseana</i> Rabh.	a. d.
	» <i>undulata</i> (Ehr.) Ktz. var. <i>Normani</i> Arnott	a. d., sm.?
	<i>Meridion circulare</i> Ag. var. <i>constricta</i> (Ralfs) V. H.	a. d.
	<i>Navicula anglica</i> Ralfs	a. d.
	» <i>bicapitellata</i> Hust.	a. d.
	» <i>cari</i> Ehr.	a. d.
	» <i>confervacea</i> Ktz.	a. d.
	» » var. <i>peregrina</i> W. Sm.	a. d.
	» <i>citrus</i> Krasske	a. d.
	» <i>cryptocephala</i> Ktz.	a. d.
	» » var. <i>veneta</i> (Ktz.) Hust.	a. d., sm.
	» » var. <i>intermedia</i> Grun.	a. d., sm.
	» <i>cuspidata</i> Ktz. con forme <i>craticulari</i>	a. d., sm.
	» » var. <i>ambigua</i> (Ehr.) Cl.	a. d., sm.
fr.	» <i>dicephala</i> (Ehr.) W. Sm.	a. d.
	» <i>gracilis</i> Ehr.	a. d.
	» <i>graciloides</i> A. Mayer	a. d.
	» <i>gregaria</i> Donk.	a. d.
	» <i>hungarica</i> Grun.	a. d.
	» <i>Kotzschiji</i> Grun.	a. d.
	» <i>laterostrata</i> Kust.	a. d.

fr.	<i>Navicula minima</i> Grun.	a. d.
fr.	» » var. <i>atomoides</i> (Grun.) Cl.	a. d.
	» <i>minuscule</i> Grun.	a. d.
	» <i>lucidula</i> Grun.	a. d.
fr.	» <i>oblonga</i> Ktz.	a. d.
	» » var. <i>subcapitata</i> Pont.	a. d.
	» <i>placentula</i> (Ehr.) Grun. fo. <i>rostrata</i> A. Mayer.	a. d.
	» <i>protracta</i> Grun.	a. d.
	» <i>pupula</i> Ktz.	a. d.
	» » var. <i>elliptica</i> Hust.	a. d.
fr.	» <i>radiosa</i> Ktz.	a. d.
	» <i>scutum</i> (Schum.) V. Henrik	a. d.
	» <i>viridula</i> Ktz.	a. d., sm.
	<i>Nitzschia acuta</i> Hantzsch	a. d.
	» <i>amphibia</i> Grun.	a. d., sm.
	» <i>angustata</i> (W. Sm.) Grun.	sm.
	» » var. <i>acuta</i> Grun.	sm.
fr.	» <i>fonticola</i> Grun.	a. d.
	» <i>frustulum</i> Ktz.	a. d., sm.
	» <i>Hantzschiana</i> Kabh.	a. d.
	» <i>hybrida</i> Grun.	sm., m.
	» <i>tinearis</i> W. Sm.	a. d.
	» <i>marginulata</i> Grun. var. <i>subconstricta</i> Grun.	m.
	» <i>palea</i> (Ktz.) W. Sm.	a. d.
	» <i>recta</i> Hantz.	a. d.
fr.	» <i>granulata</i> Bailey	m.
	» <i>romana</i> Grun.	a. d.
	» <i>tryblionella</i> Hantzsch	a. d., sm.
	» » var. <i>Victoriae</i> Grun.	a. d., sm.
fr.	<i>Peronia erinacea</i> Bréb. et Arnott	a. d.
	<i>Pinnularia fasciata</i> Lagst.	a. d.
	» <i>lata</i> W. Sm. fo. <i>thuringiana</i> (Rabh.) A. Mayer	a. d.
	» <i>leptosoma</i> Grun.	a. d.
fr.	» <i>maior</i> Ktz.	a. d.
	» » var. <i>linearis</i> Cl.	a. d.
fr.	» <i>microstauron</i> (Ehr.) Cl.	a. d.
	» » fo. <i>diminuta</i> Grun.	a. d.

fr.	<i>Pinuntaria microstauron</i> var. Brébissoni (Ktz.) Hust.	a. d.
	» <i>subsolaris</i> (Grun.) Cl.	a. d.
	» <i>undulata</i> Greg. var. subundulata Grun.	a. d.
fr.	» <i>viridis</i> (Nitz.) Ehz.	a. d.
fr.	» » var. diminuta Mayer	a. d.
fr.	» » var. sudetica (Hilse) Hust.	a. d.
	<i>Rhaphoneis nitida</i> (Greg.) Grun.	m.
fr.	<i>Rhopalodia gibba</i> (Ehr.) O. Müll.	a. d., sm.
	» <i>musculus</i> (Ktz.) O. Müll.	sm.
fr.	<i>Rhoicosphenia curvata</i> (Ktz.) Grun.	a. d.
	<i>Stauroneis anceps</i> Ehr.	a. d., sm.
	» <i>phoenicenteron</i> Ehr.	a. d., sm.
	» <i>pygmaca</i> Krieger	a. d.
fr.	» <i>Smthiii</i> Grun.	a. d.
fr.	<i>Stephanodiscus astraea</i> (Ehr.) Grun. var. minutula (Ktz.) Grun.	a. d.
	<i>Stephanopyxis</i> sp. sp.	m.
	<i>Surirella biseriata</i> Bréb.	a. d.
	» » var. bifrons (Ehr.) Hust.	a. d.
	» <i>Capronii</i> Bréb.	a. d.
	» <i>linearis</i> W. Sm.	a. d.
	» <i>ovata</i> Ktz.	a. d.
	» » var. crumena (Bréb.) V. H.	a. d.
	» <i>striatula</i> Turpin	a. d.
	» <i>tenera</i> Greg. var. nervosa A. S.	a. d.
	<i>Synedra acus</i> Ktz.	a. d.
	» » var. augustissima Grun.	a. d.
	» <i>capitata</i> Ehr.	a. d.
	» <i>rumpens</i> Ktz. var. fragilarioides Grun.	a. d.
	» <i>vaucheriae</i> Ktz.	a. d.
	» » var. capitellata Grun.	a. d.
fr.	» <i>ulna</i> (Nitz.) Ehr. (frequenti forme undulate)	a. d.
fr.	» » var. aequalis (Ktz.) Hust.	a. d.
fr.	» » var. amphirhynchus (Ehr.) Grun.	a. d.
fr.	» » var. biceps (Ktz.) Hust.	a. d.
	» » var. lanceolata Ktz.	a. d.
	» » var. oxyrhynchus (Ktz.) Hust.	a. d.
	<i>Tetracyclus rupestris</i> (A. Br.) Grun.	a. d.

Diagnosi delle forme nuove di Diatomee:

CALONEIS INVERSESTRIATA sp. n. (vedi Tav. n. 2)

Valvis linearibus, marginibus rectis, interdum lenissime incavatis, verticibus cuneatis obtusiusculis, longit. 27-29 μ , lat. 7 μ . Striis in medio convergentibus 16 in 10 μ , ad extremitates radiantibus 18 in 10 μ , fasciam centralem transversam latam nudam linguentibus, ad medietatem linea longitudinali perlis lucentibus evidenter confecta, intersectis. Raphe fere recta vel nudalata ad polos extremos recta uncinata, ad polos medianos lateraliter incurvata punctis terminalibus breviter distantibus. Area axiali ad polos stricta deinde longe lanceolata.

Distr.: *Fossilis in depositu alluvionali tripolaceo quaternario ad flumen Anionem in loco « Sedia del diavolo », dicto, Romae.*

Si avvicina alla *Caloneis Schroederi* Hustedt (Hustedt, Bacillario-phyta, pag. 235, fig. 356) per la rara particolarità di avere le strie disposte inversamente alla comune inclinazione. Ne differisce pel contorno essendo la *Schroederi* più allungata e con una costrizione più accentuata nel mezzo dei margini.

CALONEIS SILICULA (Ehr.) Cl. var. *diabolica* var. n. (vedi Tav. n. 1).

Valvis linearibus, in medio inflatis, duabus constrictionibus circa tertium superius et inferius, verticibus subcuneatis obtusis. Area axiali ad polos extremos stricta recta, deinde dilatata, iterum strictiore, in medio in arcam rhomboidalem dilatata. Raphe recta ad polos extremos uncinata, in medio lateraliter incurvata.

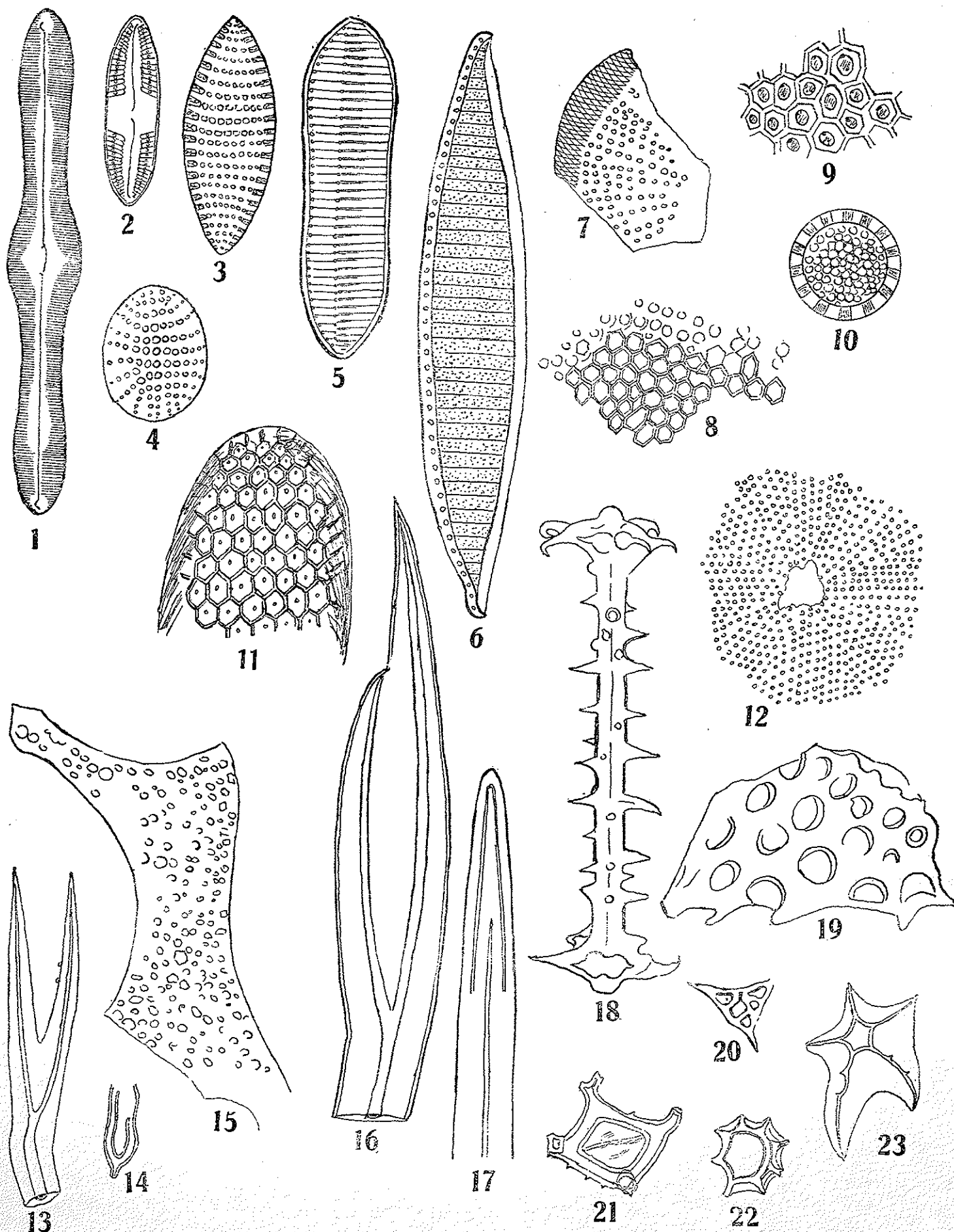
Dimens.: Longit. 71 μ , latit. in medio 10 μ , ad constrictiones 6 μ .

Distrib.: *Fossilis in depositu alluvionali tripolaceo quaternario ad flumen Anionem, in loco « Sedia del diavolo », dicto, Romae.*

Si distingue dalle altre varietà della specie per la sua lunghezza e strettezza.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

- N. 1. - *Caloneis silicula* (Ehr.) var. *diabolica* var. n.
 » 2. - » *inversestriata* sp. n.
 » 3. - *Nitzschia granulata* Grun.
 » 4. - *Rhaphoneis nitida* (Greg.) Grun.
 » 5. - *Nitzschia marginulata* (Grun.) var. *subconstricta* Grun.
 » 6. - *Hantzschia marina* (Donk.) Grun.
 » 7. - *Actinocyclus* sp.?
 » 8. - *Coscinodiscus* sp.?
 » 9. - » »
 » 10. - *Stephanopyxis* sp.?
 » 11. - » »
 » 12. - Frammento di Radiolario o Diatomea?
 » 13. - *Spicula di Spongiario*.
 » 14. - *Dictyocha navicula* Ehr. var. *triangularis* Schultz.
 » 15. - Frammento di Radiolario.
 » 16. - *Spicula di Spongiario*.
 » 17. - » » »
 » 18. - *Ephydatia* sp.?
 » 19. - Radiolario: *Spumellaria* del gen. *Collosphaera*, o *Nasellaria* del gen. *Lithomelina*?
 » 20. - *Dictyocha triacantha* Ehr. fo. *minor* Schultz.
 » 21. - Anello apicale di *Distephanus cruz* Hacek. var. *mesophthalmus* (Ehr.) Lemm.
 » 22. - *Mesocena polymorfa* Lemm. var. *octonaria* Schultz.
 » 23. - *Actiniscus pentasterias* Ehr.



RICERCHE SUI DETERMINANTI DI SOMME (*)

LUIGI TENCA

SUMMARY. — Attentis progressionibus summarum ordinis n et rationis d , Auctor perpendit (praecipuas quoque proprietates exponens) successiones determinantium summarum et duplicium summarum, quae ex illis progressionibus confici possunt.

In una successione di numeri reali

$$\dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$$

per *posto* di un termine intendiamo l'indice di cui è affetto e chiamiamo successione delle prime somme due a due la successione formata ordinatamente coi numeri $a_s^{(1)} = a_s + a_{s+1}$ dove $s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$; successione delle seconde somme due a due, la successione dei numeri $a_s^{(2)}$, prime somme due a due della successione delle prime somme due a due della data, ecc.

Diciamo che la successione data è una progressione di somme di ordine n e di ragione d , quando $a_s^{(n)} = (-1)^s d$, dove s è un numero intero qualsiasi e d un numero reale costante, diverso da zero.

Si trovano, per tali progressioni, le formule:

$$a_s = (-1)^s \binom{s}{0} a_0 + (-1)^{s+1} \binom{s}{1} a_0^{(1)} + (-1)^{s+2} \binom{s}{2} a_0^{(2)} + \dots + (-1)^{s+n} \binom{s}{n} a_0^{(n)}$$

per $s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

$$a_p^{(q)} = \binom{q}{0} a_p + \binom{q}{1} a_{p+1} + \binom{q}{2} a_{p+2} + \dots + \binom{q}{q-1} a_{p+q-1} + \binom{q}{q} a_{p+q}$$

per $p = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ e $q = 1, 2, \dots, n$

(*) Nota presentata dal Presidente dell'Accademia S. E. Agostino Gemelli O. F. M. il 2 settembre 1947.

ed altre se ne possono trovare non prive di interesse. Noi qui vogliamo invece esporre alcune ricerche sui determinanti di somme che si ricollegano a quelle da noi fatte sui determinanti di differenze ⁽¹⁾.

1. - Dalla progressione di somme di ordine n e di ragione d

$$[1] \quad \dots a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots,$$

ricaviamo il prospetto:

$$[2] \quad \begin{pmatrix} \dots -d & , & d & , & -d & , & d & , & -d & , & d & , & -d & , & \dots \\ \dots a_{-3}^{(n-1)} & , & a_{-2}^{(n-1)} & , & a_{-1}^{(n-1)} & , & a_0^{(n-1)} & , & a_1^{(n-1)} & , & a_2^{(n-1)} & , & a_3^{(n-1)} & , & \dots \\ \dots & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ \dots a_{-3}^{(1)} & , & a_{-2}^{(1)} & , & a_{-1}^{(1)} & , & a_0^{(1)} & , & a_1^{(1)} & , & a_2^{(1)} & , & a_3^{(1)} & , & \dots \\ \dots a_{-3} & , & a_{-2} & , & a_{-1} & , & a_0 & , & a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & \dots \end{pmatrix}$$

dove ciascuna linea, dalla seconda in poi, ha per successione delle prime somme due a due la linea immediatamente precedente. Diciamo colonna di posto s quella che ha a_s per ultimo elemento.

Formiamo un determinante A di ordine $n+1$ prendendo $n+1$ colonne consecutive del prospetto [2], partendo da quella di posto s qualsiasi e calcoliamone il valore. Aggiungiamo in A all'ultima colonna la penultima, alla penultima la terz'ultima. ecc., alla seconda la prima: sviluppando il nuovo determinante ottenuto secondo gli elementi della prima linea, abbiamo che A è eguale a $(-1)^s d$ per una determinante di ordine n dello stesso tipo. Ripetendo per quest'ultimo il procedimento eseguito su A e ripetendolo poi complessivamente n volte, otteniamo:

$$A = (-1)^{s(n+1)} d^{n+1}.$$

Formiamo invece il determinante B prendendo $n+1$ colonne qualsiasi rispettivamente di posto s_1, s_2, \dots, s_{n+1} del prospetto [2], ($s_1 < s_2 < \dots < s_{n+1}$). Inseriamo fra ciascuna colonna e la successiva le

⁽¹⁾ L. TENCA, *Ricerche sui determinanti di differenze*. « Rendiconti Istituto Lombardo di Sc. e Lett. », vol. LXXVI, 1942-1943, pag. 127-134.

colonne mancanti del prospetto ottenendo una matrice rettangolare di $n+1$ linee e $s_{n+1}-s_1+1$ colonne e completiamola per ricavare un determinante B' di ordine $s_{n+1}-s_1+1$, con le $s_{n+1}-s_1-n$ linee seguenti ordinatamente al primo, al secondo, ecc. posto nel determinante stesso: prima linea formata da zeri con 1 solo al secondo posto, seconda linea formata da zeri con 1 solo al terzo posto, ecc., (s_2-s_1-1) -esima linea formata da zeri con 1 solo all' (s_2-s_1) -esimo posto, (s_2-s_1) -esima linea formata da zeri con 1 solo all' (s_2-s_1+2) -esimo posto, ecc., (s_3-s_1-2) -esima linea formata da zeri con 1 solo all' (s_3-s_1) -esimo posto, (s_3-s_1-1) -esima linea formata da zeri con 1 solo all' (s_3-s_1+2) -esimo posto, ecc., $(s_{n+1}-s_1-n)$ -esima linea formata da zeri con 1 solo all' $(s_{n+1}-s_1)$ -esimo posto. Abbiamo che B è eguale, a meno di una potenza di -1 , a B' .

Aggiungiamo in B' all'ultima colonna la penultima, alla penultima la terzultima, ecc., alla seconda la prima. Sviluppando il nuovo determinante ottenuto secondo gli elementi della $(s_{n+1}-s_1-n+1)$ -esima linea, abbiamo che B' è uguale a $(-1)^{(s_{n+1}-s_1-n)s_1} d$ per un determinante di ordine $s_{n+1}-s_1$ e ripetendo lo stesso procedimento per quest'ultimo e successivamente in totale $n+1$ volte otteniamo che B' risulta eguale a $(-1)^{(n+1)(s_{n+1}-s_1-n)s_1} d^{n+1}$ per un determinante di ordine $s_{n+1}-s_1-n$ nel quale la prima linea è formata dal primo, dal secondo, ecc. dall' $(s_{n+1}-s_1-n)$ -esimo termine delle $(n+1)$ -esime somme due a due della successione che costituisce la prima linea di B' , la seconda linea è formata dal primo, dal secondo, ecc., dall' $(s_{n+1}-s_1-n)$ -esimo termine delle $(n+1)$ -esime somme due a due della successione che costituisce la seconda linea di B' , ecc., l'ultima linea è formata dal primo, dal secondo, ecc., dall' $(s_{n+1}-s_1-n)$ -esimo termine delle $(n+1)$ -esime somme due a due della successione che costituisce la $(s_{n+1}-s_1-n)$ -esima linea di B' . Risulta quindi che B , a meno di una potenza di -1 , è eguale a

$$d^{n+1} \begin{vmatrix} \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{1} & 0 & \dots & 0 \\ \binom{n+1}{2} & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{0} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n+1}{s_{n+1}-s_1-1} & \binom{n+1}{s_{n+1}-s_1-2} & \binom{n+1}{s_{n+1}-s_1-3} & \dots & \binom{n+1}{n} \end{vmatrix}$$

determinante quest'ultimo di ordine $s_{n+1} - s_1 - n$: in esso mancano le linee che avrebbero inizio rispettivamente con $\binom{n+1}{s_2-s_1}, \binom{n+1}{s_3-s_1}, \dots, \binom{n+1}{s_n-s_1}$.

Se in luogo di considerare il prospetto [2] ne consideriamo un altro nel quale la prima linea è formata da una successione di termini alternativamente eguali a d_1 e $-d_1$, la seconda linea dai termini di una progressione di somme di primo ordine e di ragione d_2 , la terza dai termini di una progressione di somme di secondo ordine e di ragione d_3 , ecc., l' $(n+1)$ -esima linea dai termini di una progressione di somme di ordine n e di ragione d_{n+1} , otteniamo gli stessi risultati soltanto in luogo di d^{n+1} compare il prodotto $d_1 d_2 \dots d_{n+1}$.

Se in luogo di prendere $n+1$ colonne consecutive o no, qualunque sia il prospetto, prendiamo $n+1$ *trasversali* parallele, consecutive o no, purchè *intersecanti* tutte le linee, abbiamo analoghe espressioni dei determinanti che si possono *formare per colonne* colle trasversali stesse.

2. - Nella progressione di somme [1] ricordando che

$$a_s = (-1)^s \binom{s}{0} a_0 + (-1)^{s+1} \binom{s}{1} a_0^{(1)} + \dots + (-1)^{s+n} \binom{s}{n} a_0^{(n)}$$

abbiamo che la successione contenuta in essa

$$\dots, a_{m-2r}, a_{m-r}, a_m, a_{m+r}, a_{m+2r}, \dots$$

dove m è un numero intero qualsiasi (per posto di un termine in essa intendiamo il coefficiente di r); per r pari è una progressione aritmetica di ordine n e di ragione $(-1)^m r^n d$, per r dispari, è una progressione di somme pure di ordine n e di ragione $(-1)^m r^n d$.

Per la dimostrazione basta formare la successione delle differenze prime, seconde, ecc., della progressione data e le successioni delle prime, seconde, ecc. somme due a due della progressione stessa, tenendo conto della indicata espressione di a_s , ricordando le proprietà relative all'addizione termine a termine di più progressioni aritmetiche e quelle relative alla moltiplicazione termine a termine di più progressioni aritmetiche ⁽²⁾.

⁽²⁾ Vedi L. TENCA, *Le progressioni*. « Manuale Giusti », Livorno, 1919.

Abbiamo quindi che considerando il prospetto ottenuto da [2] prendendo le colonne di posto

$$\dots, m-2r, m-r, m, m+r, m+2r, \dots$$

il determinante formato da $n+1$ colonne consecutive di esso, partendo da quella di posto t nel nuovo prospetto (posto dell'ultimo termine della colonna nella sua nuova successione), ha per r pari, il valore $(-1)^{m(n+1)} q^{\binom{n+1}{2}} d^{n+1}$, per r dispari il valore, $(-1)^{(m+t)(n+1)} q^{\binom{n+1}{2}} d^{n+1}$

3. - Se consideriamo la successione

$$[3] \quad \dots, a_{m-2 \cdot 2}, a_{m-2}, a_m, a_{m+2}, a_{m+2 \cdot 2}, \dots$$

e la successione

$$\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots$$

formata da numeri *interi* in progressione aritmetica di ordine p e di ragione q , abbiamo ⁽⁸⁾ che la successione

$$\dots, a_{m+2b_{-2}}, a_{m+2b_{-1}}, a_{m+2b_0}, a_{m+2b_1}, a_{m+2b_2}, \dots$$

è una progressione aritmetica di ordine np e di ragione

$$(-1)^m \frac{2^n \lfloor \frac{np}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \left(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor \right)^n} d q^n$$

Ne viene quindi che la successione di determinanti di somme che otteniamo prendendo successivamente $n+1$ colonne consecutive fra quelle di posto

$$\dots, m+2b_{-2}, m+2b_{-1}, m+2b_0, m+2b_1, m+2b_2, \dots$$

⁽⁸⁾ Vedi L. TENCA, *Progressioni aritmetiche contenute in una data progressione aritmetica*, «Periodico di Matematiche», serie 4^a, vol. 28 (1943), pag. 112-118.

nel prospetto [2], partendo da ciascuna colonna, è una progressione aritmetica della quale è facile calcolare l'ordine e la ragione ⁽¹⁾.

Se nel prospetto [2] sopprimiamo v linee e formiamo col nuovo prospetto risultante la successione di determinanti di somme ottenuti prendendo successivamente $n + 1 - v$ colonne consecutive fra quelle di posto

$$\dots, m + 2b_{-2}, m + 2b_{-1}, m + 2b_0, m + 2b_1, m + 2b_2, \dots$$

partendo da ciascuna colonna, abbiamo pure una progressione aritmetica della quale è facile calcolare l'ordine e la ragione ⁽¹⁾.

Ed altre progressioni aritmetiche di determinanti di somme si possono ricavare dal prospetto [2].

4. - Dalla progressione aritmetica [3] di ordine n e di regione $(-1)^m 2^n d$, ricordando l'espressione (formola di F. BERNOULLI) della somma di u termini consecutivi di essa ⁽²⁾ in funzione del primo e dei termini di egual posto di questo nelle successioni delle differenze prime, seconde, ecc., se indichiamo con $S_{h,k}$ la somma di k termini consecutivi partendo dall' h -esimo, per le proprietà delle progressioni aritmetiche che si ottengono addizionando o moltiplicando termine a termine più progressione aritmetiche date ⁽²⁾ abbiamo che la successione

$$[4] \quad \dots, S_{(b_{-1}+1), (b_0-b_{-1})}, S_{(b_0+1), (b_1-b_0)}, S_{(b_1+1), (b_2-b_1)}, \dots$$

è una progressione aritmetica di ordine $(n+1)p - 1$ e di ragione

$$(-1)^m \frac{2^n \lfloor (n+1)p \rfloor}{\lfloor n+1 \rfloor \lfloor p \rfloor^{n+1}} d q^{n+1}$$

Ne viene quindi che se dal prospetto [2] ricaviamo un altro prospetto le cui colonne sono formate per somme colle colonne del prospetto [2], come per somme si ricava la [4] dalla [1], abbiamo che la successione di determinanti di doppie somme che otteniamo da questo nuovo prospetto prendendo successivamente $n + 1$ colonne con-

secutive, a partire da ciascuna colonna, è una progressione aritmetica della quale è facile calcolare l'ordine e la ragione (¹).

Così, se sopprimiamo nel prospetto [2] v linee e formiamo nel modo sopra indicato un nuovo prospetto, abbiamo che la successione di determinanti di doppie somme che otteniamo da esso prendendo successivamente $n+1-v$ colonne consecutive a partire da ciascuna colonna è una progressione aritmetica della quale è facile calcolare l'ordine e la ragione (¹).

Ed altre progressioni aritmetiche di determinanti di doppie somme si possono trovare dedotte dal prospetto [2].

Se in luogo di considerare il prospetto [2] partiamo da un altro nel quale la prima linea è formata da una successione di termini alternativamente eguali a d_1 e $-d_1$, la seconda linea dai termini di una progressione di somme di primo ordine e di ragione d_2 , ecc., l' $(n+1)$ -esima linea dai termini di una progressione di ordine n e di ragione d_{n+1} si ottengono gli stessi risultati che si hanno in questo n. 4 e nel n. 3, soltanto in luogo delle potenze di d nelle ragioni delle progressioni di determinanti, comparirebbero i prodotti delle ragioni delle progressioni che si considerano.

Se nel prospetto [2] o in quello a cui sopra abbiamo accennato in luogo di prendere colonne prendiamo *trasversali* parallele degli stessi posti (intendendo per posto di una trasversale *tracciata* per il termine d_s , il numero s) *intersecanti* o no tutte le linee, i risultati trovati continuano a sussistere.

5. - Abbiamo anche progressioni di somme date da successioni di determinanti di somme ricavate dal prospetto [2].

Ad esempio, se consideriamo il prospetto dato da [2] sopprimendo la linea di posto $n-v+1$, per v pari e n dispari, abbiamo che la successione di determinanti di somme che otteniamo prendendo in questo successivamente n colonne consecutive, partendo da ciascuna colonna, è una progressione di somme di ordine v e di ragione d'' .

Se invece nel prospetto [2] sopprimiamo la linea di posto $n-v+1$, per v pari e n dispari, e prendiamo le colonne di posto

$$\dots, m-2r, m-r, m, m+r, m+2r, \dots$$

dove m è intero qualsiasi ed r è dispari e consideriamo nel nuovo prospetto la successione di determinanti di somme che otteniamo prendendo successivamente n colonne consecutive, partendo da ciascuna colonna, abbiamo una progressione di somme di ordine v e di ragione $(-1)^{mn} (r)^{n^2} d^n$.

Ed altre progressioni di somme di determinanti di somme si possono ricavare dal prospetto [2]. Crediamo ormai inutile insistere sulla questione.

6. - Se in luogo di considerare il prospetto [2] si considera il seguente:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \dots & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ \dots & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots \end{array} \right.$$

dove $\dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$ è una progressione di somme di ordine n e di ragione d , si hanno analoghe proprietà, evitando le trasversali che contengono elementi eguali.

COMPORTAMENTO DELLA MUTAZIONE *OBSCURUS*
DI *CHRYSOLOPHUS PICTUS*
NELL'AMBIENTE GENICO DI *C. AMHERSTIAE*(*)

ALESSANDRO GHIGI

Accademico Pontificio

SYMMARIVM. — Auctor marem *Chrysolophum pictum obscurum* cum foemina *C. amherstiae* permiscet et ostendit magni momenti immutationes fenotypicas quae in secunda generatione exsurgunt.

È noto che la mutazione *obscurus* non modifica i colori fondamentali del fagiano Dorato (*Chrysolophus pictus* L.), ma li iscurisce, tanto nel maschio quanto nella femmina: unica differenza sensibile è data dalle timoniere mediane che sono obliquamente striate, anzichè marmoreggiate di nero. Sono pure noti i risultati dell'incrocio fra le due specie di *Chrysolophus*, *pictus* e *amherstiae*, nei quali ibridi si trovano associati caratteri dell'una e dell'altra specie, insieme a qualche carattere nuovo, come la fronte rossa invece che verde o gialla. Ho voluto vedere quali possano essere gli effetti della mutazione *obscurus* sui caratteri del fagiano di Lady Amherst e, a tale scopo, ho incrociato un ♂ *C. obscurus* con femmina *C. amherstiae*.

La mutazione *obscurus* è recessiva, contrariamente a quanto accade per l'altra mutazione melanica in *Phasianus*, che è dominante, onde la F_1 è riuscita normale, costituita cioè di esemplari maschi e femmine che offrono caratteri ben conosciuti. Fra questi ricorderò che il ciuffo ha la forma, la lunghezza e l'abbondanza di quello del fagiano

(*) Nota presentata il 5 agosto 1947.

dorato, ma è tutto rosso; la mantellina è bianca come nel fagiano di Lady Amherst, rigata di nero, ma ciascuna penna è troncata come nel Dorato. Il ventre è rosso, ma una fascia di color crema attraversa il torace e separa il rosso del ventre dal verde misto a rosso del collo.

Da una coppia F_1 di questo modello sono nati nella proporzione di 1:3, esemplari recessivi in possesso della mutazione *obscurus*, in numero di 5, e precisamente due maschi e tre femmine. Questi fagiani hanno raggiunto lo stato adulto ed i maschi hanno assunto il piumaggio definitivo. Hanno sofferto durante la guerra in modo tale da morire prima di riprodurre, rimanendomi una sola femmina che potrà essere capostipite di un reinerocio coll'*amherstiae*.

Frattanto descrivo i due maschi, dei quali ho potuto conservare le pelli in buono stato e che sono molto interessanti per gli effetti previsti determinati dal gene *obscurus*.

Descriverò inoltre una ♀ F_2 , probabilmente intersessuata, che assunse un abito parzialmente maschile, nel secondo anno di vita.

N. 1. - ♂. Ciuffo bianco paglierino lucente senza traccia del rosso proprio dell'*amherstiae*, nè del giallo dorato proprio del *pictus*.

Mantellina bianca colle due caratteristiche strie nere dell'*amherstiae* su ciascuna penna, con sfumatura nerastra contigua a ciascuna delle due strie. Dorso verde metallico a fondo nero su ciascuna penna. Scapolari e piccole copritrici delle ali nere con porzione apicale della penna verde scuro. Omerali e grandi copritrici delle ali azzurro metallico scuro. Secondarie bruno rossicce marmoreggiate di nero; primarie bruno nerastre, leggermente orlate di gialliccio sul vessillo esterno. Penne del groppone e del sopracoda nerastre, con strie trasversali bruno rossicce nella porzione basale, giallo scuro affumicato nella porzione apicale. Nelle penne del sopracoda, colorate fondamentalmente come le precedenti, compaiono prima sfumature rosse che divengono strie preapicali nelle più lunghe penne che stanno a contatto colle timoniere. Le lunghe copitrici laterali della coda hanno la stessa forma lanceolata di quelle del *pictus*; sono quasi completamente brune nella metà basale con strie nerastre poco distinte, che partono obliquamente dalla rachide e vanno verso il bordo. Gradualmente questo colore passa ad un grigio nerastro più chiaro verso gli orli e termina con una punta rossa. Le rachidi sono bianchicce. Timoniere mediane bruno grigiastre, marmoreggiate di bruno nerastro con tendenza a costituire strie tra-

sversali oblique, poco distinte. Timoniere laterali brune con strie trasverse nere, poco marcate nel mezzo del vessillo esterno, più distinte verso il bordo e verso la rachide. Sul vessillo interno le strie sono meno distinte.

Mento, gola e lati del collo bruni con marginature nere, che passano al verde nelle penne che più si avvicinano alla base del collo. Petto verde con strie submarginali nere. Questa specie di piastrone verde termina con una fascia di penne grigie scure alla quale succede verso il ventre, altra fascia bianco grigia, più chiara sui fianchi, corrispondente alla fascia gialla degli ibridi normali F₁. - Ventre e coscie grigi, ciascuna penna bruno rossa nella porzione basale.

Sui fianchi è visibile qualche tratto rosso. Addome bruno rossiccio; sottocoda dello stesso colore, colle maggiori penne terminate in nero sfumato in verde.

N. 2. - ♂. Differisce dall'esemplare precedentemente descritto specialmente pel fatto che le parti inferiori sono completamente nere, senza distinzione della parte pettorale da quella ventrale. Nelle penne del petto esistono tuttavia fasce preapicali sfumate in grigio, che sostituiscono quelle verdi del Lady Amherst e dell'ibrido già descritto, ma sono cangianti e danno un'impressione metallica. Le più lunghe penne dei fianchi sono ampiamente sfumate di verde. Addome e sottocoda bruno tabacco.

Nelle parti superiori, il ciuffo bianco paglierino ha qualche sfumatura rossastra. Scapolari e maggiori corptrici, rispettivamente verdi ed azzurre come nell'altro esemplare. Piccole copritrici e secondarie nere nelle parti visibili, scarsamente marmoreggiate di bruno nelle parti nascoste durante il riposo. Primarie bruno scure poco marmoreggiate di bruno chiaro. Dorso decisamente più scuro, colle porzioni apicali di ciascuna penna chiaramente sfumate di rosso nella regione dorsale; molto affumicate nel sopracoda. Penne laterali lancettiformi del sopracoda, variegata per il lungo di grigio chiaro e di grigio scuro, le maggiori colla porzione terminale bruna sfumata di rosso. Timoniere mediane grigio bruno, decisamente percorse da strie oblique nere; timoniere laterali bruno rossicce, più cariche nel bordo esterno, egualmente percorse da strie oblique nere.

N. 3. - ♀. Ciuffo, mantellina e coda hanno la stessa forma che nel maschio. Il colore generale è della femmina *obscurus* con forti sfuma-

ture cangianti in verde sulle strie nere del dorso e cangianti in azzurro su quelle delle copritrici delle ali e sulle scapolari. Le penne delle parti inferiori sono grigie alla base, hanno stria intermedia bruno rossiccia e margine nero. Ciuffo grigio lucente con macchiuzza preapicale rossiccia ed apice nero. Penne della mantellina grigio azzurrognolo cangiante, con tre strie trasversali color cuoio, margine bruno nero sottile, preceduto da una fascia grigio biancastra. Dorso ed estremità delle copritrici della coda grigie; timoniere brune, fittamente punteggiate e vermicolate di bruno nero.

* * *

La mutazione *obscurus* nell'ambiente genico di *C. amherstiae*, ha indotto due principali modificazioni: la prima è quella manifesta in entrambi gli esemplari, di avere schiarito il ciuffo al punto di renderlo bianco paglierino: si direbbe che il gene *obscurus* non solo non ha agito in estensione su questo gruppo di penne, ma ha diluito fino a renderla nulla, l'intensità delle tinte normali delle due specie incrociate.

L'altra modificazione che raggiunge il suo massimo nell'esemplare 2, è quella di aver reso uniformemente nere tutte le parti inferiori. Il gene differenziale che rende verde il petto e bianco il ventre nel *C. amherstiae* è sostituito dal gene per l'uniformità proprio a *C. pictus*, ma il gene per il rosso, sempre presente negli ibridi fra le due specie, qui sembra completamente assente. Mentre il gene melanico non riesce a cambiare la disposizione generale dei colori nel fagiano Dorato, introdotto nell'ambiente genico del *C. amherstiae*, raggiunge il massimo di intensità nelle parti inferiori mascherandone le due tinte nettamente separate l'una dall'altra, il verde o il bianco.

Il fatto è intesessante e merita di essere approfondito.

Ho ottenuto quest'anno alcuni pulcini da un incrocio così formato: ♂ *obscurus* × (*obscurus* × *amherstiae*). Quando in reincroci di questo genere agisce il *pictus* normale, i reincroci verso il fagiano Dorato, contrariamente a quelli che tendono al fagiano di Lady Amherst, sono poco diversi dal *pictus*; sarà interessante vedere nel nostro caso se la mutazione *obscurus*, associata a geni residuati dell'*amherstiae*, indurrà anche nel reincrocio cambiamenti apprezzabili.

IBRIDI FRA *CROSSOPTILON* E *GENNAEUS*(*)

(Con tre tavole)

ALESSANDRO GHIÒ

Accademico Pontificio

SUMMARY. — Describit Auctor hybrida animalia ex *Crossoptilon manchurico* et *Gennaeo beli* × *lineato* procreata et ostendit differentias secundarias, sed tantum tenuatas, in illis quoad sexum adesse.

Hybridi mares fecundi, hybridae foeminae vero steriles sunt, quarum dimidia pars ova non ponit et altera ponit ova parva quae fecundari nequeunt.

I.

Dalle mie ricerche sperimentali (1) è risultato che tanto il genere *Gennaeus* quanto il genere *Crossoptilon* sono due specie collettive, formate da razze e sottorazze locali, numerose in *Gennaeus*, scarse in *Crossoptilon*. Oggetto di discussione può essere, per quanto riguarda *Gennaeus*, se il gruppo *Hierophasis*, debba esservi compreso o no, ma la interfecondità da me sperimentata fra *G. horsfieldi* e *H. imperialis* e quella pure accertata fra *G. lineatus* e *H. swinhoi*, fanno ritenere che una unica catena di forme ci conduca dal *G. hamiltoni*, attraverso tutti i fagiani argentati, al gruppo *Hierophasis*.

Non ho esperienze di ibridazione tra i fagiani orecchiuti bianchi ed i bruni (*C. manchuricum*) e gli azzurri (*C. auritum*), ma la completa interfecondità di questi ultimi fra loro, lascia presumere che eguale interfecondità esista anche coi primi.

(*) Nota presentata il 5 agosto 1947.

(1) GHIÒ A., *Ricerche di sistematica sperimentale nel genere Gennaeus*. « Mem. R. Accad. Scienze », Bologna, 1912; IDEM, *Recherches hybridologiques sur les Crossoptilons*-Oiseau et Revue française d'Ornithologie. Paris, 1934.

Può quindi ritenersi che l'incrocio fra un qualsiasi *Crossoptilon* e un qualsiasi *Gennaeus* possa dare risultati applicabili a qualsiasi altra forma di ognuno dei due gruppi.

L'incrocio che mi è riuscito, ha avuto luogo tra maschio *C. mantchuricum* di razza pura e femmina F_1 *Gennaeus beli* \times *lineatus*. Va tenuto presente che questo ibrido ha dominanti i pochi caratteri distintivi di *G. beli*, salvo la mancanza di uniformità nel colore dei tarsi che sono, in alcuni esemplari, rossi come nel *beli*, in altri biancastri come nel *lineatus*; il principale carattere fisiologico distintivo tra *beli* e *lineatus*, consiste nella comparsa ritardata ad un anno di età dell'abito adulto nella prima di queste forme, in confronto all'acquisto immediato di tale abito, nel *lineatus*.

Ciò premesso, i caratteri antagonistici dei due generi sono i seguenti:

1. Piumaggio simile nei due sessi di *Crossoptilon*; piumaggio differente nei due sessi di *Gennaeus*;
2. assunzione immediata dell'abito di adulto nei due sessi di *Crossoptilon* in confronto alla tardiva mascolinizzazione dell'abito di una delle due forme di *Gennaeus* che hanno contribuito alla formazione dell'ibrido *Gennaeus*;
3. assenza di ciuffo occipitale in *Crossoptilon*, di fronte alla sua presenza in *Gennaeus*;
4. penne arricciate, vellutate, brevissime, sul capo di *Crossoptilon* in confronto a penne filamentose, formanti un lungo ciuffo in *Gennaeus*;
5. presenza di due lunghi ciuffi auricolari bianchi in *Crossoptilon*, di fronte alla loro totale assenza in *Gennaeus*;
6. venti a ventiquattro timoniere nel primo, 16 nel secondo;
7. timoniere mediane a barbe sfilacciate in *Crossoptilon*, timoniere mediane a vessillo compatto e normale in *Gennaeus*;
8. colore uniforme bruno in tutta la parte anteriore del corpo nei due sessi di *Crossoptilon*, colore rigato di bianco e nero nelle parti superiori e completamente nero nelle parti inferiori del maschio *Gennaeus*, uniformemente bruno nelle femmine di quest'ultimo, salvo le timoniere laterali che sono rigate di bianco e di nero;
9. uova verdi (*mantchuricum*) o bruniche (*auritum*) in *Crossoptilon*, roseo-rossastre in *Gennaeus*.

L'incrocio ebbe luogo nel 1942; nacquero 7 piccoli, di cui 4 maschi e 3 femmine; nel successivo 1943 si allevarono altri due maschi e una femmina. Totale 6 maschi e 4 femmine. Due maschi adulti sono andati perduti per effetto di granate lanciate dai tedeschi nel momento della ritirata finale; gli altri esemplari sono stati utilizzati per la conservazione della pelle o per le esperienze fisiologiche.

II.

Caratteri comuni a tutti gli ibridi di entrambi i sessi sono i seguenti:

Portamento generale, forma del corpo e della coda, voce somigliante a *Crossoptilon* più che a *Gennaeus*.

Ciuffo occipitale brevissimo, ridotto ad una semplice punta, formato da penne filamentose normali come quelle di *Gennaeus*: risulta che l'aspetto vellutato e ricciuto di queste penne, proprio di *Crossoptilon* è decisamente recessivo.

Ciuffi auricolari presenti in entrambi i sessi, ma assai brevi: non raggiungono in lunghezza la nuca e corrispondono presso a poco a quelli che si osservano nei giovanissimi *Crossoptilon*. Il vessillo delle timoniere mediane è compatto come in *Gennaeus*, ma l'estremità offre la curva propria di *Crossoptilon*. Numero delle timoniere 18.

N. 1. - ♂, ucciso il 12 aprile 1945. - Esemplare molto scuro a collo e gola in massima parte neri, larghe macchie castagne sulle ali, sul dorso e sulle copritrici caudali. Sulle parti inferiori domina un tono grigiastro con fascia nerastra all'altezza del petto e sono evidenti strie longitudinali bianche a ferro di lancia, a cominciare dalla base del collo, sul torace e sui fianchi.

Capo e ciuffo neri. Lunghezza delle maggiori penne del ciuffo occipitale mm. 30; sporgenza delle stesse oltre la nuca mm. 18. Lunghezza delle penne auricolari mm. 28. Ciuffi auricolari grigiastri, poco distintamente striati di bianchiccio. Collo nero chiaramente sfumato in bleu, colla parte coperta di ciascuna penna indistintamente rigata di bruno scuro e bruno chiaro. Penne del dorso vermicolate di bianco e nero, con rachide bianca e macchia bianca slargata nella porzione basale nascosta della penna, mentre la porzione apicale scoperta è grigiastra, leggermente sfumata di marrone. Questo colore si rende più intenso sul groppone e sul sopracoda, sulle scapolari, copritrici delle ali e remiganti secondarie, nelle quali i tre quarti basali di ciascuna penna sono neri con strie irregolari bianche, rivolte obliquamente dai margini alla rachide del vessillo, mentre l'apice è vermicolato ampiamente di marrone rossastro.

Gola bianco-grigiastra con strie trasversali nere. Collo nero con strie terminali bianche, appena distinte, lungo la linea centrale, alquanto più marcate ai lati. Petto e ventre vermicolati di bruno nerastro su fondo grigio, con evidenti frecce bianche sulle rachidi e sfumature bruno nerastre che si accentuano nel mezzo del petto e nel centro dell'addome. Ventre bruno, sottocoda nero sfumato in blou nelle penne più lunghe. Remiganti e grandi copritrici delle ali striate di bianco e nero ben distinti sul vessillo esterno, sfumati di bruno specialmente all'apice, su quello interno. Timoniere laterali estreme striate obliquamente di bianco e nero nella regione basale, con passaggio al nero unito sulla porzione apicale e specialmente sul vessillo esterno. Gradualmente nelle timoniere intermedie, compaiono sul vessillo esterno della zona mediana larghe fasce marroni striate di nero, più ampie nel secondo e terzo paio di timoniere. Il paio mediano è bianco con apice bruno marrone vermicolato di nero. Tutta la penna è vermicolata di nero con sette strie nere trasversali e normali alla rachide, che ricordano quelle presenti nelle timoniere mediane del fagiano di Lady Amherst.

Lunghezza totale dalla punta del becco all'estremità delle timoniere mediane mm. 890.

N. 2. - ♂. Differisce dal precedente per la maggiore lunghezza dei ciuffi auricolari che raggiungono mm. 32 ed essendo più chiari, spiccano sul color nero del ciuffo occipitale, che non sporge affatto oltre la nuca. La gola è più decisamente disegnata di bianco, orlato di nero. Tutto il corpo è quasi uniformemente striato e vermicolato di bianco e nero, con sfumature marroni appena apprezzabili, se si eccettuano macchie apicali nelle copritrici caudali. Sfumature giallicce sulle righe bianche delle parti inferiori. Remiganti primarie rigate sul vessillo esterno, nero grigie uniformi su quello interno. Nelle timoniere intermedie vi è appena traccia delle strie trasversali marrone. In complesso questo esemplare ha l'aspetto di un grosso fagiano lineato. Lunghezza totale mm. 880.

N. 3. - ♂. Intermedio fra i precedenti, ma più somigliante al n. 2 per quanto riguarda la presenza di sfumature marroni sulla regione apicale delle penne delle parti superiori. Le parti inferiori sono invece decisamente più chiare che in entrambi gli esemplari prece-

dentemente descritti e così pure sono più chiari i ciuffi auricolari, lunghi mm. 28. La differenza principale sta nelle timoniere mediane che sono uniformemente vermicolate di bianco e di nero senza strie trasversali nere.

N. 4. - ♂. Questo esemplare somiglia maggiormente al n. 1, anche per il disegno delle timoniere mediane, ma rinuncio a darne una descrizione dettagliata perchè esso è ancora vivente e non intendo sacrificarlo.

N. 5. - ♀. Parti superiori anteriormente bruno grigie, posteriormente e sulle ali, bianco rossastre, tutte finemente vermicolate di nero. Capo anteriormente bruno, volgente al nero nel ciuffo, che è più breve che nei maschi, lungo mm. 18. Ciuffi auricolari giallicci uniformi, senza strie, lunghi mm. 28. Gola biancastra, degradante in un bruno cenereo-gnolo esteso a tutte le parti inferiori, con qualche rara stria e vermicolazione gialliccia. Lati del collo tenuemente vermicolati di grigio e di nero. Remiganti bruno nerastre, vermicolate di bruno rossiccio, specialmente sui vessilli esterni.

Timoniere esterne nere, marginate di vermicolazioni bruno giallicce, sempre più estese sul vessillo interno e gradualmente più estese e tendenti al bianco, nella porzione basale del vessillo esterno. Le due paia di timoniere mediane offrono grosse vermicolazioni oblique, con tendenza a divenire longitudinali di fianco alla rachide, di colore nero, alternate ad altre bianco sporco e ad altre bruno giallastre. La porzione apicale è bruno rossastra con vermicolazioni nere e passa gradualmente alle tinte già descritte, nel paio mediano. Nel secondo paio la punta è nera ed una zona intermedia, con vermicolazioni rossicce, più estesa sul vessillo esterno, passa gradualmente alla regione nella quale il bianco e il nero si alternano in maniera decisa. Lunghezza totale mm. 780.

N. 6. - ♀. Differisce dall'esemplare precedente per essere più somigliante ai maschi, a causa di un tono più grigio, dovuto all'alternanza di vermicolazioni grigie e nere sulle parti dorsali e specialmente nel collo, nel dorso e nella schiena. Le penne del sopracoda offrono ampie macchie terminali marrone, vermicolate di nero come nei maschi. Ciuffi auricolari lunghi mm. 32; ciuffo occipitale mm. 25. Gola biancastra; collo inferiormente macchiato di nero. Penne del petto

brune nella metà basale, grigie in quella apicale. Addome variegato di bruno, di gialliccio e di nerastro, più somigliante a quello dei maschi che non alla femmina n. 5. Ventre bruno, sottocoda nerastro. Timoniere mediane con ampie strie bianche su entrambi i vessilli, parte oblique e parte longitudinali alla rachide, variegate con strie nere e bruno giallicce; apice nero con vermicolazioni bruno rossicce. Secondo paio di timoniere eccezionale: vessillo interno bianco a porzione pre-apicale marrone vermicolata di nero che passa gradualmente al nero. Vessillo esterno per due terzi bianco, irregolarmente macchiato e vermicolato di nero, mentre l'ultimo terzo riproduce la condizione dell'apice del vessillo interno. Nelle timoniere esterne diminuiscono le zone bianche ed aumentano le nere fino al piano esterno che è nero, con vermicolazioni biancastre sulla porzione basale del vessillo interno. Lunghezza totale mm. 750.

N. 7. - ♀. Differisce dalle altre femmine per i seguenti particolari. Il colore delle parti superiori è dello stesso tono, ma leggermente meno chiaro che non nel n. 6, ma è priva di macchie marrone nel sopracoda. La gola è uniformemente grigia, più scura che non nelle altre due femmine. Ciuffi auricolari lunghi mm. 35. Le parti inferiori sono ampiamente striate di bruno gialliccio, con linee concentriche alla forma della penna; questa condizione si verifica fino quasi all'estremità delle sottocodali e costituisce una delle principali differenze. L'altra differenza è nel colore della coda che è la più scura di tutte. Le timoniere laterali sono nere con vermicolazioni castagne sul vessillo esterno e bianco giallicce alla base dello stesso e nel margine del vessillo esterno. Nel terzo paio le vermicolazioni bianche raggiungono la metà del vessillo esterno e i $\frac{3}{4}$ di quello interno. Il secondo paio è vermicolato di bianchiccio, salvo la metà del vessillo esterno e la quarta parte di quello interno, che sono vermicolate di nero e di marrone. Il paio mediano è tutto vermicolato di nero, di bianco gialliccio e di bruno e somiglia molto alle timoniere mediane della femmina *beli*. Lunghezza totale mm. 780. Questa femmina, assai poco mascolinizzata, ha deposto uova.

N. 8. - ♀. Questa femmina è la più mascolinizzata nell'aspetto; somiglia al n. 6, pure essendo più chiara nel dorso e nel groppone: la coda riproduce l'aspetto di quella del maschio n. 3. È una femmina ovigera, ancora vivente, che non intendo uccidere e perciò non ho la

possibilità di descriverla più dettagliatamente. Il peso delle 14 uova deposte in questa stagione, fra aprile e maggio, è di gr. 240 complessivi, con una media di gr. 17,2 per uovo di fronte ad un peso medio di gr. 42 per uovo di Orecchiuto e di gr. 41, di ibrido *beli* × *lineatus*.

Le uova della femmina n. 7, deposte nel 1946 variavano da gr. 17,100 a 20,750. La massa del tuorlo superava quella dell'albume. Su tre uova esaminate, si sono riscontrati i seguenti pesi rispettivi: tuorlo gr. 8,100; 9,100; 7,500 (vedi pesi a parte).

III.

I colori sono dunque variabili da esemplare a esemplare.

Può dirsi che non esiste uniformità nel disegno delle macchie in F_1 . Un gruppo di maschi è quasi completamente rigato di bianco e nero in tutto il corpo, mentre un altro gruppo ha macchie brune più o meno estese sulla porzione distale delle penne. Alcuni esemplari hanno le timoniere mediane vermicolate di bianco e nero, altri hanno un certo numero di strie nere equidistanti che attraversano la penna, normalmente alla rachide: è questo un carattere nuovo che non si osserva nè in *Crossoptilon* nè in *Gennaeus*.

Due femmine sono quasi completamente brune, salvo la coda, come le femmine dei fagiani argentati; le altre due hanno tracce di vermicolazioni bianche sul dorso. La coda è in tutte abbondantemente rigata per il lungo, nei tre quarti basali.

È da notare che tutti i maschi sono più o meno abbondantemente rigati di bianco nelle parti inferiori, onde si possono trarre le seguenti conclusioni genetiche:

1. Il gene per la rigatura, dominante in tutti i maschi *Gennaeus*, si comporta in maniera analoga anche di fronte alla uniformità della tinta bruna di *Crossoptilon*, ma la dominanza non è perfetta perchè una metà degli esemplari offre macchie apicali, più o meno ampie, brune.

2. L'ibrido F_1 dimostra l'esistenza, nei maschi di *Gennaeus*, di un gene limitante l'estensione delle righe bianche alle sole parti superiori. Questo gene risulta recessivo di fronte a quello che determina l'uniformità fra parti superiori e inferiori in *Crossoptilon*, e tale suo

comportamento spiega l'estensione delle righe bianche alle parti inferiori degli ibridi.

Notevole il comportamento ereditario dei caratteri sessuali secondari. F_1 dimostra innanzi tutto che l'assenza dei caratteri sessuali secondari in *Crossoptilon*, va considerata come una mascolinizzazione della femmina. Infatti il piumaggio dei maschi ibridi è decisamente di tipo maschile, con dominanza, per quanto imperfetta, dei caratteri di *Gennaeus*, ma le femmine ibride sono intermedie tra la femmina *Crossoptilon* e la femmina *Gennaeus*. Si può concludere che gli incroci F_1 *Crossoptilon* \times *Gennaeus* offrono differenze sessuali secondarie, notevolmente attenuate in confronto a quelle che diversificano i due sessi in *Gennaeus*.

* * *

Sotto l'aspetto fisiologico, due delle quattro femmine ibride hanno deposto uova in numero normale. Delle altre due una non ha deposto nei suoi quattro anni di vita, mentre l'altra fu uccisa e preparata prima della stagione delle riproduzioni. Una femmina, ancora in vita, ha già deposto fra aprile e maggio del 1947, quattordici uova molto piccole, di lunghezza e di peso notevolmente inferiori a quelle delle femmine delle due specie pregenitrici, uova non fecondabili.

Il colore è roseo, come quello delle uova di *Gennaeus*, onde questa tinta risulta dominante su quella verdognola delle uova di *Crossoptilon mantchuricum*.

Ho già detto che due maschi furono uccisi per azioni belliche; aggiungo che altri due erano stati uccisi e preparati a scopo documentario; un quinto è morto di malattia nello scorso inverno ed il sesto, unico superstite, ha fecondato nella primavera 1947 nove uova su quindici, deposte da una fagiana argentata ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ La maggioranza delle uova fecondate non sono schiuse per un incidente di incubazione; tre pulcini sono nati e due, attualmente viventi ed in età di quattro mesi al momento della revisione di queste bozze mostrano di essere maschio e femmina. Il primo sta vestendo un abito giovanile, molto simile a quello del fagiano argentato giovane, mentre la femmina possiede qualche stria biancastra alla base del collo, tenue segno di mascolinizzazione nel piumaggio.

L'ibrido *Crossoptilon* × *Gennaeus* è dunque gonomonarrenico, perchè il maschio è capace di dare discendenza nel reinerocio con una almeno delle specie progenitrici, mentre la femmina non ha questa capacità. Ma le femmine ibride, nella percentuale del 50, depongono uova, sia pure non fecondabili e non offrono tracce di intersessualità. Se si considera che le femmine *Gennaeus* × *Phasianus*, *Gennaeus* × *Chrysolophus* sono sterili, intersessuate e mascolinizzate, si conclude che *Crossoptilon* e *Gennaeus* sono due generi strettamente affini fra loro e in sistematica vanno collocati, come fa il PETERS, uno accanto all'altro, per esprimere questa loro sperimentata affinità fisiologica.

DETERMINAZIONE DEL PESO DELLE VARIE PARTI DI 7 UOVA
DI *CROSSOPTILION* × *GENNAEUS*

Albume	gr. 7,4		
Tuorlo	» 8,1		
Guscio	» 3,3	TOTALE	gr. 18,8
Albume	gr. 8,2		
Tuorlo	» 9,1	TOTALE	gr. 20,7
Guscio	» 5,4		
Albume	gr. 6,6		
Tuorlo	» 7,5	TOTALE	gr. 17,6
Guscio	» 3,5		
Albume	gr. 9,5		
Tuorlo	» 9	TOTALE	gr. 21,6
Guscio	» 3,1		
Albume	gr. 7,4		
Tuorlo	» 8,1	TOTALE	gr. 18,8
Guscio	» 3,3		
Albume	gr. 8,4		
Tuorlo	» 9,4	TOTALE	gr. 21,2
Guscio	» 3,4		
Albume	gr. 6,90		
Tuorlo	» 7,5	TOTALE	gr. 17,9
Guscio	» 3,5		

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

TAVOLA I, fig. 1. — Maschio ibrido N. 1.

» » 2. — Femmina ibrida N. 6.

TAVOLA II, fig. 3. — Tratti di timoniere mediane dei due maschi N. 1 e N. 3.

» » 4. — Tratti di timoniere mediane delle due femmine N. 8 e N. 7.

TAVOLA III, fig. 5. — In alto estremità delle scapolari dei due maschi N. 3 e N. 1;
in basso, timoniere laterali di due femmine N. 6
e N. 7.

» » 6. — Intera covata delle uova della femmina n. 8: a sinistra
uovo di *Crossoptilon* puro e a destra di *Gemmaeus*
puro, per dimostrare la sproporzione di grandezza
tra le uova ibride e quelle pure.

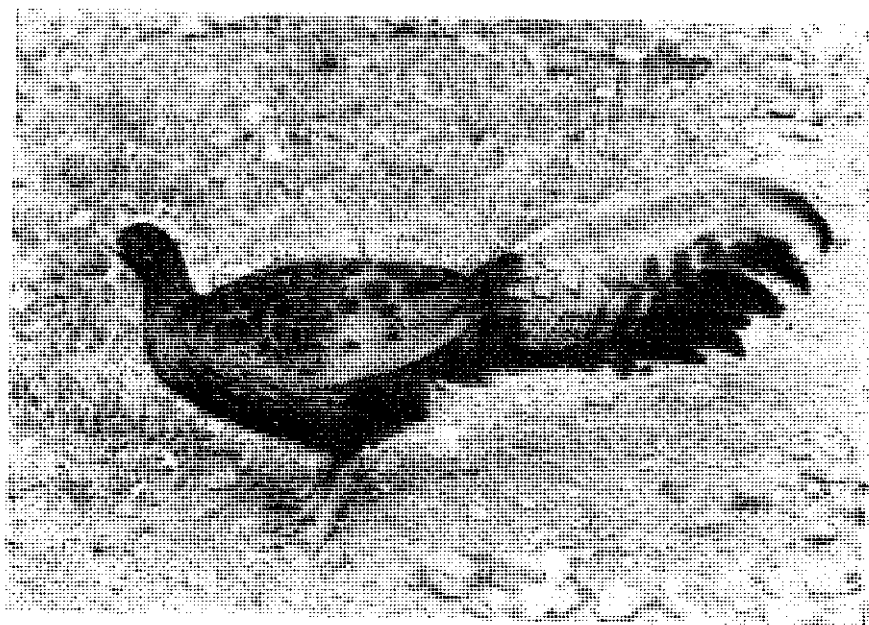


FIG. 1.

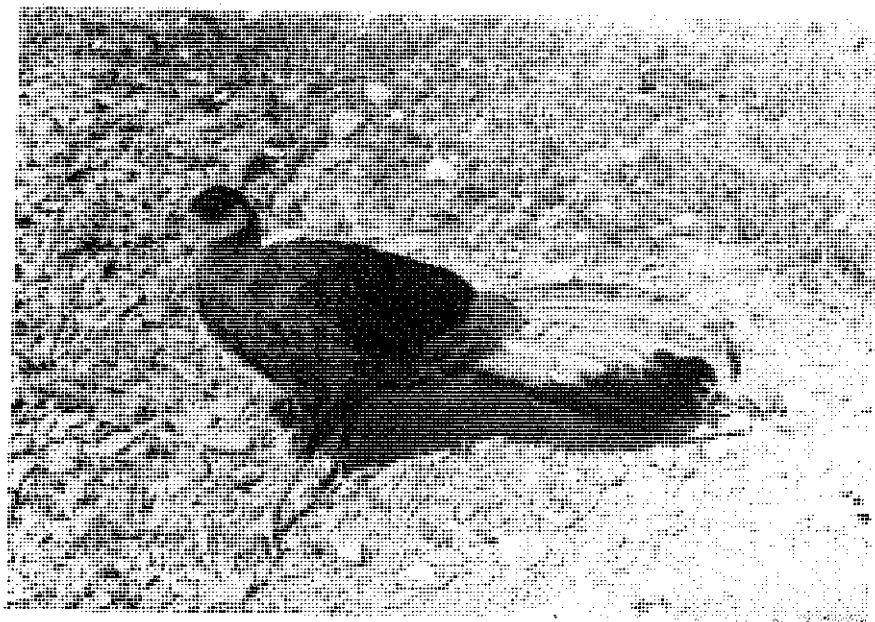


FIG. 2.

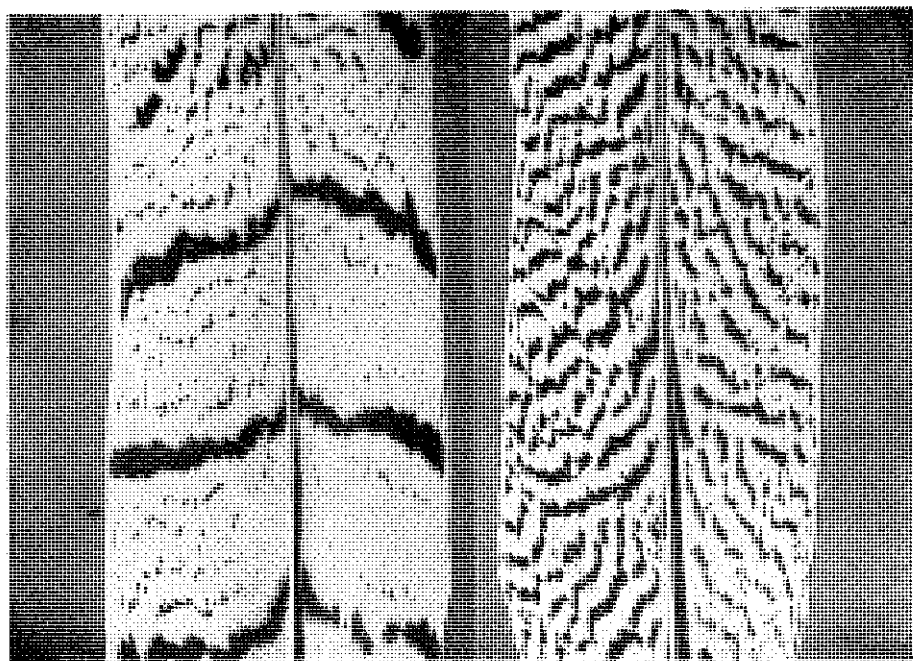


FIG. 3.

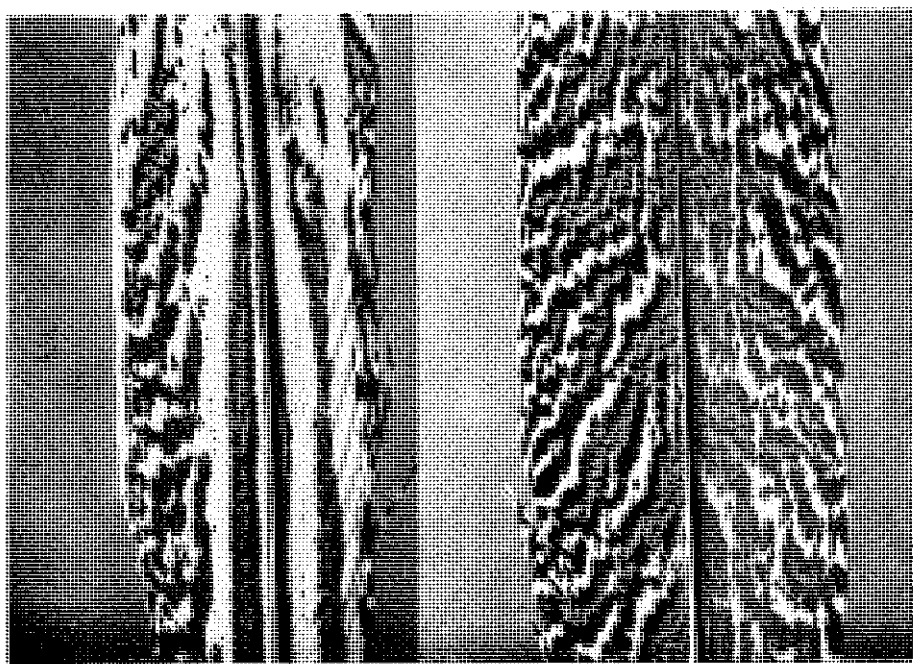


FIG. 4.

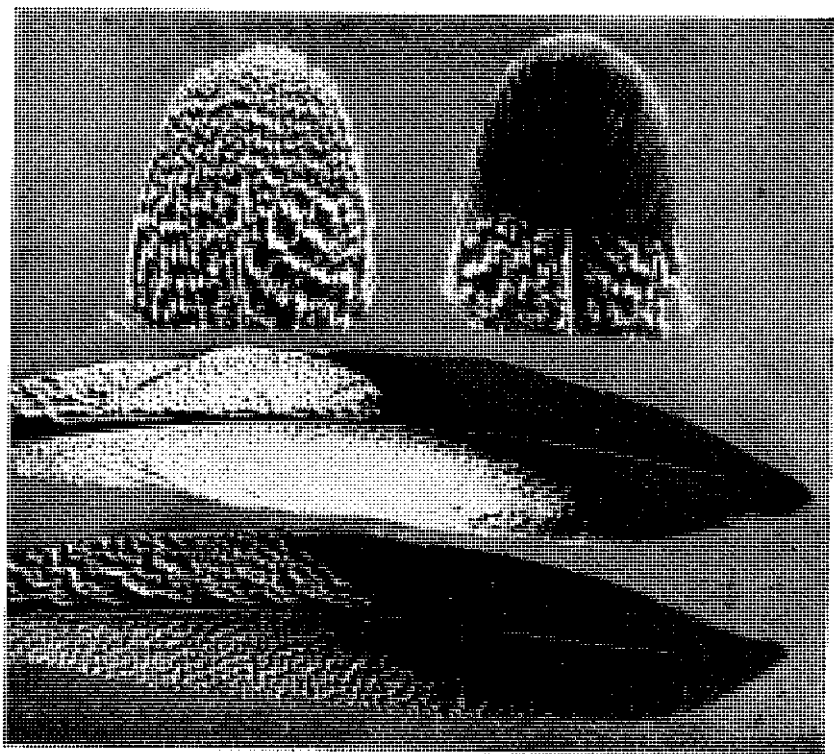


FIG. 5.

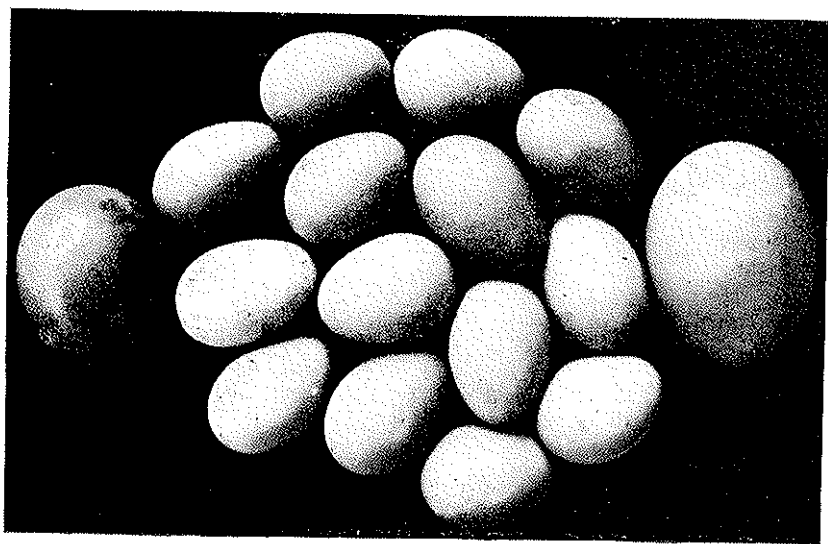


FIG. 6.

CONTRIBUTO CITOMETRICO ALLO STUDIO DELLA LEUCEMIA EOSINOFILA (*)

(con 2 tavole)

GALLO VITTORIO

SVMMARIVM. — In quodam leucemiae eosynophilae (mixtae) examen citometricum peractum est de sanguine peripherico et medulla.

Quod attinet ad neutrophilam seriem, quaedam citometricae mutationes repertae sunt, quarum nonnullae respondent mutationibus antea repertis in leucemia myeloide neutrophila; quo confirmari potest mixta leucemiae indoles (ex neutrophilia et eosynophilia simul), quam diversa ratione ipsi **ASTALDI** et **CURTI** ostenderunt.

Quod autem attinet ad seriem eosynophilam, nulla citometrica mutatio, quae percipi potest, inventa est, si excipias maiorem interdum dispersionem curvaturae qua exprimitur frequentia diametrorum ad immaturas series pertinentium.

Mentre nel campo delle leucemie mieloidi neutrofile si sono da tempo pubblicate ricerche di citometria (**FIESCHI**, **STORTI**, **STEINMAUER**, **GALLO**, **ROVERSI**, **FONTANA** e. a.), in tema di leucemia eosinofila non troviamo che pochi cenni di carattere qualitativo come quelli di **THOMSEN**, **PLUM** e **MAS Y MAGRO**. Utili mi sono apparse quindi indagini in tal senso su di un caso di leucemia eosinofila, gentilmente fornitomi dal collega **ASTALDI**, da lui descritto e commentato insieme al collega **CURTI**.

La probabilità di ammalarsi di leucemia eosinofila, di gran lunga inferiore a quella di ammalarsi di leucemia neutrofila, non permette di raccogliere facilmente più casi della malattia in questione. Ciò può così giustificare la pubblicazione di un solo caso nella presente nota,

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Antonio Pensa il 4 luglio 1947.

pensando che i miei risultati, aggiunti a quelli eventuali futuri di altri autori, possano concorrere a completare e fissare il quadro citometrico periferico e midollare di questa interessante malattia intorno alla quale ancor oggi non è del tutto spenta la discussione sulla sua natura leucemica.

Per evitare un'inutile ripetizione di quanto trovasi già nel lavoro di ASTALDI e CURTI sull'argomento, sia per l'esposizione come anche per la letteratura, rimando il lettore a quanto hanno scritto detti Autori, limitandomi qui solo a riassumere brevemente il caso da loro illustrato.

1) *Anamnesi familiare e personale*: Nulla di particolare.

2) *Inizio*: subdolo, decorso progressivo, esito infausto.

3) *Sintomatologia*: astenia, dolore sternale; febbre, pallore; modica epatomegalia, ingrandimento delle linfoghiandole latero-cervicali di sinistra, cospicua splenomegalia; nel periodo preterminale comparsa di emorragie e necrosi tonsillari e bucco-faringee. Dal lato ematico si rileva: elevato aumento delle cellule nucleate del sangue (da 35.000 a 165.000), con sensibile innalzamento del tasso percentuale degli eosinofili (da 26,1 a 30,2 %); presenza in circolo di emocitoblasti e di tutti gli elementi immaturi della serie mieloide, sia di tipo neutrofilo che di tipo eosinofilo, per quanto gli elementi maturi (di entrambi i tipi) siano i più numerosi; in periodo preterminale intensa *poussée* emocitoblastica (66 % di emocitoblasti su 165.000 elementi nucleati).

In quanto al midollo si rileva: cospicua iperplasia del tessuto mieloide con netta prevalenza degli elementi della serie eosinofila (rapporto neutrofili/eosinofili = 0,33); in periodo preterminale acutizzazione del quadro con aumento degli emocitoblasti (17 %) e degli elementi più giovani della serie mieloide, sia neutrofili che eosinofili (mieloblasti e promielociti 24,6 %).

4) *Quadri biopsici epatico e splenico*: infiltrazione di tessuto mieloide sia neutrofilo che eosinofilo.

5) *Esame istologico post-autopsico*: infiltrazione mieloide in gran parte eosinofila nei polmoni, nella parete gastrica, nella milza, nel fegato, nelle linfoghiandole latero-cervicali, tracheo-bronchiali, mesenteriche.

Dinanzi ad un simile quadro, potendo facilmente escludere l'esistenza di una ipereosinofilia costituzionale (esame ematico e midollare dei famigliari negativo in tal senso) o secondaria (assenza di parassitosi, fenomeni allergici ecc.), si può senza difficoltà porre la diagnosi di una ipereosinofilia leucemica anzichè una ipereosinofilia in leucemico basandosi sul fatto che l'affezione fondamentale descritta è di natura sicuramente leucemica e terminata acutamente con quadro ema-

tomidollare di leucemia emocitoblastica, che esiste iperplasia eosinofila notevole, nonchè metaplasia mieloide eosinofila degli organi e sensibile aumento degli eosinofili nel sangue periferico con passaggio in circolo di emocitoblasti e di diverse forme immature nelle varie fasi della loro evoluzione.

Essendo però la metaplasia mieloide non esclusivamente orientata verso la serie eosinofila ma anche verso la serie neutrofila, sebbene in minor misura, e notando pure in circolo la presenza di cellule immature neutrofile è logico pensare con ASTALDI e CURTI che, almeno in questo caso, tutto il sistema mieloide, nel suo complesso, debba ritenersi compartecipe e strettamente legato al processo leucemico, pur essendo il tessuto eosinofilo quello che più ha risentito dello stimolo leucemico.

Si deve quindi concludere che il caso in esame corrisponde a quello di una leucemia mista con prevalenza eosinofila.

Ciò è un argomento in più per giustificare una ricerca citometrica in entrambi i sistemi sia eosinofilo sia neutrofilo.

Passiamo allora all'esposizione dei dati citometrici.

Per quanto riguarda la fase della malattia le ricerche si sono espletate in due periodi diversi: l'uno che corrisponde al quadro, diciamo così, stazionario della malattia (marzo 1943) come descritto nei primi momenti che è capitato sotto osservazione, l'altro in fase preterminale (aprile 1943), caratterizzato da una spiccata immaturità delle cellule circolanti bianche con aumento notevole della quota emocitoblastica.

Si sono misurati nella leucemia 100 elementi per ciascuna categoria e per ciascuna seriazione si è calcolato la media aritmetica (A), la moda (N), lo scarto quadratico medio (σ) l'indice di variabilità (v) in %, l'indice di asimmetria (Schewness di Pearson) (α) e gli errori medi triplicati delle diverse costanti statistiche (¹). Sul midollo la ricerca ha compreso i mielociti e i metamielociti sia eosinofili che neutrofili.

Relativamente ai mielociti ho voluto stimare la velocità media relativa di accrescimento protoplasmatico mediante il coefficiente angolare dell'equazione interpolante lineare calcolato sulle dimensioni diametriche nucleari e protoplasmatiche (²).

(¹) Per maggiori dettagli si veda il mio lavoro sulla citometria degli eosinofili periferici. In quanto all'errore medio della moda si è dotato quello della differenza tra media aritmetica e moda.

(²) Per maggiori dettagli sull'argomento rimando il lettore al mio lavoro sulla « correlazione dimensionale nucleo-plasmatica dei mielociti neutrofili normali, biermeriani e leucemici ».

Ho creduto bene di svolgere ricerche in tal senso perchè ho potuto osservare che la velocità media relativa di accrescimento protoplasmatico si presenta generalmente aumentata nelle forme leucemiche mieloidi neutrofile.

I dati relativi alle diverse costanti biometriche sono condensati nelle tabelle che seguono ove sono messi a confronto con dati, limiti, normali, desunti da seriazioni in parte compilate all'uopo per la presente nota e in parte già riportate in lavori precedenti. Si è pure messo a confronto la differenza delle medie e dei sigmi relativi al mese di marzo e aprile (ossia al periodo stazionario e preterminale) con il doppio del suo scarto quadratico medio per giudicare o meno la sua sistematicità (tabelle 9-10). Nella tabella 11 figurano i valori dei coefficienti angolari e delle rispettive costanti F di Snedecor alle quali si è giunto attraverso l'analisi della covarianza, onde poter anche qui giudicare probabilisticamente sulla significatività delle differenze tra i valori corrispondenti al periodo stazionario e al periodo preterminale della malattia in istudio.

Alle tabelle seguono i grafici, relativi alle diverse seriazioni e in ultimo il grafico (fig. 25 e 26) ove sono riportate le rette di regressione interpolate sui diametri protoplasmatici in funzione dei diametri nucleari.

Per le figure devesi osservare che i due poligoni di frequenza sovrapposti che si trovano nelle figure relative ai valori normali, corrispondono rispettivamente alla seriazione avente la media più piccola (1) ed alla seriazione avente la media più grande (2). In quanto alle figure 25 e 26 le rette contrassegnate dai numeri 1 e 2 corrispondono rispettivamente alle osservazioni fatte nel periodo stazionario e nel periodo preterminale. La retta 1 interpola i valori segnati da circoletti, la retta 2 interpola i valori segnati da punti, e questo, sia per la figura 25 che per la figura 26. Le rette 3 e 4 corrispondono rispettivamente ai casi normali aventi il minimo e il massimo coefficiente angolare.

Le ricerche citometriche svolte sui granulociti neutrofili periferici permettono di rilevare un fenomeno assai interessante quale è quello della coesistenza di almeno due popolazioni di elementi, denunciata dall'aspetto plurimodale del poligono di frequenza relativo alla corrispondente seriazione del periodo stazionario. Le popolazioni si distinguono l'una dall'altra per la sensibile differenza dei loro caratteri dimensionali essendo l'una costituita da elementi la cui dimensione media non molto si discosterebbe dai limiti normali e l'altra formata invece da elementi di dimensioni che possiamo considerare abnormemente piccole.

TABELLA 1. — *Granulociti neutrofili periferici*. (Diametro cellulare).

	N o r m a l i		Marzo	Aprile
A	da 13,19 \pm 0,39	a 14,05 \pm 0,21	11,15 \pm 0,60	14,11 \pm 0,24
σ	» 0,85 \pm 0,26	» 1,03 \pm 0,31	2,00 \pm 0,42	0,82 \pm 0,17
ν	» 6,13 \pm 1,84	» 7,46 \pm 2,24	17,98 \pm 3,81	5,79 \pm 1,23
N	» 12,89 \pm 0,44	» 14,88 \pm 0,53	—	14,42 \pm 0,30
α	» -1,19 \pm 0,52	» 0,65 \pm 0,52	—	0,38 \pm 0,37

TABELLA 2. — *Granulociti eosinofili periferici* (Diametro cellulare).

	N o r m a l i		Marzo	Aprile
A	da 14,39 \pm 0,38	a 15,29 \pm 0,35	14,91 \pm 0,32	15,00 \pm 0,24
σ	» 0,67 \pm 0,20	» 0,91 \pm 0,27	1,05 \pm 0,22	0,82 \pm 0,17
ν	» 4,53 \pm 1,36	» 6,32 \pm 1,88	7,06 \pm 1,50	5,45 \pm 1,63
N	» 13,95 \pm 0,32	» 15,29 \pm 0,43	14,71 \pm 0,39	14,60 \pm 0,30
α	» 0,00 \pm 0,52	» 1,53 \pm 0,52	0,21 \pm 0,37	0,04 \pm 0,37

TABELLA 3. — *Metamielociti neutrofili*. (Diametro cellulare).

	N o r m a l i		Marzo	Aprile
A	da 12,49 \pm 0,10	a 13,19 \pm 0,16	14,70 \pm 0,46	14,70 \pm 0,47
σ	» 0,78 \pm 0,07	» 1,17 \pm 0,11	1,54 \pm 0,33	1,57 \pm 0,33
ν	» 5,98 \pm 0,57	» 8,85 \pm 0,84	10,51 \pm 2,23	10,70 \pm 2,27
N	» 12,55 \pm 0,13	» 13,12 \pm 0,19	13,82 \pm 0,57	13,84 \pm 0,58
α	» 0,08 \pm 0,16	» 0,12 \pm 0,16	0,57 \pm 0,37	0,54 \pm 0,37

TABELLA 4. — *Metamielociti eosinofili*. (Diametro cellulare).

	N o r m a l i	Marzo	Aprile
A	da 13,09 \pm 0,59 a 14,29 \pm 0,89	14,20 \pm 0,70	14,11 \pm 0,48
σ	» 1,31 \pm 0,28 » 1,97 \pm 0,42	2,32 \pm 0,49	1,61 \pm 0,34
ν	» 9,15 \pm 1,94 » 15,05 \pm 3,19	16,37 \pm 3,46	11,41 \pm 0,24
N	» 12,96 \pm 0,78 » 13,86 \pm 0,48	13,85 \pm 0,85	13,71 \pm 0,59
α	» 0,00 \pm 0,37 » 0,38 \pm 0,37	0,15 \pm 0,37	0,24 \pm 0,37

TABELLA 5. — *Mielociti neutrofili*. (Diametro protoplasmatico).

	N o r m a l i	Marzo	Aprile
A	da 11,85 \pm 0,19 a 12,21 \pm 0,21	12,78 \pm 0,51	13,81 \pm 0,50
σ	» 1,44 \pm 0,14 » 1,73 \pm 0,16	1,72 \pm 0,36	1,67 \pm 0,36
ν	» 12,03 \pm 1,14 » 14,37 \pm 1,36	13,45 \pm 2,85	12,11 \pm 2,57
N	» 11,67 \pm 0,23 » 12,09 \pm 0,28	12,50 \pm 0,63	13,35 \pm 0,61
α	» -0,17 \pm 0,16 » 0,20 \pm 0,16	0,16 \pm 0,37	0,27 \pm 0,37

TABELLA 6. — *Mielociti neutrofili*. (Diametro nucleare).

	N o r m a l i	Marzo	Aprile
A	da 10,31 \pm 0,14 a 10,53 \pm 0,15	11,20 \pm 0,44	11,37 \pm 0,41
σ	» 0,95 \pm 0,09 » 1,15 \pm 0,11	1,47 \pm 0,31	1,35 \pm 0,29
ν	» 9,11 \pm 0,86 » 10,91 \pm 1,04	13,02 \pm 2,76	11,90 \pm 2,52
N	» 9,09 \pm 0,18 » 10,10 \pm 0,15	9,74 \pm 0,54	10,46 \pm 0,50
α	» 0,23 \pm 0,16 » 0,50 \pm 0,16	1,05 \pm 0,37	0,67 \pm 0,37

TABELLA 7. — *Mielociti eosinofili*. (Diametro protoplasmatico).

	N o r m a l i	Marzo	Aprile
A	da $13,35 \pm 0,57$ a $15,18 \pm 0,77$	$14,25 \pm 0,61$	$14,07 \pm 0,51$
σ	» $1,35 \pm 0,41$ » $1,81 \pm 0,54$	$2,02 \pm 0,43$	$1,70 \pm 0,36$
v	» $10,14 \pm 3,04$ » $12,40 \pm 3,72$	$14,20 \pm 3,01$	$12,11 \pm 2,57$
N	» $13,12 \pm 0,70$ » $14,58 \pm 0,94$	$14,20 \pm 0,74$	$13,20 \pm 0,63$
α	» $0,10 \pm 0,52$ » $0,58 \pm 0,52$	$0,11 \pm 0,37$	$0,51 \pm 0,37$

TABELLA 8. — *Mielociti eosinofili*. (Diametro nucleare).

	N o r m a l i	Marzo	Aprile
A	da $9,78 \pm 0,55$ a $10,41 \pm 0,49$	$10,29 \pm 0,34$	$10,30 \pm 0,42$
σ	» $1,00 \pm 0,30$ » $1,29 \pm 0,39$	$1,13 \pm 0,24$	$1,41 \pm 0,30$
v	» $9,91 \pm 2,98$ » $13,25 \pm 3,98$	$10,99 \pm 2,34$	$13,71 \pm 2,91$
N	» $9,14 \pm 0,52$ » $10,20 \pm 0,61$	$9,78 \pm 0,41$	$9,91 \pm 0,52$
α	» $0,04 \pm 0,52$ » $0,92 \pm 0,52$	$0,45 \pm 0,37$	$0,28 \pm 0,37$

TABELLA 9. — *Confronto di medie*.

	A		D	$2\sigma_{(D)}$
	Marzo	Aprile		
Granulociti neutrofili	11,15	14,11	2,96	0,34
Granulociti eosinofili	14,91	15,00	0,09	0,27
Metamielociti neutrofili	14,70	14,70	0,00	0,53
Metamielociti eosinofili	14,20	14,11	0,09	0,40
Mielociti neutrofili (protoplasma) . .	12,78	13,81	1,03	0,37
Mielociti eosinofili (protoplasma) . .	14,25	14,05	0,20	0,39
Mielociti neutrofili (nucleo)	11,30	11,37	0,07	0,34
Mielociti eosinofili (nucleo)	10,29	10,30	0,01	0,32

TABELLA 10. — *Confronto di variabilità.*

	g		Dσ	2σ _(Dσ)
	Marzo	Aprile		
Granulociti neutrofili	2,000	0,819	1,181	0,24
Granulociti eosinofili	1,058	0,816	0,237	0,19
Metamielociti neutrofili	1,542	1,574	0,082	0,25
Metamielociti eosinofili	2,325	1,612	0,713	0,28
Mielociti neutrofili	1,718	1,671	0,047	4,26
Mielociti eosinofili (protoplasma) . .	2,020	1,702	0,318	0,27
Mielociti neutrofili (nucleo)	1,469	1,353	0,116	0,25
Mielociti eosinofili (nucleo)	1,129	1,412	0,283	0,22

TABELLA 11. — *Confronto delle regressioni.*
(Coefficienti di regressione)

	Normali		Marzo	Aprile	Costante F
Mielociti neutrofili . .	0,410	0,546	0,620	0,752	0,831
Mielociti eosinofili . .	0,636	1,258	1,020	0,600	2,62

I limiti di significato di F per N = 150 corrispondono a 3,90 e 6,81.

I limiti di significato di F per N = 200 corrispondono a 3,89 e 6,76.

Dato l'aspetto del poligono di frequenza (fig. 5), tali microleucociti non possono assolutamente considerarsi come valori estremi di elementi minusvarianti di una collettività omogenea che presenti semplicemente una maggiore variabilità rispetto alla norma. La presenza di microleucociti nelle leucemie non è certo cosa nuova, come del resto quella di macrociti, facendo entrambe parte del concetto di anisocitosi neutrofila, sulla quale si è fermata l'attenzione degli Autori già da alquanto tempo; FONTANA a tal proposito dice: « È ben evidente che nelle leucemie si può con facilità parlare di micro- e ma-

erolencocitosi »; quello che però qui è interessante rilevare e che non è troppo noto è la scissione della collettività dei neutrofili maturi in almeno due popolazioni.

Dinnanzi ad un simile fenomeno è difficile poter resistere alla tentazione di formulare qualche ipotesi interpretativa.

La prima causa del fenomeno che ci possa venire in mente è quella di un errore di tecnica nel senso che, per una non uniforme distribuzione della sostanza colorante, si abbia avuta in una zona iper-colorazione di elementi che ne ha prodotto una loro contrazione, come accade non raramente di osservare negli strisci che si fanno usualmente in clinica. Tale giudizio è però facilmente confutabile perchè obstando i seguenti argomenti:

1) I microleucociti descritti si trovano in ogni parte del vetrino mescolati agli altri elementi in modo apparentemente casuale.

2) Si è curata il più possibile l'uniformità di colorazione.

3) I globuli rossi che si trovano insieme agli elementi in questione non si presentano ipercolorati.

Scartato per queste ragioni l'intervento di un banale errore di tecnica restano in campo ipotesi patogenetiche. Uno sguardo alle costanti statistiche degli elementi neutrofili immaturi ci permette di rilevare in genere una maggiore variabilità oltre che un maggior diametro medio; però le curve si estendono particolarmente verso le classi maggiori anzichè verso le classi minori ove esse scendono regolarmente senza raggiungere dimensioni piccole abnormi e senza evidenziare la presenza di una popolazione separabile di microelementi.

Tutto ciò porta a concludere che la presenza della popolazione di microcellule nella collettività immatura neutrofila esiste, se mai, allo stato puramente potenziale e può essere evidenziato solamente quando le cellule siano mature, per un meccanismo periferico.

Ragionando per analogia e pensando che microcellule simili si possono provocare artificialmente con un più lungo tempo di permanenza di sostanza colorante o con una sua maggior concentrazione, si può essere indotti a pensare che il carattere di questa abnorme popolazione sia quello di essere meno resistente agli agenti chimico-fisici del processo di fissazione e colorazione degli strisci; si può altresì pensare che la riduzione dimensionale sia invece attiva, ossia avvenuta per un maggior effetto di cause intrinseche (invece-

chiamamento? atteggiamenti autodifensivi verso l'emacateresi, come pensa ROVERSI?).

La mancanza di un uguale fenomeno nelle forme immature ci vieta di applicare lo schema interpretativo proposto da DI GUGLIELMO sulla anormalità dei processi di omoplasia tra macro- e micromieloblasti e tra mielociti e leucociti, o, per meglio dire, lo limiterebbe al passaggio da metamielocito a leucocito maturo.

Comunque sia, rimane ancora ignota la causa della presenza di due distinte popolazioni; nè abbiamo argomenti per stabilire un rapporto di causa ed effetto con le due modalità con cui si potrebbe considerare scissa nella leucemia la serie bianca, ossia in cellule di provenienza emocitoblastica normale e in cellule di diretta provenienza emoistioblastica (FERRATA), oppure in cellule di carattere neoplastico e in cellule di reazione leucemoide secondo il concetto di ARITZ, applicato da SIRTORI e FIORANI GALLOTTA nelle leucemie, se ammettiamo la teoria neoplastica delle stesse.

A complicare le cose sta anche il fatto che il fenomeno è contingente. Infatti negli elementi osservati nel periodo preterminale non si riscontra traccia di microciti nel senso sopra spiegato. Del resto, sfogliando la letteratura, ci si può facilmente convincere che il carattere dimensionale dei granulociti non si presenta in modo univoco nella leucemia; così, per esempio, mentre FONTANA ha riscontrato in alcuni casi di leucemia neutrofila forme piccole addirittura di μ 5-7 oltre che forme grandi di μ 20-21, ROVERSI ha osservato semplicemente uno spostamento a destra notevole della formula leucocitaria per assenza di forme a piccolo diametro e prevalere di forme a diametro maggiore, senza però che si siano osservate, sempre fra i leucociti maturi, dimensioni superiori a quelle fisiologiche. Tutto ciò fa apparire il problema della leucemia, anche da questo punto di vista, come piuttosto complesso e abbisognevole di essere ulteriormente studiato. Resta poi ancora, del resto, da provare in modo sufficiente se la presenza delle due collettività sia caratteristica delle leucemie eosinofile miste oppure si presenti talvolta anche nelle comuni leucemie mieloidi neutrofile.

Il problema della duplicità micro-normocitometrica dei granulociti neutrofilii maturi, riscontrata in una fase della malattia da noi studiata rimane perciò ancora un problema aperto agli effetti di determinare l'assenza eziopatogenetica di tale duplicità.

Rivolgiamo ora l'attenzione alle cellule immature neutrofile. L'esame delle tabelle e delle figure relative mette in evidenza:

1) *A carico dei metamielociti*: aumento del diametro cellulare medio, che trovandosi al di sopra dei limiti relativi ai casi normali, può, con una certa probabilità, considerarsi patologicamente superiore a quello che preesisteva alla malattia. Così dicasi dei sigmi. Anche gli indici di asimmetria si presentano superiori. Non si rileva invece differenza fra le due collettività rispettivamente del periodo stazionario e del periodo preterminale.

2) *A carico dei mielociti*: notiamo per i diametri protoplasmatici un valore medio superiore ai valori normali, onde si può, con una certa probabilità, considerarlo patologicamente superiore a quello che preesisteva allo stato della malattia. Essendo poi la differenza tra il diametro medio del periodo stazionario e quello del periodo preterminale superiore al doppio del suo scarto quadratico medio, si è indotti a pensare alla sua significatività ed a presumere quindi che dal periodo stazionario al periodo preterminale tale diametro medio si sia aumentato.

I sigmi trovansi invece entro i limiti della norma e la differenza tra le due variabilità (quella del periodo stazionario e quella del periodo preterminale) è inferiore al doppio del suo scarto quadratico medio; per cui appare meno probabile una loro variazione rispetto ai valori preesistenti allo stato di malattia. In quanto agli indici di asimmetria troviamo per il periodo stazionario un valore che rientra nei limiti normali mentre li supera nel periodo preterminale. Osservando però i parametri, insieme ai rispettivi valori medii triplicati, non ci sentiamo di dimostrare variazioni sistematiche in proposito. In quanto ai nuclei dei mielociti neutrofilii osserviamo che i diametri medii si trovano al di sopra del limite superiore dei valori normali, onde con una certa probabilità possiamo sospettare un aumento dimensionale patologico di tali nuclei rispetto ai valori relativi allo stato preesistente alla malattia. Non vi sono però variazioni significative tra il periodo stazionario ed il periodo preterminale. Altrettanto si può dire per quanto riguarda i sigmi che però si trovano al di sopra dei valori normali, ciò che rende probabile un loro aumento rispetto allo stato preesistente alla malattia. Patologicamente aumentato è molto probabile che sia l'indice di asimmetria relativo al periodo stazionario,

perchè, anche diminuito del triplo del suo errore medio, conserva ancora un valore superiore al limite normale; così pure superiore all'indice di asimmetria relativo al periodo preterminale, aumentato del triplo del suo errore medio.

In quanto al coefficiente angolare della retta interpolante i valori diametrici protoplasmatici medii rispetto ai corrispondenti valori nucleari, notiamo che esso appare sopra i limiti dei casi normali da me studiati già nel lavoro sulle correlazioni, fenomeno che si è già riscontrato a proposito delle leucemie mieloidi neutrofile e che si è interpretato come disturbo ontogenetico nello sviluppo intercinetico dei mielociti. Il valore della costante F di SNEDECOR essendo inferiore ai limiti significativi delle tavole di tale autore, ci indica che il numero delle osservazioni compiute non ci permette di dimostrare che la differenza tra il valore corrispondente al periodo stazionario e il valore corrispondente al periodo preterminale sia significativa.

Riassumendo quanto abbiamo detto, ci risulta dai dati citometrici relativi alla serie immatura neutrofila che:

- 1) si hanno dimensioni medie maggiori rispetto alla norma;
- 2) una maggior variabilità rispetto alla norma ad eccezione dei diametri protoplasmatici (dei mielociti);
- 3) un ulteriore aumento di questi nel periodo preterminale;
- 4) una maggior velocità media relativa di accrescimento protoplasmatico dei mielociti;
- 5) in genere una maggior asimmetria con prevalenza dei valori superiori alla moda.

Di questi fenomeni alcuni sono stati già da me riscontrati o dedotti nei miei casi già studiati di leucemie mieloidi neutrofile (aumento del diametro medio protoplasmatico, aumento della velocità ecc.), mentre altri (aumento del diametro nucleare medio, maggior variabilità) si possono osservare in alcuni dei casi leucemici studiati da FRESCH e STORTI.

Va inoltre rilevato come, mancandoci gli elementi per stabilire una differenza sistematica tra la velocità relativa media protoplasmatica corrispondente al periodo stazionario e quella corrispondente al periodo preterminale, l'aumento del diametro protoplasmatico, riscontrato in questa ultima fase della malattia, potrebbe considerarsi indipendente da variazioni della velocità di accrescimento protoplasmatico.

Per quanto riguarda la serie eosinofila, dalle tabelle e figure relative possiamo facilmente osservare come i diversi diametri medi relativi sia agli elementi maturi sia ai meta- e mielociti, si presentano entro i confini della norma, onde con una certa probabilità di essere nel vero potremo pensare che non vi siano state variazioni patologiche di tale costante statistica; mentre è molto probabile che patologicamente aumentata sia invece la variabilità dei metamielociti e dei protoplasmi mielocitarii nel periodo stazionario e dei nuclei mielocitarii nel periodo preterminale. Risultano pure differenze significative fra i due stadii in cui si è studiata la malattia, in quanto esse superano sempre il doppio del loro scarto quadratico medio. I valori dei sigmi risultano significativamente diminuiti nel periodo preterminale ad eccezione di quelli relativi ai nuclei dei mielociti eosinofili che, mentre presentano una variabilità entro i limiti della norma nel periodo stazionario, tanto da farci sospettare che non si abbiano avute in questo periodo variazioni patologiche, dimostrano un suo chiaro aumento nel periodo preterminale. In quanto agli indici di asimmetria, ad eccezione dei diametri protoplasmatici dei mielociti ove, dal confronto degli errori medii, si può sospettare un aumento patologico dell'asimmetria nel periodo preterminale, non si possono rilevare altre modificazioni significative.

In quanto al coefficiente angolare della retta interpolante i valori diametrici protoplasmatici medii rispetto ai corrispondenti valori nucleari, osservando la tab. 10 e la fig. 25 vediamo come, mentre nel periodo stazionario il coefficiente angolare appare entro i limiti della norma, nel periodo preterminale ne è al di sotto; però per il valore assunto dalla costante F di SNEDECOR non potendo considerare significativa la differenza tra i due periodi, con una certa probabilità di essere nel vero possiamo pensare che non avvengano modificazioni del parametro in questione o, almeno, che esse siano state molto modeste.

Da quanto risulta dalla serie eosinofila possiamo allora concludere che il comportamento di essa nel processo leucemico studiato non presenta dal lato citometrico tutte quelle caratteristiche che qui troviamo per la serie neutrofila, e ciò può essere una prova in più di quanto sia diversa la biologia degli elementi eosinofili da quelli neutrofil.

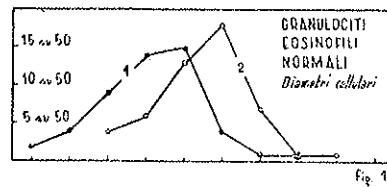


Fig. 1

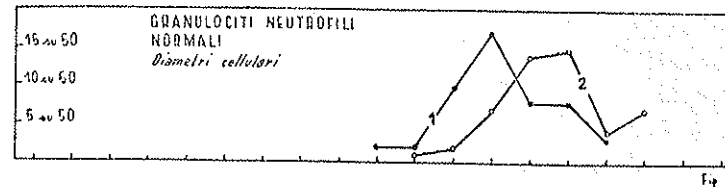


Fig. 4

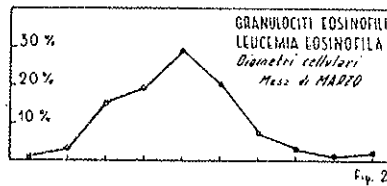


Fig. 2

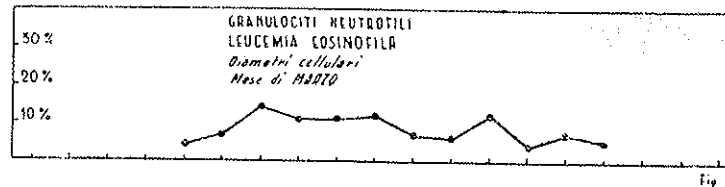


Fig. 5

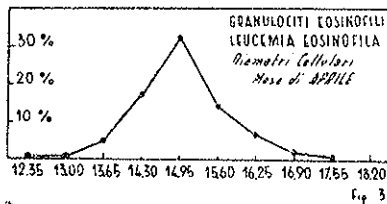


Fig. 3

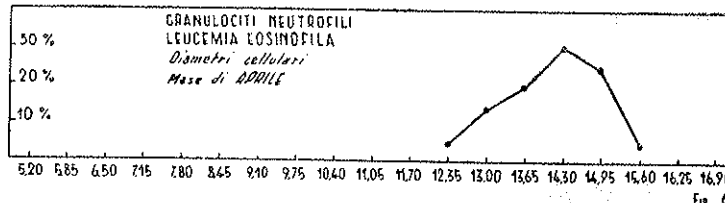


Fig. 6

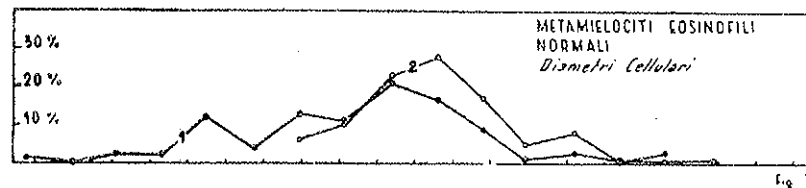


Fig. 7

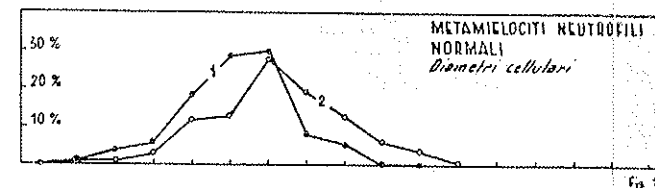


Fig. 10

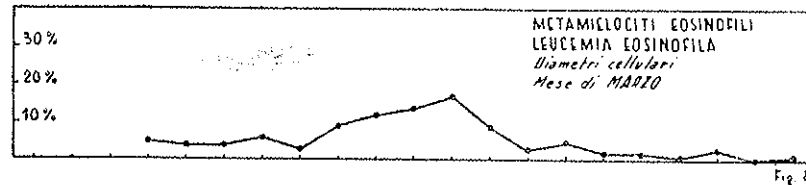


Fig. 8

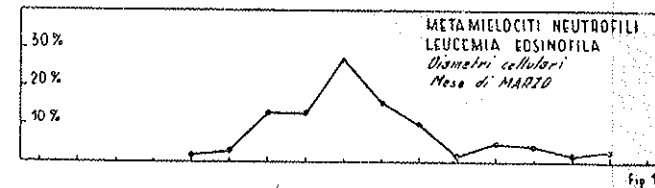


Fig. 11

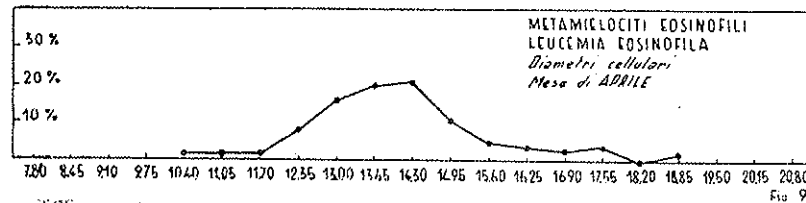


Fig. 9

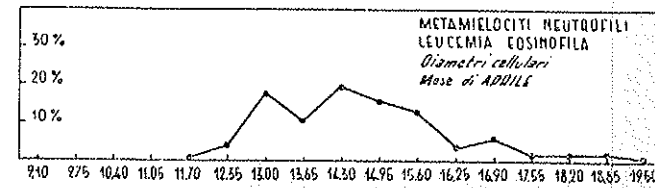
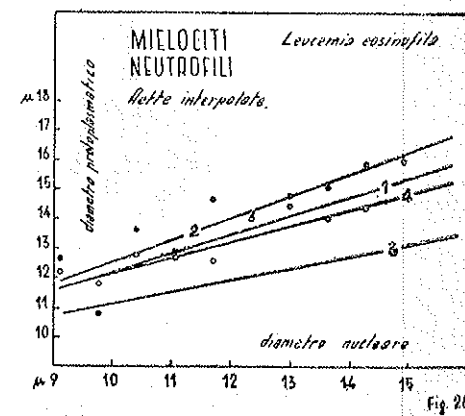
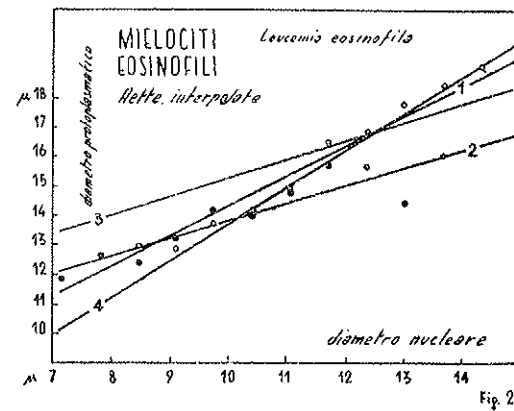
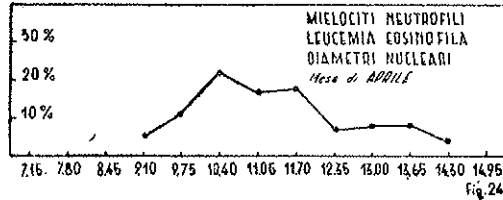
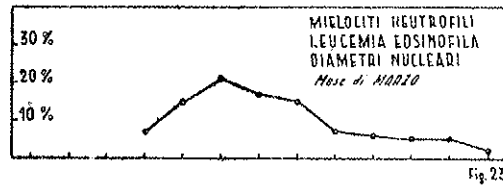
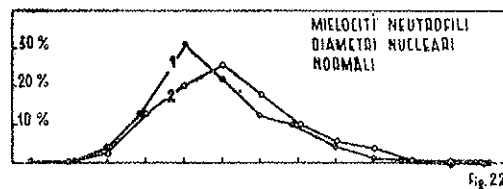
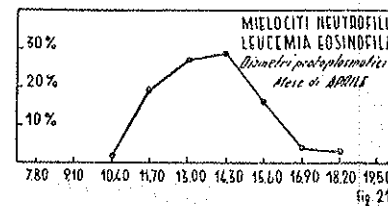
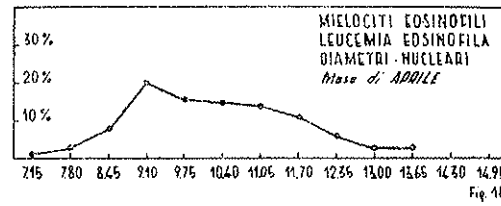
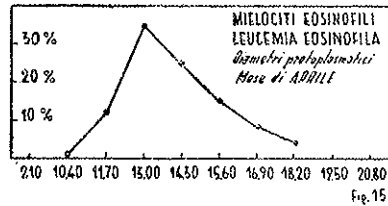
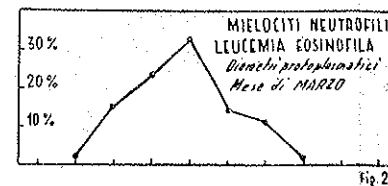
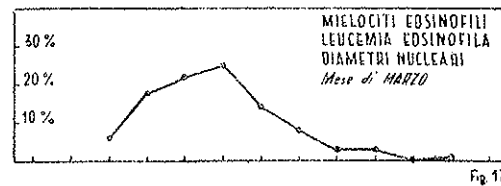
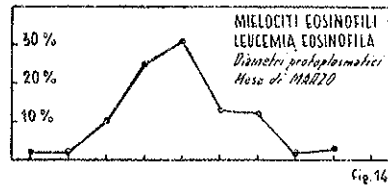
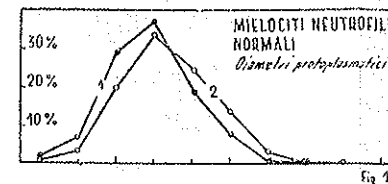
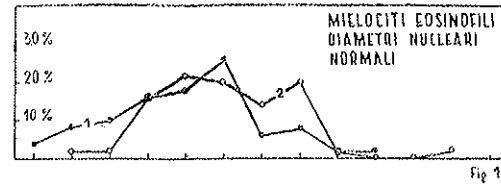
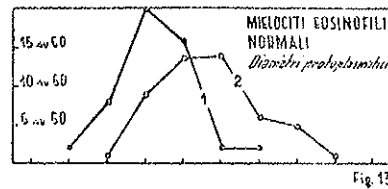


Fig. 12



BIBLIOGRAFIA

- APITZ, cit. da SIRTORI.
- ASTALDI G. e CURTI P. C., *Contributo alla conoscenza della leucemia eosinofila*. «Haemat.» in corso di stampa.
- BRAVI A., *La questione dell'emoistioblasto*. Tip. già Cooperativa, Pavia, 1934.
- DI GUGLIELMO G., *Anisocitosi e poichilocitosi dei polimorfonucleati neutrofili*. «Folia Medica», 8, 281, 1924.
- FERRATA A., cit. da BRAVI.
- FIESCHI A. e STORTI E., *Ricerche di citometria nelle leucemie*. «Haemat.», 5, 15, 1934.
- FONTANA A., *Anisocitosi e poichilocitosi dei globuli bianchi nelle malattie infettive e nelle emopatie*. «Haemat.», 8, 301, 1937.
- GALLO V., *Ricerche di citometria nel tessuto mieloide dei soggetti normali*. «Haemat.», 24, 245, 1942.
- *Correlazione dimensionale nucleoplasmatica dei mielociti neutrofili normali, biermeriani e leucemici in periodo intercinetico*. «Haemat.», 29, 1946.
- *Ricerche di citometria sui granulociti eosinofili periferici*, in «Acta» della Pont. Ac. Sc., corso di stampa.
- MAS Y MAGRO, *Nota a proposito de la anisoleucosis*. «Arc. de Cardiol. y Hemat.», I, 331, 1924.
- ROVERSI A. S., *La formula leucocitometrica*. «Min. Med.», 1, 47, 1933.
- SIRTORI C. e FIORANI GALLOTTA A., *Studio dei caratteri morfologici delle cellule leucemiche su striscio* (con riferimento alle reazioni leucemoidi). «Arch. Ist. Bioch.», 15, 104, 1942.
- SNEDECOR G. W., *Statistical Methods*. «The Collegiate press», Ames, Iowa U.S.A., 1946.
- STEINNAURER I. H., *Vergleichende Grossmessungen an den neutrophilen Leucocyten und ihren Vorstufen bei 10 fallen chronischer Myelose*. Fol. «Haemat.», 50, 410, 1933.
- THOMSEN S. e PLUM P., *Eosinophilic leukemia*. «Acta medica Scand.», 101. II e III, 1939.

Dall'Istituto di Clinica Medica dell'Università di Pavia
(Direttore Prof. Paolo Introzzi)

RICERCHE DI CITOMETRIA SUI GRANULOCITI EOSINOFILI PERIFERICI (*)

(Con due figure)

VITTORIO GALLO

SUMMARIVM. — Citometricum examen granulocytorum eosynophilorum periphericorum peracta est, per diametri quingentorum elementorum mensionem, aequa ratione distributorum, in decem casibus. Ita supputatae sunt praecipuae biometricae constantes, et functio critica Pearsoniana. Quaesitae etiam sunt causae, quibus diversitas inter diametra habetur. Postremo investigatum est de mutua necessitudine inter diametrum et gradum segmentationis nuclearis.

Scarsi e discordanti sono nella letteratura i dati concernenti le dimensioni dei granulociti eosinofili periferici (BAILEY, BUNTING, HALLIBURTON, LOVE, MAXIMOW) (1). Dal ROVERSI che in accurate ricerche citometriche si è prevalentemente occupato dalla serie neutrofila non possiamo assumere ulteriori informazioni al riguardo. La ragione principale di tutto ciò deve ricercarsi nella difficoltà di raccogliere un numero sufficiente di dati per la scarsità degli elementi eosinofili sullo striscio.

Dato però l'interesse fisiopatologico che presentano tali cellule, ho pensato che uno studio sistematico citometrico della serie in questione non sarebbe solo stato fine a se stesso, ma avrebbe giovato ad una conoscenza più profonda della loro biologia. Pertanto ho pensato

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Antonio Pensa il 31 Luglio 1947.

(1) Secondo BAILEY μ 12-14, secondo BUNTING μ 10-12, secondo HALLIBURTON μ 12-15, secondo LOVE μ 14,3 (media), secondo MAXIMOW μ 12 (media).

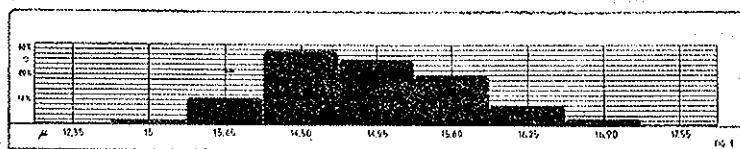
di riesaminare gli elementi eosinofili normali con una più dettagliata analisi biometrica onde avere un termine sicuro di confronto per ulteriori indagini in campo patologico.

Si sono svolte le ricerche su dieci casi normali (adulti e maschi), misurando per ogni caso cinquanta cellule. Dopo 10' dal prelievo gli strisci vennero colorati col May Grünwald-Giemsa osservando scrupolosamente i tempi (3', 6', 18'). Come dimensione da misurare ho scelto la media aritmetica di due diametri incrociati, scelti nel modo più opportuno.

Nella seguente tabella sono riportate le seriazioni relative ai singoli casi e al gruppo statistico, formato dal loro insieme, con l'istogramma delle frequenze.

FREQUENZE

Diametri	Caso I°	Caso II°	Caso III°	Caso IV°	Caso V°	Caso VI°	Caso VII°	Caso VIII°	Caso IX°	Caso X°	Tutti
12,85	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	2
13,00	3	4	3	—	—	—	—	—	—	—	10
13,65	7	9	13	3	4	7	2	1	4	2	52
14,30	16	14	17	14	12	15	23	11	6	20	148
14,95	16	15	7	12	14	15	14	15	13	10	131
15,60	5	4	10	13	12	10	8	12	18	8	100
16,25	1	1	—	6	6	3	2	8	7	7	41
16,90	2	1	—	2	1	—	1	3	1	2	13
17,55	—	—	—	—	1	—	—	—	1	1	3



Come valori rappresentativi sintetici dei diametri misurati ho scelto la media aritmetica (A) e la moda (N_*), che sono le medie più usate in campo biometrico. La moda, anzichè identificarla con il valore centrale della classe più frequente, per essere più corretti, è stata ottenuta per interpolazione con il metodo dei momenti, sul quale, per brevità, non mi intrattengo; tale metodo ha servito anche per il calcolo delle altre costanti biometriche di cui andremo trattando.

Come misura della variabilità ho scelto lo scarto quadratico medio, simboleggiato dalla lettera σ o dato, per n (¹) abbastanza grande, da:

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - A)^2}$$

essendo n il numero degli scostamenti $(x_i - A)$ dalla media aritmetica.

Come indice di variabilità relativa ho scelto il coefficiente di variabilità, ossia:

$$v = \frac{\sigma \times 100}{A}$$

In quanto all'asimmetria delle distribuzioni di frequenza, come sua misura ho impiegato lo skewness di Pearson, dato da:

$$\alpha = \frac{A - N_e}{\sigma}$$

Per esprimere, in base al numero delle osservazioni (n), il grado di fiducia che dobbiamo accordare alle costanti biometriche ricavate, si è calcolata per ciascuna di esse il suo errore medio. Il vero valore della costante riferita alla popolazione infinita si ritiene praticamente compreso entro il triplo del suo errore medio.

Alle formule seguenti corrispondono gli errori medi della media aritmetica (ϵ_A), della moda (ϵ_D), inteso come errore della differenza $A - N_e$, dello scarto quadratico medio (ϵ_σ), del coefficiente di variabilità (ϵ_v), e infine dell'indice di asimmetria (ϵ_α):

$$\epsilon_A = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \epsilon_D = \pm \sigma \sqrt{\frac{3}{2n}}, \quad \epsilon_\sigma = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{2n}},$$

$$\epsilon_v = \frac{v}{\sqrt{2n}} \left[1 + 2 \left(\frac{v}{100} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \epsilon_\alpha = \sqrt{\frac{3}{2n}}$$

Dato che $2 \left(\frac{v}{100} \right)^2$ risulta nel nostro caso una quantità piuttosto piccola si è calcolato il valore approssimativo di ϵ_v secondo l'espressione $\pm \frac{v}{\sqrt{2n}}$.

Nella seguente tabella vengono riportati i valori delle costanti biometriche relativi alle seriazioni studiate.

(¹) Per un numero di osservazioni piccolo in luogo di n va posto $n-1$.

A ciascuna costante segue il triplo del suo errore medio.

Caso	$A \pm 3\varepsilon_A$	$N_a \pm 3\varepsilon_D$
I	$14,61 \pm 0,858$	$14,44 \pm 0,488$
II	$14,39 \pm 0,885$	$14,39 \pm 0,472$
III	$14,40 \pm 0,828$	$14,07 \pm 0,402$
IV	$15,09 \pm 0,845$	$14,86 \pm 0,422$
V	$15,09 \pm 0,862$	$14,87 \pm 0,444$
VI	$14,79 \pm 0,806$	$14,64 \pm 0,374$
VII	$14,79 \pm 0,284$	$14,29 \pm 0,348$
VIII	$15,28 \pm 0,336$	$15,00 \pm 0,412$
IX	$15,29 \pm 0,850$	$15,29 \pm 0,428$
X	$15,05 \pm 0,882$	$13,70 \pm 0,467$
TUTTI	$14,89 \pm 0,117$	$14,78 \pm 0,143$

Caso	$\sigma \pm 3\varepsilon_\sigma$	$\nu \pm 3\varepsilon_\nu$	$\alpha \pm 3\varepsilon_\alpha$
I	$0,845 \pm 0,253$	$5,78\% \pm 1,78$	$0,204 \pm 0,519$
II	$0,910 \pm 0,274$	$6,32\% \pm 1,90$	$0,005 \pm 0,519$
III	$0,774 \pm 0,232$	$5,38\% \pm 1,61$	$0,435 \pm 0,519$
IV	$0,815 \pm 0,245$	$5,40\% \pm 1,62$	$0,285 \pm 0,519$
V	$0,855 \pm 0,256$	$5,66\% \pm 1,70$	$0,261 \pm 0,519$
VI	$0,721 \pm 0,266$	$4,88\% \pm 1,46$	$0,210 \pm 0,519$
VII	$0,670 \pm 0,201$	$4,53\% \pm 1,36$	$0,753 \pm 0,519$
VIII	$0,794 \pm 0,239$	$5,20\% \pm 1,56$	$0,356 \pm 0,519$
IX	$0,824 \pm 0,248$	$5,40\% \pm 1,62$	$0,000 \pm 0,519$
X	$0,904 \pm 0,272$	$6,00\% \pm 1,80$	$1,581 \pm 0,519$
TUTTI	$0,874 \pm 0,083$	$5,86\% \pm 0,556$	$0,137 \pm 0,164$

Come si può osservare, in nove casi i valori modali si presentano costantemente inferiori alle corrispondenti medie aritmetiche, mentre in un caso solo i due parametri, con l'approssimazione da noi raggiunta, si identificano. Il fatto però di trovare su nove un solo caso in cui si dovrebbe parlare di perfetta simmetria ci lascia molto in dubbio sull'at-

tribuirgli tale proprietà e ci fa piuttosto pensare che il valore nullo dell'indice α anzichè corrispondere alla realtà (riferendosi alla rispettiva popolazione infinita), sia una variazione accidentale intorno ad un valore positivo dello stesso. Possiamo così esprimere, come regola, che le seriazioni dei diametri dei granulociti eosinofili si presentano asimmetriche con massimi di frequenza spostati verso il limite inferiore della curva di frequenza.

Sappiamo del resto come la simmetria perfetta o quasi sia un evento piuttosto raro in biologia.

Ammettendo allora la sistematicità dell'asimmetria nelle nostre seriazioni e scartando perciò l'equazione della curva gaussiana per rappresentare nel continuo le serie di frequenza studiate, ciò che implicherebbe come condizione necessaria, sebbene non sufficiente, la simmetria delle stesse, si presenta il problema della scelta di un'altra funzione che si adatti allo scopo. In casi simili già da tempo i biologi ricorrono al sistema delle curve di Pearson la cui scelta è subordinata al calcolo di una particolare costante detta funzione critica del Pearson o funzione F (qualcuno la chiama anche costante K) e alle costanti β_1 e β_2 .

Le espressioni delle tre costanti sono le seguenti:

$$F = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(4\beta_2 - 3\beta_1)(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)} \quad , \quad \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \\ \beta_2 &= \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \end{aligned}$$

ERRATA CORRIGE (PAG. 191)

Le espressioni

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^n y_i (x_i - A)^2 \text{ ecc.}$$

vanno corrette come segue

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^n y_i \left(\frac{x_i - A}{\lambda} \right)^2 \text{ ecc.}$$

essendo λ l'ampiezza di classe e y_i le frequenze relative.

La distribuzione gaussiana costituisce un caso particolare del sistema delle curve Pearson (quando $F=0$, $\beta_1=0$ e $\beta_2=3$).

I valori sperimentali di F , β_1 e β_2 , sono risultati i seguenti:

Casi	F	β_1	β_2
I	0,294	0,288	3,665
II	0,000	0,000	3,327
III	-0,014	0,036	2,065
IV	-0,322	0,063	2,340
V	-0,283	0,187	3,020
VI	-0,015	0,030	2,270
VII	-0,627	0,865	3,662
VIII	-0,087	0,076	2,305
XI	0,000	0,000	3,190
X	-0,222	0,545	2,730
TUTTI	-0,515	0,070	3,053

Nell'ipotesi che si tratti qui di serie pearsoniane, i valori negativi di F indicano come equazione da adottarsi la seguente (tipo 1°):

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{va_2} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{va_1}$$

relativa ad una curva limitata ai due estremi, asimmetrica e con origine al valore modale.

Nel caso 1° in cui F è positivo e minore di uno la funzione di frequenza sarebbe invece la seguente (tipo 4°):

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-m} e^{-\text{varctg} \frac{x}{a}}$$

relativa ad una curva asintotica in entrambe le direzioni e asimmetrica. - Nel caso II e IX in cui la funzione F , almeno con il nostro

grado di approssimazione, risulta nulla, essendo $\beta_2 < 3$ l'equazione da adottarsi sarebbe (tipo II):

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m$$

relativa ad una curva limitata ai due estremi, simmetrica e con origine al valore modale.

Va però notato che i valori della funzione critica F e delle costanti β_1 e β_2 costituiscono una condizione necessaria ma non sufficiente per la scelta di una curva entro il sistema delle curve di Pearson, nel senso che, una volta stabilitone il tipo, resta ancora da provarne l'adattamento con i valori sperimentali mediante il test χ^2 di Pearson. Quest'ultima indagine, connessa ad altre questioni relative all'argomento troverà luogo in una mia ulteriore nota.

Viste le principali costanti biometriche riferite ai singoli casi e al gruppo statistico risultante dal loro insieme e fatto un breve cenno sulle equazioni di Pearson che potrebbero rappresentare nel continuo le serie di frequenza studiate, nel caso che esse siano pearsoniane, occupiamoci ora di un dettaglio di tecnica che, da quanto si dirà, risulta di una certa importanza e può costituire una causa d'errore quando si presentasse l'eventualità di paragonare i nostri risultati con quelli di altri autori.

Si tratta della disposizione degli elementi eosinofili sullo striscio rispetto alle loro dimensioni. È noto già da tempo che i globuli bianchi si distribuiscono sul vetrino in modo irregolare (Gyllenward); per cui, eliminata l'eventuale causa d'errore consistente in una disposizione non casuale delle dimensioni diametriche in senso trasversale avendo percorso il vetrino a partire da due centimetri dall'estremo ove si è iniziato lo striscio e proceduto a serpentina verso il centro toccando alternativamente i due margini, restava ancora da controllare se, man mano che si procedeva longitudinalmente verso il centro del vetrino, le dimensioni tendevano o no a variare sistematicamente in più o in meno.

Per risolvere il problema, nei primi cinque casi si sono compilate due distinte seriazioni per ciascuno di essi, l'una costituita dai primi 25 elementi misurati e l'altra dai restanti 25 e se ne sono paragonate le rispettive medie, osservando se le differenze tra le medie

dei due gruppi erano sempre in un senso e paragonando i risultati con quelli che si sarebbero avuti per effetto del caso.

Si riportano i risultati ottenuti, ove A_1 corrisponde alla media aritmetica dei primi 25 elementi misurati e A_2 corrisponde alla media aritmetica degli altri 25 elementi:

Casi	A_1	A_2	$A_2 - A_1$
I	14,40	14,82	+ 0,42
II	14,03	14,75	+ 0,72
III	14,18	14,62	+ 0,44
IV	14,82	15,39	+ 0,57
V	15,09	15,12	+ 0,03

Le differenze che si presentano costantemente di egual segno, con prevalenza delle medie A_2 , fanno concludere per una distribuzione non casuale delle cellule sullo striscio, rispetto alle loro dimensioni, in modo che procedendo longitudinalmente verso il centro del vetrino e oltre, le dimensioni tendono a variare in più. Per dare una valutazione quantitativa alla nostra conclusione chiediamoci con quale probabilità si sarebbe ottenuto per effetto del caso un simile risultato. Si tratta di applicare il problema del calcolo delle probabilità inerente alle prove ripetute di eventi indipendenti.

Chiamando allora con E l'evento di trovare $A_2 > A_1$ ed F l'evento contrario, ossia di trovare $A_2 \leq A_1$, aventi rispettivamente le probabilità p e q , ci chiediamo quale è la probabilità di trovare n volte E essendo n stesso il numero delle prove.

Nella ipotesi della casualità è $p = q = 0,50$, n nel nostro caso corrisponde a 5, onde la probabilità cercata risulterà:

$$\binom{n}{n} p^n q^{n-n} \quad \text{ossia} \quad \binom{5}{5} p^5 q^{5-5} = p^5$$

e quindi $0,50^5$, che corrisponde a una probabilità percentuale del 3% circa, per cui possiamo con una certa sicurezza confermare il nostro giudizio sulla sistematicità dell'errore che si compie procedendo dall'inizio dello striscio verso il centro.

Dobbiamo ora dedicarci ad un'altra questione. Come si può osservare dalla tavola 2 i diametri medi riferiti a ciascun caso appaiono generalmente differenti. Si pone allora il problema di stabilire se, pensando di portare all'infinito il numero delle osservazioni, i diversi valori tendono ad un valore unico o rimangono ancora distinti, ciò che in linguaggio statistico moderno equivale a dire se i singoli casi costituiscono altrettanti campioni provenienti da un medesimo universo e da universi in tutto o in parte distinti.

Per poter rispondere al nostro quesito applichiamo la cosiddetta « analisi della varianza » (analysis of variance) introdotta in metodologia statistica da R. A. FISHER.

Il metodo può così brevemente riassumersi:

Si considerano m campioni ciascuno costituito di n elementi e sia x il carattere misurato. Si pensi di disporre allora le $m n$ misure in m colonne ed n righe. Le colonne corrispondono a ciascun caso (o campione). Le righe invece collegano elementi ciascuno di un caso diverso, ordinati in modo causale od arbitrario.

$$\begin{array}{ccccc}
 x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \dots & x_{1,m} \\
 x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \dots & x_{2,m} \\
 x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \dots & x_{3,m} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 x_{n,1} & x_{n,2} & x_{n,3} & \dots & x_{n,m}
 \end{array}$$

Qualora gli m campioni provengano da universi in tutto o in parte differenti, la variabilità nel senso delle colonne, ossia entro ciascun gruppo (o caso), sarebbe di regola inferiore alla variabilità nel senso delle righe (tra i gruppi) cioè in collettività formate da elementi di ciascun campione, per il fatto che, mentre nel senso delle colonne gli elementi provengono da uno stesso universo e sono perciò omogenei, in quest'ultimo caso provengono da distinti universi e sono perciò eterogenei. Nel caso di provenienza da un comune universo le due variabilità tendono ad identificarsi.

Si tratta allora di giudicare se è significativa o meno la differenza tra le due variabilità in questione.

Le grandezze da considerare sono:

1. la varianza di tutti gli $m n$ elementi (σ^2)

2. la varianza delle colonne $\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sigma_{i,j}^2$ dove $\sigma_{i,j}^2$ sono le varianze di ogni caso

3. la varianza delle righe $\sigma_m^2 = \frac{n \sum_{j=1}^m (\bar{x}_{i,j} - \bar{x})^2}{m - 1}$ dove $\bar{x}_{i,j}$ sono le medie relative ad ogni caso ed \bar{x} la media generale.

La varianza σ^2 si ottiene elevando al quadrato lo scarto quadratico medio del gruppo statistico formato dall'insieme dei casi.

Convienne riassumere le diverse grandezze considerate nel seguente specchio:

Causa della variazione	Somma dei quadrati degli scarti	Gradi di libertà	Varianze (col. 2: col. 3)
col. 1	col. 2	col. 3	col. 4
Varianza nei gruppi	$(n-1) \sum_{j=1}^m \sigma_{i,j}^2$	$(n-1) m$	σ_n^2
Varianza tra i gruppi	$n \sum_{j=1}^m (\bar{x}_{i,j} - \bar{x})^2$	$m-1$	σ_m^2
Varianza totale	$(nm-1) \sigma^2$	$nm-1$	σ^2

Si mettono allora a confronto le due varianze σ_n^2 e σ_m^2 facendo il rapporto della varianza maggiore alla varianza minore, ossia:

$$F = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_n^2}$$

La costante F dicesi di SNEDECOR, autore che ne ha anche tabulati i valori a limiti di significato 5% e 1% ricavandoli da corrispondenti valori del test z di FISHER che equivale a:

$$\frac{1}{2} (\log_e \sigma_m^2 - \log_e \sigma_n^2)$$

Per stabilire se la differenza tra σ_m^2 e σ_n^2 sia sistematica e quindi se i nostri campioni provengono da distinti universi si confronta il valore sperimentale di F con quelli tabulati dallo SNEDECOR scegliendo la colonna corrispondente ai gradi di libertà della varianza maggiore e la linea corrispondente ai gradi di libertà della varianza minore.

All'incrocio della colonna con la linea sonvi due numeri che danno rispettivamente i limiti del rapporto F che si ottiene per effetto del caso nel 5% e nell'1% delle prove. Si conviene di stabilire significativa la differenza tra le due varianze e quindi la provenienza dei campioni da universi in tutto o in parte

distinti quando l' F sperimentale corrisponde circa al valore limite 5%, si ritiene ancora più fondata l'ipotesi quando l' F sperimentale supera quello tabulato corrispondente al limite 1%.

Applicando quanto è detto nel caso nostro si è ottenuto il seguente specchietto che corrisponde a quello testè riportato:

Causa della variazione	Somma dei quadrati degli scarti	Gradi di libertà	Varianza
Varianza nei gruppi	324,00	490	0,664
Varianza tra i gruppi	48,90	9	5,44
Varianza totale	379,00	499	0,760

La costante di SNEDECOR risulta 8,2. Entrando allora nella tavola di detto autore con i gradi di libertà corrispondenti a 490 e 9 (interpolando linearmente tra 8 e 12) osserviamo che i valori corrispondenti ai limiti di significato 5% e 1% sono di gran lunga inferiori a quello sperimentale, *onde possiamo concludere con buon margine di sicurezza che i 10 casi esaminati provengono da universi in parte distinti*. Diciamo in parte distinti perchè non tutti i diametri medii sono disuguali l'uno dall'altro e perchè non passiamo a priori escludere che una o più combinazioni a due a due dei casi sia formata da valori corrispondenti a un comune universo.

Si tratta ora di indagare sulle cause che intervengono nel determinismo di questa variabilità dei diametri medii, superiore a quella che si sarebbe dovuta attendere nel caso che i campioni studiati fossero provenuti da un comune universo.

Se non eliminata, pensando di aver resa almeno pressocchè costante la causa d'errore dovuta alla distribuzione non casuale degli elementi sullo striscio, ciò che permette nondimeno la comparabilità dei risultati ottenuti con la stessa tecnica, si può ancora pensare all'esistenza d'altre cause sperimentali di errore (spessore diverso dello striscio, diversa velocità nello strisciare il sangue, ecc.), sebbene si abbia avuto l'intenzione di mantenerle il più possibile costanti.

Devesi poi pensare al fatto che i dieci casi sono stati ricavati da soggetti di diversa età e ciò può costituire un'altra causa di variabilità dei diametri medii.

Come ultima ma più importante causa dobbiamo considerare la stessa variabilità biologica del diametro medio analoga a quella di altri caratteri biologici diversi nella loro misura da individuo a individuo. Per valutare l'effetto delle cause sperimentali d'errore, nei casi 6°, 7°, 8°, 9°, 10°, si sono misurati gli elementi su due vetrini, 25 in uno e 25 nell'altro, e per poter fornire risultati comparabili per tecnica con quelli degli altri cinque casi trattati come detto sopra in rapporto alla distribuzione non casuale delle cellule sullo striscio, si sono misurati gli elementi su strisce trasversali alternate anziché contigue come sopra.

I valori ricavati si riassumono nella seguente tabella:

Caso	I° vetrino	II° vetrino
6°	14,85	14,72
7°	14,79	14,79
8°	15,30	15,20
9°	15,25	15,30
10°	15,60	15,51

Si tratta allora di stabilire se le differenze tra le medie corrispondenti a ciascun vetrino siano da considerarsi significative o meno. Nel primo caso si concluderà per un effetto tangibile di dette cause sperimentali, nel secondo caso invece, si dovrà ritenere la loro influenza nulla o trascurabile.

La significatività delle differenze in questione è stata valutata con il test *t* di FISHER (o di STUDENT):

$$t = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}}$$

essendo x_1 e x_2 nel nostro caso le rispettive medie corrispondenti alle cellule misurate nel primo o nel secondo vetrino e $\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$ lo scarto quadratico medio del campione somma dei due.

Da apposite tabelle si ricava la probabilità P' che traendo a caso un valore di t esso sia minore di quello calcolato, onde la probabilità P che dall'universo si estragga un campione con valore uguale o maggiore di t sperimentale (in valore assoluto) equivarrà a $2(1 - P')$. L'ingresso alle tavole si fa con i seguenti gradi di libertà $v = n_1 + n_2 - 2$ essendo n_1 e n_2 i numeri di osservazioni rispettivamente corrispondenti alle medie \bar{x}_1 e \bar{x}_2 . Per $v > 30$ come nel caso nostro, valgono con buona approssimazione le tavole dell'integrale della probabilità. Solo quando la probabilità P risulti piccola (convenzionalmente inferiore al 5% e, a maggior ragione, all'1%) pensiamo che la differenza $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ sia sistematica.

Applicando quanto detto al caso nostro troviamo i seguenti valori delle medie, del test t e della rispettiva probabilità P (in %)

Caso	\bar{x}_1	\bar{x}_2	t	$P\%$
6°	14,85	14,72	0,64	52
7°	14,79	14,79	0,00	100
8°	15,30	15,20	0,46	65
9°	15,25	15,30	0,33	63
10°	15,60	14,51	0,28	61

Con tali valori di P non ci sentiamo di concludere per una influenza tangibile delle suddette cause sperimentali di errore.

In quanto all'influenza dell'età del soggetto sulla variabilità dei diametri medii si riportano i valori medii dei diametri con le corrispondenti età:

Anni	Diametri	Anni	Diametri
25	14,61	58	15,28
36	14,79	60	15,05
47	15,09	61	15,09
49	14,79	62	14,39
54	15,29	64	14,40

L'impressione che si riporta osservando la serie dei diametri è che essi tendono a crescere fino a un certo limite per poi diminuire. Un legame tra età del soggetto e diametro medio dei granulociti eosinofili sembrerebbe pertanto probabile sebbene dai dati riportati non ci sentiamo ancora in grado di precisarne la forma, nè confermarne la sistematicità. In conclusione, provata, con la tecnica seguita, l'influenza trascurabile o nulla delle cause sperimentali di errore sulla variabilità dei diametri da caso a caso restano in campo l'età del soggetto e tutto quell'insieme di cause che provocano la variabilità dei caratteri biologici e che, come è noto, si fanno consistere in fattori genotipici e fenotipici. A quale dei due ordini di cause (età e cause di variabilità biologica) spetti maggior importanza non possiamo ancora dire per i limiti delle nostre osservazioni.

Occupiamoci da ultimo della correlazione tra diametro e grado di segmentazione del nucleo, intendendo con questa locuzione il numero delle lobature nucleari corrispondenti a ciascun elemento, e permettendoci di considerare tale grandezza come se fosse una variabile continua.

Nella seguente tavola a doppia entrata sono riportate le frequenze delle varie combinazioni del numero delle lobature con le classi dei diametri ⁽¹⁾.

Alla tavola segue un grafico costituito da uno stereogramma ⁽²⁾ corrispondente al gruppo statistico formato dall'insieme dei dieci casi. Si riportano inoltre i valori medii dei diametri corrispondenti al grado di segmentazione nucleare.

⁽¹⁾ In ogni casella le frequenze corrispondenti ai singoli casi sono disposte secondo il seguente ordine:

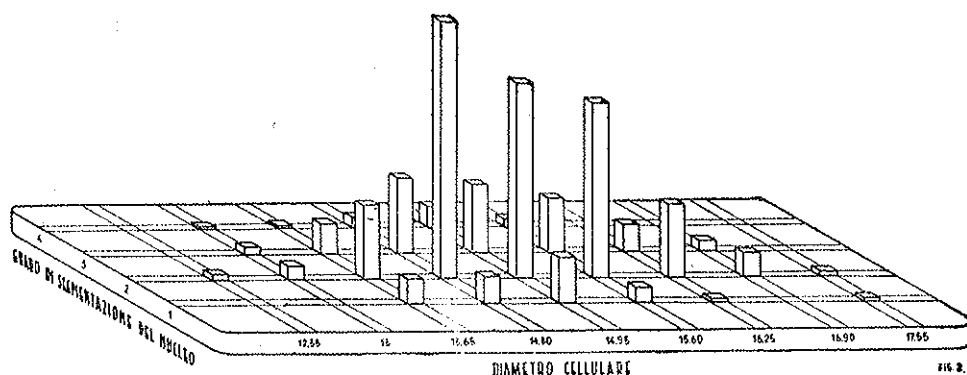
I	VI
II	VII
III	VIII
IV	IX
V	X

⁽²⁾ Nello stereogramma l'altezza delle colonnine è proporzionale alle frequenze delle varie combinazioni delle classi dei nuclei e dei diametri.

Gradi di segmentazione del nucleo										Medie dei diametri
4	0 0	0 0	0 0	0 0	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	14,72
	0 0	1 0	1 0	0 2	2 3	1 1	0 0	0 0	0 0	
	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	
	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	
	0 0	0 0	0 0	0 0	2 0	0 1	0 0	0 0	0 0	
3	0 0	2 0	2 1	2 1	1 5	1 4	0 0	1 0	0 0	14,91
	0 0	1 0	3 0	0 9	5 5	2 4	1 2	1 0	0 0	
	0 0	0 0	4 0	0 3	1 1	0 3	0 4	0 1	0 0	
	0 0	0 0	1 0	2 0	2 2	1 1	1 1	2 0	0 0	
	0 0	0 0	1 0	3 10	3 3	2 3	0 3	0 0	0 0	
2	0 0	1 0	4 0	11 14	15 9	3 6	1 3	1 0	0 0	14,90
	2 0	2 0	5 2	13 10	7 6	1 2	0 0	0 1	0 0	
	0 0	3 0	7 0	13 7	6 14	10 9	0 4	0 2	0 0	
	0 0	0 0	2 4	12 5	10 9	12 13	5 5	0 1	0 1	
	0 0	0 0	3 2	9 9	9 7	10 4	6 4	1 2	0 1	
1	0 0	0 0	1 6	3 2	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	14,59
	0 0	0 0	0 0	1 0	1 0	0 0	0 0	0 0	0 0	
	0 0	0 0	2 1	3 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	
	0 0	0 0	0 0	0 1	0 2	0 4	0 1	0 0	0 0	
	0 0	0 0	0 0	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0	
Diametro cellulare	12,35	13,00	13,65	14,30	14,95	15,60	16,25	16,90	17,55	

L'impressione d'insieme che si ricava dalle tavole e dallo stereogramma è che non esista correlazione tra le due variabili in istudio o, almeno, che sia molto modesta.

Anche se non dimostrabile in ogni caso per le oscillazioni corrispondenti alle classi estreme del grado di segmentazione, dovute all'esiguo numero degli elementi che le compongono, osservando le medie dei



diametri poste sul bordo della tavola di correlazione si potrebbe notare come il diametro medio cresca dalla prima alla seconda e diminuisca dalla terza alla quarta classe del grado di segmentazione. Applicando però il test *t* di FISCHER alle differenze 14,59 - 14,90 e 14,91 - 14,72, dai risultati ottenuti non ci sentiamo di considerare sistematiche le differenze in esame.

Pensando allora così e volendo ammettere anche per la serie eosinofila che il grado di segmentazione del nucleo sia funzione crescente dell'età del granulocito come sostengono HEIDENHAIN, PONDER e altri per la serie neutrofila, si conclude che non si può dimostrare una correlazione tra il diametro della cellula eosinofila e la sua età.

CONCLUSIONE

Si è svolta un'analisi citometrica sui granulociti eosinofili normali misurando il diametro di 500 elementi equiripartiti in 10 casi. I diametri dei granulociti eosinofili oscillano in condizioni fisiologiche da μ 12,35 a μ 17,55 (i dati corrispondono ai valori centrali delle classi

estreme). I valori delle diverse costanti biometriche sono riportati nelle tabelle (media aritmetica, moda, scarto quadratico medio, coefficiente di variabilità, indice di asimmetria e rispettivi errori medii). Le curve di distribuzione risultano generalmente asimmetriche con massimi spostati verso i valori più bassi.

Si è pure calcolata la funzione critica F di PEARSON che indicherebbe l'appartenenza delle curve studiate ai tipi 1°, 2°, 4° di PEARSON.

Vennero pure studiate le cause che intervengono a determinare le differenze da caso a caso. Non si è potuto inoltre rilevare l'esistenza di una correlazione tra diametro e grado di segmentazione nucleare, onde, supposta quest'ultima grandezza in funzione dell'età del granulocito, non vorrebbe dimostrata una correlazione tra quest'ultima variabile e la dimensione del leucocito eosinofilo.

BIBLIOGRAFIA

- BAILEY F. R., *Textbook of Histology*, ed. 7, New York, 1925, Wm. Wood and Co.
- BRAMBILLA F., *La rappresentazione matematica delle serie di frequenza*, ed. Biazzi, Milano, 1933.
- BUNTING C. H., *The granular leucocytes* in «Special Cytology», ed. E. V. Cowdry, New York, 1928, Paul B. Hoeber Inc.
- FISHER C. A., *Statistical Methods for Research Workers*, London 1934.
- GYLLENWARD C., *Some sources of error at count of white corpuscles in blood stained smears*, «Acta paediatr.», 1929, 8, Sup.
- HALLIBURTON W. D., *Handbook of Physiology*, Philadelphia 1914, P. Blakiston S. Son.
- LORDAN H. E., *A Textbook of Histology*, ed. 5, New York, 1930, D. Appleton E. Co.
- MAXIMOW Q. A., *Textbook of Histology*, Philadelphia, 1930, W. B. Saunders Co.
- PONDER E., *Studies on the Armeth count*, «Quart. Journ. Exper. Phys.», 1927.
- ROVERSI A. S., *Analisi citometrica dei globuli bianchi periferici*, «Min. Med.», 1, 41, 1933.
- SNEDECOR G. W., *Calculation and interpretation of analysis of variance and covariance*. «Collegiate Press», Ames Iowa, 1934.
- Dall'Istituto di Clinica Medica dell'Università di Pavia (Direttore Prof. INTROZZI).



SULLA GENERAZIONE DI VORTICI
IN FLUIDI PERFETTI « NON OMOGENEI » ⁽¹⁾
SOGGETTI A FORZE DI MASSA CONSERVATIVE ^(*)

(Con due figure)

LUIGI CASTOLDI

SUMMARY. — Perpendit Auctor quid in theorematibus hydrodynamicis a LAGRANGE, THOMSON, HELMHOLTZ repertis mutandum sit, si applicari debeant ad fluentia perfecta non homogenea, quae conservativarum virium sollicitationibus obnoxia sint. Conclusiones ad nonnulla facta, quae saepe evenire solent, applicantur.

1. — Il fenomeno della formazione di vortici in seno a fluidi approssimativamente perfetti e soggetti a forze di massa conserva-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 20 ottobre 1947.

(¹) Adottiamo qui la denominazione di *omogenei* per designare quei fluidi nei quali la densità è funzione unicamente della pressione; più particolarmente si parlerà di fluidi *omogenei incompressibili* o *compressibili* secondochè, rispettivamente, quella funzione si riduce ad una costante oppure no. In ogni altro caso, come più dettagliatamente è indicato nel numero 1 del testo, parleremo di fluidi *non omogenei*. Abbiamo preferito queste denominazioni a quelle corrispondenti adottate, per esempio, dal BJERKNES (P. APPEL, *Traité de mécanique rationnelle*, T. III, 3^a ed., pag. 562) di fluidi *barotropi* (superficie isobare coincidenti con quelle di ugual densità) e di fluidi *baroclini* (in ogni caso diverso), per il fatto che, in particolari circostanze, per esempio nel caso statico, un fluido da noi definito *non omogeneo*, e fisicamente tale nell'accezione comune della tavola, in quanto, per esempio, costituito da un insieme di liquidi non mescolabili e di diversa densità naturale, si stratifica in modo che i piani orizzontali sono ad un tempo superficie isobariche e di ugual densità; il che, secondo le denominazioni citate, porterebbe a classificarlo come *barotropo*. Conseguentemente di qui che la distinzione tra fluidi barotropi o baroclini non appare dotata di carattere intrinseco, ma legata alle particolari circostanze cinematiche in cui trovansi i fluidi in istudio.

tive⁽¹⁾, quale, per esempio, si manifesta nei moti connessi a convezione termica in liquidi o aeriformi non uniformemente riscaldati, trova spiegazione non soltanto nella natura sia pur poco viscosa di tali fluidi, ma anche, e forse prevalentemente, come verrà appresso chiarito, nella loro non perfetta omogeneità. Riservandoci di tornare alla fine su questo accenno di carattere applicativo, consideriamo per ora un fluido perfetto del tutto generale, a priori comprimibile e *non omogeneo*. L'ipotesi di non omogeneità va qui intesa nel senso che, mentre si suppone che la densità ρ della generica particella dipenda esclusivamente dalla pressione locale vigente nelle successive posizioni da essa occupate, si ammette anche che, a parità di pressione, la densità del fluido possa ancora esser diversa da particella a particella. Quanto alla causa di tale inomogeneità, essa può suppirsi attribuibile, o a non uniforme struttura materiale del fluido, o a disuguale temperatura delle sue particelle e alla conseguente diversa densità di esse. In quest'ultimo caso aggiungeremo peraltro l'ipotesi che la temperatura di ogni singola particella possa ritenersi costante durante il moto.

Volendo esprimere tuttociò analiticamente, indichiamo con a, b, c le coordinate, in un istante t_0 , della particella occupante all'istante t la posizione x, y, z . Se allora.

$$[1] \quad \begin{cases} x = x(a, b, c; t_0/t) \\ y = y(a, b, c; t_0/t) \\ z = z(a, b, c; t_0/t) \end{cases},$$

o, inversamente

$$[1'] \quad \begin{cases} a = a(x, y, z; t/t_0) \\ b = b(x, y, z; t/t_0) \\ c = c(x, y, z; t/t_0) \end{cases}$$

(¹) Attorno al significato del termine *forze conservative* torna qui opportuno richiamare che così si denominano correttamente tutte quelle forze che non danno luogo a migrazione o dissipazione di energia. Taluni Autori, meno propriamente, usano tale locuzione con significato più ristretto, per denotare le forze derivanti da un potenziale. Ma si noti, per esempio, che la forza trasversale (deviatrice) che agisce su un elettrone in moto in un campo magnetico non ammette potenziale, ma è conservativa, perchè non esegue lavoro. [Devo questa precisazione ad una cortese comunicazione dell'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi, al quale sono lieto di poter qui esprimere pubblicamente la mia gratitudine].

sono le equazioni in termini finiti delle traiettorie, la non omogeneità e la comprimibilità del fluido si esprimono scrivendo che ρ è funzione del posto e del tempo, sia attraverso la pressione locale p , sia attraverso le [1']:

$$[2] \quad \rho = \rho[a(x, y, z; t/t_0), b(\quad), c(\quad); p(x, y, z; t)] .$$

Premesso ciò, ci proponiamo qui di studiare a quali modificazioni vanno soggetti i noti fondamentali teoremi idrodinamici di LAGRANGE, di THOMSON, di HELMHOLTZ allorchè si lascia cadere, come si è accennato, la consueta ipotesi di omogeneità.

2. - A tale scopo, rifacciamoci all'equazione indefinita della dinamica di un fluido perfetto:

$$[3] \quad \rho \frac{D\hat{v}}{Dt} = \rho \hat{F} - \nabla \rho$$

essa, nell'ipotesi, cui d'ora in poi sempre ci atterremo, di forze di massa conservative, derivanti da un potenziale U , facendo uso della nota trasformazione

$$[4] \quad \frac{D\hat{v}}{Dt} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - [\hat{v} \cdot \text{curl} \hat{v}]_v$$

assume testo la forma:

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} - [\hat{v} \cdot \text{curl} \hat{v}]_v = - \nabla \left(U + \frac{v^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \nabla \rho .$$

Indicata ora con

$$[5] \quad \hat{\omega} = \frac{1}{2} \text{curl} \hat{v}$$

la vorticità della generica particella, la precedente si può scrivere

$$[6] \quad \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} - 2[\hat{v} \cdot \hat{\omega}]_v + \frac{p}{\rho^2} \nabla \rho = - \nabla \left(U + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) ,$$

da cui, prendendo il rotore di entrambi i membri,

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} = \text{curl} [\hat{v} \cdot \hat{\omega}]_v - \frac{1}{2} \text{curl} \left(\frac{p}{\rho^2} \nabla \rho \right).$$

Tenuto presente poi che è

$$\text{curl} [\hat{v} \cdot \hat{\omega}]_v = \hat{v} \text{div} \hat{\omega} - \hat{\omega} \text{div} \hat{v} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial P} \hat{\omega} - \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial P} \hat{v},$$

$$\text{curl} \left(\frac{p}{\rho^2} \nabla \rho \right) = \left[\nabla \frac{p}{\rho^2} \cdot \nabla \rho \right]_v = \frac{1}{\rho^2} [\nabla p \cdot \Delta \rho]_v,$$

$$\text{div} \hat{\omega} = 0,$$

segue ulteriormente

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial P} \hat{\omega} - \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial P} \hat{v} - \hat{\omega} \text{div} \hat{v} - \frac{1}{2\rho^2} [\nabla p \cdot \nabla \rho]_v$$

o, infine, introducendo la derivata sostanziale di $\hat{\omega}$

$$\frac{D \hat{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial P} \hat{v} :$$

$$[7] \quad \frac{D \hat{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial P} \hat{\omega} - \hat{\omega} \text{div} \hat{v} - \frac{1}{2\rho^2} [\nabla p \cdot \nabla \rho]_v.$$

Importa rilevare esplicitamente il significato del fattore $\nabla \rho$ che compare nell'ultimo termine della [7]. A tale scopo osserviamo che, essendo la densità ρ definita dalla [1], si ha:

$$[8] \quad \nabla \rho = (\nabla \rho)_p + \frac{\partial \rho}{\partial p} \nabla p,$$

dove si è espressamente indicato che ρ dipende dalle variabili spaziali sia esplicitamente ($p = \text{costante}$) - e in tal senso è formato $(\nabla \rho)_p$ -, sia attraverso p . Tenuto conto di ciò la [7] diventa:

$$[9] \quad \frac{D \hat{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial P} \hat{\omega} - \hat{\omega} \text{div} \hat{v} - \left[\frac{1}{2\rho^2} \nabla p \cdot (\nabla \rho)_p \right]_v.$$

Segue da [8] che se il fluido è omogeneo, cioè se ρ dipende da x, y, z, t esclusivamente attraverso p , è

$$(\nabla \rho)_p = 0$$

e la [9] si riduce a

$$[10] \quad \frac{D\hat{\omega}}{Dt} = \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial P} \cdot \hat{\omega} \right)_s - \hat{\omega} \operatorname{div} \hat{v}.$$

Da questa, e da quelle che se ne deducono derivando sostanzialmente rispetto a t , risulta che se in un certo istante è $\hat{\omega} = 0$ per una certa particella, per essa è sempre (prima e dopo l'istante) $\hat{\omega} = 0$. Tale è, sotto la forma « elementare » l'espressione del noto Teorema di LAGRANGE, valido, dunque, per fluidi omogenei, e del resto comprimibili o no.

Per un fluido non omogeneo, l'ultimo termine della [9] non si annulla generalmente; onde l'annullarsi di $\hat{\omega}$ in un certo istante e per una certa particella, non implica l'annullarsi di $\frac{D\hat{\omega}}{Dt}$ nè delle derivate successive. Cosicchè l'istante stesso è preceduto e seguito da intervalli di tempo in cui la vorticità della particella non si annulla. Il Teorema di LAGRANGE non sussiste dunque nel caso generale.

3. - Il risultato conseguito si precisa e si completa, considerando in seno al fluido una generica linea chiusa sostanziale C , concepita cioè come mobile in modo da riuscir sempre formata dalle medesime particelle che la compongono in un arbitrario istante assunto come iniziale. Indicando con I la circolazione della velocità lungo di essa:

$$[11] \quad I = \left(\int_C \hat{v} \cdot dP \right)_s$$

si ha anche, per il teorema di STOKES:

$$[12] \quad I = \iint_{\sigma} (\operatorname{curl} \hat{v} \cdot d^2 \hat{\omega})_s = 2 \iint_{\sigma} (\hat{\omega} \cdot d^2 \tau)_s,$$

dove σ è una qualunque superficie appartenente per intero al campo occupato dal fluido e avente per contorno C , ed \vec{n} la sua normale positiva rispetto a un verso prefissato su C .

Facendo poi uso di una nota espressione della derivata sostanziale di un integrale di superficie, si ottiene da [12]:

$$\begin{aligned}\frac{DI}{Dt} &= 2 \iint_{\sigma} \left(\left\{ \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} + \hat{v} \operatorname{div} \hat{\omega} + \operatorname{curl} [\hat{\omega} \cdot \hat{v}]_v \right\} \cdot d^2 \hat{\sigma} \right)_s = \\ &= 2 \iint_{\sigma} \left(\left\{ \frac{D \hat{\omega}}{Dt} + \hat{\omega} \operatorname{div} \hat{v} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial D} \hat{\omega} \right\} \cdot d^2 \hat{\sigma} \right)_s\end{aligned}$$

ossia, tenuto conto di [9],

$$[13] \quad \frac{DI}{Dt} = \iint_{\sigma} \left(\frac{1}{\rho^2} [(\nabla \rho)_p \cdot \nabla p]_v \cdot d^2 \hat{\sigma} \right)_s = \int_C \frac{1}{\rho^2} \left([(\nabla \rho)_p \cdot \nabla p]_v \cdot dP \right)_s,$$

relazione che mette in luce il significato cinematico dell'ultimo termine della [9], come quello cui è dovuta, indipendentemente dalla eventuale comprimibilità del fluido, la variazione nel tempo della circolazione di \vec{v} lungo una qualunque linea sostanziale chiusa.

Risulta da [13] che anche il noto Teorema di THOMSON, affermando l'invarianza temporale di tale circolazione, e valido per fluidi omogenei comprimibili o no, non sussiste, in generale, nell'ipotesi più ampia di inomogeneità.

Va osservato peraltro che, per particolari linee sostanziali chiuse tracciate nel fluido, può bensì riuscir nullo il secondo membro di [13], e che pertanto, per esse, continuerà eccezionalmente a valere la proposizione di THOMSON. Una classe notevole di linee per cui tale circostanza certamente si verifica è quella delle linee tracciate sulle superficie $(\rho)_p = \text{costante}$, intendendo per tali le superficie sostanziali definite come luoghi di particelle la cui densità, a parità di pressione, è costante.

Nel seguito chiameremo, per brevità, tali superficie e le linee sostanziali tracciate su esse, rispettivamente *superficie e linee di THOMSON*.

4. - Dalle ultime considerazioni possono trarsi alcune notevoli proprietà geometriche del moto di un fluido non omogeneo. Ma per far ciò occorre ancora accertarsi delle condizioni sotto cui sussiste il noto (primo) Teorema di HELMHOLTZ sulla sostanzialità delle linee di vortice.

A tale scopo consideriamo, in un istante generico t , due particelle P e $P_1 = P + \varepsilon \hat{\omega}$ infinitamente vicine e situate su una medesima linea di vortice. Indicando con \hat{v} e con \hat{v}_1 le attuali velocità di P e P_1 , è $\hat{v}_1 = \hat{v} + \varepsilon \frac{\partial \hat{v}}{\partial P} \hat{\omega}$. Ne segue che, in capo a un intervallo infinitesimo di tempo dt , le posizioni rispettivamente assunte dalle due particelle saranno:

$$P' = P + \hat{v} dt; \quad P'_1 = P + \varepsilon \hat{\omega} + \left(\hat{v} + \varepsilon \frac{\partial \hat{v}}{\partial P} \hat{\omega} \right) dt,$$

e la loro distanza, vettorialmente espressa:

$$P'_1 - P' = \varepsilon \left(\hat{\omega} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial P} \hat{\omega} \right) dt,$$

ossia, in virtù di [9]:

$$[14] \quad P'_1 - P' = \varepsilon \left\{ \hat{\omega} + \frac{D \hat{\omega}}{Dt} + \hat{\omega} \operatorname{div} \hat{v} + \frac{1}{2\rho^2} [\nabla p \cdot (\nabla \rho)_v]_v \right\} dt.$$

Risulta di qui che, a meno che il fluido non sia insieme omogeneo e incomprimibile, le particelle P e P_1 non si mantengono durante il moto sopra una medesima linea di vortice. A questo caso particolare (liquido omogeneo) rimane dunque limitata la validità del citato Teorema di HELMHOLTZ.

5. - Premesso ciò ricordiamo che, per un fluido omogeneo e incomprimibile, il carattere sostanziale delle linee di vortice, unitamente alla conservazione della circolazione secondo l'enunciato di THOMSON implica, con ovvia argomentazione la corrispondente sostanzialità dei tubi di vortici nonchè l'invarianza della loro intensità (secondo Teorema di HELMHOLTZ).

Per un moto fluido omogeneo e comprimibile, venendo meno il carattere sostanziale delle linee di vortice e pur sussistendo la propo-

sizione di THOMSON, il secondo Teorema di HELMHOLTZ risulta alquanto modificato. Sia infatti Σ_0 un tubo di vortici relativo all'istante t_0 e C_0 una qualunque linea sostanziale chiusa giacente su esso. Se Σ , in un successivo istante t , è la superficie tubolare proveniente da Σ_0 per deformazione sostanziale e C la attuale configurazione su essa della linea sostanziale proveniente da C_0 , l'invarianza della circolazione nel passaggio da C_0 a C , unitamente all'arbitrarietà di C_0 (in particolare: circolazione nulla per tutte le C_0 non abbraccianti Σ_0 e per le loro

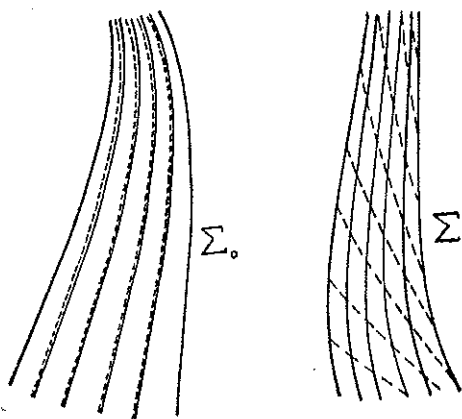


FIG. 1.

trasformate) permette di affermare che Σ è tutt'ora un tubo di vortici (con intensità inalterata). La comprimibilità supposta del fluido ha soltanto per effetto che le linee sostanziali l_0 che all'istante t_0 coincidevano su Σ_0 colle relative linee di vortice, all'istante t generalmente ne diversificano, pur potendo, sia le une che le altre, nel medesimo istante concepirsi come generatrici di Σ . Per chiarir ciò, nella figura 1, si sono disegnate, su Σ_0 e su Σ , con tratto continuo le linee sostanziali l_0 ed l , e punteggiate le linee di vortice.

Concludendo, nel caso presente, i tubi di vortici possono dunque definirsi come superficie sostanziali generate da vortici non sostanziali.

Nel caso più generale di un fluido non omogeneo e comprimibile viene anche a mancare, come tosto si riconosce, la sostanzialità delle superficie tubolari di vortici. Sia ancora infatti C_0 una linea sostanziale chiusa, direttrice, all'istante t_0 di un tubo di vortici Σ_0 e siano

rispettivamente L_0 ed l_0 la linea di vortice e la linea sostanziale, attualmente coincidente con essa, uscenti da un suo generico punto P_0 . In un'istante successivo t , la linea sostanziale C_0 avrà assunto una configurazione C e il punto P_0 una posizione P su di essa, mentre L_0 ed l_0 avranno dato luogo a due linee L ed l (la prima, attuale linea di vortice uscente da P ; la seconda, trasformata sostanziale di l_0) generalmente fra loro distinte.

Complessivamente, la linea C riuscirà, ad un tempo, direttrice di un tubo di vortici Σ (relativo all'istante t e alla direttrice C) e di un

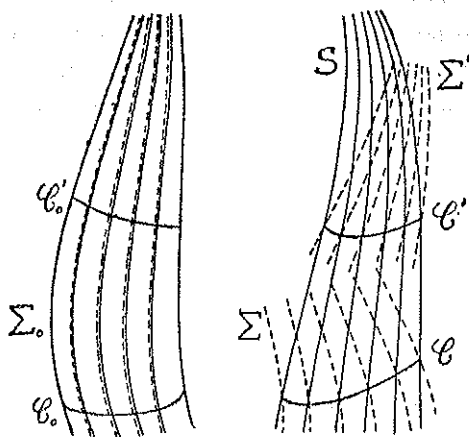


FIG. 2.

tubo di linee sostanziali S (trasformato sostanziale di Σ_0), i quali, venuta meno nel caso presente la proposizione di invarianza di THOMSON, si manifestano generalmente fra loro distinti. A chiarimento di ciò, nella figura 2 si sono disegnate su Σ_0 due direttrici C_0 e C'_0 , e, su S le rispettive trasformate sostanziali C e C' .

Va ancora notato che il flusso di vortici attraverso C è caratteristico all'intero tubo Σ (intensità di Σ) è generalmente diverso dall'analogo flusso attraverso C_0 e caratteristico di Σ_0 ; e che d'altra parte, il flusso in questione attraverso una linea generica giacente su S e abbracciante S una volta è generalmente diverso da linea a linea, non essendo S un tubo di vortici.

Un comportamento eccezionale presentano le linee di THOMSON introdotte nel numero 4. Se G_0 è una di esse relativa all'istante t_0 e G la sua trasformata sostanziale all'istante t , non solo il flusso di vortici attraverso G , e caratteristico di Σ , coincide con quello attraverso G_0 e caratteristico di Σ_0 , ma altresì è lo stesso per tutte le eventuali linee di THOMSON situate su S e provenienti da analoghe situate su Σ_0 . Risultato questo, che, nonostante qualche apparenza, non contraddice affatto quello ottenuto nel precedente capoverso.

6. UNA APPLICAZIONE. — Consideriamo un recipiente, per esempio cilindrico, superiormente aperto e ad asse verticale, contenente un liquido pesante che supporremo, almeno approssimativamente, perfetto e inizialmente omogeneo. Se indichiamo con Z la quota contata verso l'alto a partire dal fondo del recipiente, è possibile immaginare un dispositivo di riscaldamento dal basso, per effetto del quale, in capo a un tempo sufficientemente lungo, si stabilisca nel liquido una distribuzione di temperatura per cui, senza peraltro provocare — in virtù di opportune cautele — moto alcuno nel liquido, la densità risulti funzione crescente di Z . L'attuale stato di equilibrio, contrariamente a quello iniziale, ha però manifesto carattere di instabilità: una sia pur lieve perturbazione nella distribuzione della temperatura, per cui le superficie isoterme cessino di essere perfettamente orizzontali, rende impossibile l'ulteriore sussistere dell'equilibrio del liquido, provocandone un moto d'insieme che lo porterà, in un tempo che possiamo supporre abbastanza breve perchè il fenomeno possa considerarsi adiabatico, ad una nuova distribuzione di equilibrio con densità crescente in verso opposto alla quota ⁽¹⁾. All'istante t_0 in cui il liquido, per effetto della perturbazione accennata, abbandona il precedente stato di equilibrio instabile, le superficie isobariche hanno, necessariamente, diversa configurazione da quelle isoterme; onde, nell'istante considerato, sarà certo, in qualche parte del liquido, $[\nabla p \cdot (\nabla \rho)_p]_0$ diverso

(1) L'ipotesi di adiabaticità, unitamente a quella generica di incomprimibilità di un liquido, è necessaria se si vuole che siano verificate le condizioni enunciate nel numero 1.

da zero. Poichè inoltre in t_0 è dappertutto $\hat{\omega} = 0$, la [9] fornisce per $\frac{D\hat{\omega}}{Dt}$ un valore non nullo.

Il moto descritto, che porta il liquido nella nuova configurazione di equilibrio, avviene dunque con formazione di vortici.

Non diversamente sembra possa spiegarsi la formazione di vorticità nei moti persistenti di convezione termica che si stabiliscono, come si è accennato al principio, in liquidi e aeriformi (per esempio nell'aria atmosferica) mantenuti nelle loro parti a temperature diverse.

SULLA DIPENDENZA LINEARE DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI (*)

GIOVANNI MULÈ

SUMMARIVM. — Auctor determinat linearis dependentiae rationes, quod attinet ad functiones non analyticas plurium variabilium independentium in campis conexis, considerans extinctionem determinantium wronskiani generis, quae scilicet ex ipsis functionibus et ex quibusdam earum partialibus derivatis efformantur.

1. — In questa Nota ci proponiamo di assegnare un criterio di dipendenza lineare per un numero qualsiasi m di funzioni non analitiche di r variabili in un campo ⁽¹⁾ C . Nel caso particolare di tre funzioni di due variabili indipendenti si ritrova il criterio dimostrato per altra via da S. CORONATO ⁽²⁾ e di cui il nostro appare come la più naturale estensione.

2. — Date m funzioni di r variabili $u_i(x_1, x_2, \dots, x_r)$, $i = 1, 2, \dots, m$, continue con le loro derivate parziali fino all'ordine $m - 1$ incluso, in

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi, il 19 settembre 1947.

⁽¹⁾ Per campo intendesi, secondo la terminologia del Prof. PICONE, un insieme aperto connesso.

⁽²⁾ S. CORONATO, *Criteri wronskiani di dipendenza lineare per funzioni di più variabili indipendenti*. [Pont. Acad. Scientiarum, « Commentationes », anno V, 1941, vol. V, n. 4].

un campo C , se in C sono identicamente nulli i seguenti determinanti:

$$[1] \quad W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_1^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^{m-1} u_1}{\partial x_1^{m-1}} & \frac{\partial^{m-1} u_2}{\partial x_1^{m-1}} & \dots & \frac{\partial^{m-1} u_m}{\partial x_1^{m-1}} \\ \frac{\partial^{m-2} u_1}{\partial x_1^{m-2}} & \frac{\partial^{m-2} u_2}{\partial x_1^{m-2}} & \dots & \frac{\partial^{m-2} u_m}{\partial x_1^{m-2}} \end{vmatrix} = 0$$

$$[2] \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_1^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^{m-2} u_1}{\partial x_1^{m-2}} & \frac{\partial^{m-2} u_2}{\partial x_1^{m-2}} & \dots & \frac{\partial^{m-2} u_m}{\partial x_1^{m-2}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_k} & \frac{\partial u_2}{\partial x_k} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \end{vmatrix} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, r)$$

e se inoltre la matrice formata con le prime $m-1$ righe di W ha in C caratteristica costante massima ($= m-1$), allora le m funzioni date sono in C linearmente dipendenti.

Indichiamo con W_1, W_2, \dots, W_m i complementi algebrici degli elementi dell'ultima riga di W e poniamo

$$[3] \quad R = \sqrt{W_1^2 + W_2^2 + \dots + W_m^2}$$

$$[4] \quad \alpha_i = \frac{W_i}{R} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Per le ipotesi fatte si ha $R \neq 0$ in C e le α_i sono allora funzioni delle x_1, x_2, \dots, x_r continue assieme alle loro derivate parziali del primo ordine. Tali α_i soddisfano per le [1], [3], [4] alle seguenti equazioni:

$$[5] \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m = 0 \\ \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dots + \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 \frac{\partial^{m-2} u_1}{\partial x_1^{m-2}} + \alpha_2 \frac{\partial^{m-2} u_2}{\partial x_1^{m-2}} + \dots + \alpha_m \frac{\partial^{m-2} u_m}{\partial x_1^{m-2}} = 0 \end{array} \right.$$

$$[6] \quad \alpha_1 \frac{\partial^{m-1} u_1}{\partial x_1^{m-1}} + \alpha_2 \frac{\partial^{m-1} u_2}{\partial x_1^{m-1}} + \dots + \alpha_m \frac{\partial^{m-1} u_m}{\partial x_1^{m-1}} = 0$$

$$[7] \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_m^2 = 1.$$

Derivando entrambi i membri delle [5] e [7] rispetto alla x_1 , tenendo conto delle [5] stesse e della [6], si ha:

[illegible]

Le [8] costituiscono un sistema di m equazioni lineari omogenee nelle $\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \alpha_m}{\partial x_1}$ per cui il determinante D dei coefficienti è $\neq 0$. Si ha infatti sviluppandolo secondo gli elementi dell'ultima riga:

$$D = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \dots + \alpha_m W_m = \\ = R(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_m^2) = R \neq 0.$$

Dalle [9] e [14] segue che le α_i si riducono a delle costanti, che non potranno essere tutte nulle per la [7]. La prima delle [5] ci dice allora che le nostre funzioni sono in C linearmente dipendenti c. v. d.

3. - Dalla precedente dimostrazione si possono facilmente dedurre talune osservazioni fatte dal CORONATO nella Memoria citata. Dalla [4] si può intanto rilevare che se W_i è $\neq 0$ in un punto di C rimane $\neq 0$ in tutto C . Da ciò risulta che la condizione per la matrice formata con le prime $m - 1$ righe di W di possedere caratteristica costante massima è del tutto equivalente a quella di supporre $\neq 0$ in C uno dei complementi algebrici dell'ultima riga di W .

Dalla [4] si vede anche immediatamente che se $p (\leq m - 1)$ dei W_i sono identicamente nulli in C , oltre la dipendenza lineare delle m funzioni u_i si può altresì affermare la dipendenza lineare di $m - p$ di esse.

4. - È superfluo osservare che nell'enunciato del teorema il ruolo della variabile x_i può essere assunto da una qualsiasi delle altre x_i .

5. UN'APPLICAZIONE. - Consideriamo un vettore \mathbf{v} funzione del posto, di componenti $v_x(x, y, z)$, $v_y(x, y, z)$, $v_z(x, y, z)$ rispetto ad una terna di assi cartesiani ortogonali, vettore che potrebbe ad esempio rappresentare la velocità locale in un moto stazionario di un mezzo continuo. Il teorema precedente fornisce allora delle condizioni sufficienti affinché il vettore \mathbf{v} si mantenga costantemente parallelo ad una giacitura fissa, ovvero, nella interpretazione che abbiamo dato di \mathbf{v} , affinché le linee di corrente siano contenute in piani fra loro paralleli.

Le condizioni del teorema tradotte in forma vettoriale sono le seguenti:

$$[15] \quad \mathbf{v} \wedge \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \neq 0$$

$$[16] \quad \mathbf{v} \wedge \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \times \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} = 0$$

$$[17] \quad \mathbf{v} \wedge \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = 0$$

$$[18] \quad \mathbf{v} \wedge \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0.$$

È facile allora constatare direttamente che, se sono soddisfatte le [15], [16], [17], [18], il vettore \mathbf{v} rimane costantemente perpendicolare a una retta fissa.

Indicando con \mathbf{u} il versore di $\mathbf{v} \wedge \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}$, si ha ovviamente:

$$[19] \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$$

$$[20] \quad \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0$$

$$[21] \quad \mathbf{u} \times \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} = 0$$

$$[22] \quad \mathbf{u} \times \mathbf{u} = 1 ,$$

da cui mediante derivazione rispetto a x si ottiene:

$$[23] \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \mathbf{v} = 0$$

$$[24] \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0$$

$$[25] \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \mathbf{u} = 0 .$$

Dalle [23], [24] segue $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \lambda \mathbf{u}$, essendo λ uno scalare, e quindi per la [25]

$$\lambda \mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0 \quad \text{ossia} \quad \lambda = 0 .$$

Pertanto si ha:

$$[26] \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 .$$

Dalla [19] derivando rispetto alla y e tenendo conto della [17] si ottiene:

$$[27] \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \times \mathbf{v} = 0 ,$$

da cui derivando rispetto alla x e ricordando la [26] segue:

$$[28] \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0 .$$

Inoltre dalla [22] abbiamo:

$$[29] \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \times \mathbf{u} = 0 .$$

Dalle [27], [28], [29] risulta

$$[30] \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0 .$$

In modo analogo si dimostra la

$$[31] \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0 .$$

Dalle [26], [30], [31] si deduce che \mathbf{u} è un vettore costante e quindi il nostro asserto discende dalla [19].

SCORPIONI DELL'ERITREA DEL MUSEO ZOOLOGICO DI FIRENZE (*)

(Con una figura)

LODOVICO DI CAPORJACCO

SVMMARIVM. — Agitur de Scorpionibus qui Erythream incolunt; describitur nova subspecies *Parabuthi*; de affinitatibus *Buthorum* (*Hottentottarum*) dissertatur.

Il numero di specie di Scorpioni dell'Eritrea (comprendendovi la Dancalia ed il Tigre) appare minore di quello delle specie abitanti la Somalia e l'Etiopia centrale. Infatti il diligente catalogo della MORIGGI (*Gli scorpioni dell'Africa Orientale Italiana*, « Riv. di Biologia Colon. », vol. IV, 1-2, 1941) segnala, di questa regione, solo 22 unità specifiche e subspecifiche, una delle quali dubbia.

Di queste 22 unità, 7 sole sono rappresentate nelle collezioni del Museo di Firenze, ma, oltre ad esse, vi sono tre specie di *Parabuthus*, fin qui non note della regione, ciò che porta a 25 il numero delle specie dell'Eritrea.

Una delle specie non ancora segnalate è *Parabuthus hunteri* Poc. 1895 (« J. Linn. Soc. », vol. 25, pag. 309), fin qui nota di Suakim, sulla costa Sudanese. È rappresentato da un ♂ ed una ♀ di Karota, raccolti dal prof. CIPRIANI nella stagione delle piogge; i due esemplari sono ben caratterizzati dai due ultimi segmenti e dalla vescica picei, che contrastano col colore giallo chiaro del resto del corpo; dal primo segmento caudale assai più lungo che largo e dal dito della chela

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi il 2 dicembre 1947.

del ♂ munito di un lobo, con che questa specie si differenzia bene da *P. liosoma dimitrivi* che le è simile per colore.

Un'altra specie non ancora segnalata è *Parabuthus heterurus stefaninii* di Cap. 1937 (« Mon. Zool. Ital. », vol. XXXVIII, n. 2-3, pag. 58). Trattasi di due ♀ assolutamente tipiche: la differenza di colore tra il IV segmento della coda e il resto non potrebbe essere più netto. Le due ♀ furono raccolte all'Asmara: è cosa notevole ritrovare qui questa specie somala.

L'altra forma è rappresentata da un ♂ ed una ♀ di Pint Elghena, nel Bassopiano Habab, raccolti nel novembre e dicembre 1902. Si tratta di forma certo simile a *P. granimanus* Poc. 1895 (« J. Linn. Soc. », vol. 25, pag. 311), ma che mi pare sieno da separare subspecificamente da esso per il diverso colorito e per la forma della vescica. Li chiamo *P. granimanus fuscicauda* sp. n. e ne dò qui appresso la descrizione.

Parabuthus granimanus fuscicauda sp. n.

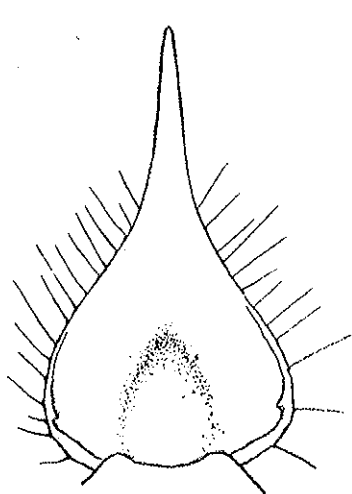
♂ Corporis totius long. mm. 87; cephalothoracis mm. 10, cephaloth. latit. mm. 11; caudae segm. I long. mm. 12, latit. mm. 6,5, altit. mm. 5; II mm. 8,5, mm. 6,5, mm. 6; III mm. 7,7, mm. 6 et mm. 6; IV mm. 8,5, mm. 6 et mm. 5,75; V mm. 10, mm. 5,2 et mm. 4,8; vescicae mm. 9,5, mm. 4, 3 et mm. 4; palpi femoris long. mm. 8, latit. mm. 2,7; tibiae mm. 9 et mm. 3,5; manus sine digitis mm. 7 et mm. 4,6; digitorum long. 7,75; pedum I paris mm. 20; II mm. 28; III mm. 34; IV mm. 41.

♀ Corporis totius long. mm. 94; cephaloth. mm. 10,2; eius latit. mm. 11,75; caudae I segm. longit. mm. 7,5, latit. mm. 6, altit. mm. 6,2; II mm. 7,5, mm. 6,5, mm. 5,2; III mm. 7,5, mm. 6,5 et mm. 5,2; IV mm. 9,5, mm. 5,75 et mm. 5,2; V mm. 10,75, mm. 5,3 et mm. 4,75; vescicae mm. 10,5, mm. 4 et mm. 4,8; palpi femoris longit. mm. 5,5, latit. mm. 2,5; tibiae mm. 7,5 et 3,25; manus sine digitis mm. 5,5 et mm. 3; digitorum long. mm. 8,5; pedum I paris mm. 20; II mm. 28; III mm. 37,5; IV mm. 52.

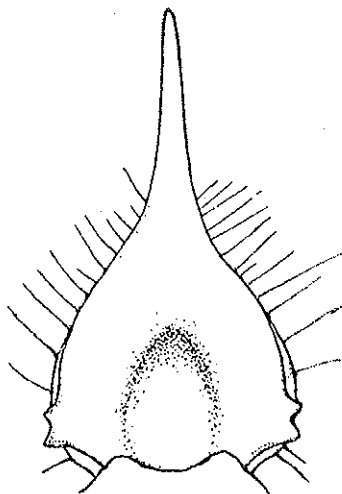
Corpus omnino piceooleagineum, segm. I-III caudalibus eodem colore ac truncus, IV, V et vesica obscurioribus.

Cephalothorax crebre granulatus; segmenta abdominalia granulosa, praesertim eorum parte posteriore; sternites laeves; postremus 4 carinis, internis laevibus, externis denticulis paucis.

Caudae segmenta I-IV decem carinis; carinae denticulis inter se aequis, obtusis constant; carinae inferiores segm. I et partis basalis segm. II fere laeves. I° segmento superficies inter carinas superiores et carinas laterales superiores granulosa; II segm. 2-3 granulis conspersis. Segm. I superficie superiore crebra granulosa; area granulosa est triplo longior quam latior, antica acuta, dein abrupto dilatata,



*Granimanus
fuscicauda*



*Granimanus
granimanus*

dein sensim angustata; a granulis paullo maioribus limitatur, qui figuram forma ferri hastae designant. Superficie superior segm. II area crebre granulosa quadruplo longiore quam latiore. Coeterum superficies segmentorum laeves, quoque in segm. IV. Segmentum V desuper utrinque carina granulosa, quae versus medium in duas series contiguas granulorum irregularium resolvitur; subtus carina media et utrinque carina laterali denticulorum; denticuli carinae mediae aequales, carinarum lateralium a basi usque ad tertium vel quartum denticulum apicalem sensim maiores fiunt; denticuli ultimi minores. Inter carinam mediam et carinas laterales superficies inferior segmenti V est granulosa; granuli parte basali utrinque seriati; apicali conspersi. Vesica

subtus granulosa; adsunt 4 series longitudinales granulorum tuberculiformium coeteris maiorum; vesica quoque crebre fulvopilosa; coetera segmenta parce pilosa; desuper basi vesicae adest utrinque tuberculum obtusum, quod, desuper visum, profilum rotundatum laterum vesicae non superat.

Palpi femur subtus 2 carinis, desuper 1, antice 1, denticulatis (denticuli carinae inferioris posterioris coeteris maiores); superficies inferior granulis conspersis magnis; coeterae superficies granulis minimis crebris. Tibia subtus crasse granulosa, granulis dentiformibus, carinam non designantibus; coeterum minute granulosa. Manus non carinata, creberrime et minutissime granulosa; digiti punctati, ♂ lobo perspicuo, digito immobili 12, mobili 14 seriebus transversis denticulorum. Dentes pectinum ♂ 41-42, ♀ 37-37.

A *P. granimano granimano* Poc. differt colore, tuberculis basilibus vesicae, qui in *P. granimano granimano* profilum vesicae evidenter superant, et superficie inferiore IV segmenti caudalis quae est laevis in *P. granimano fuscicauda* et plerumque granosa in *P. granimano granimano*.

Dò qui la figura, vista superiormente della vescica nelle due sottospecie: quella della sottospecie tipica è tratta da esemplari del Museo, che devo ritenere tipici, poichè provengono da Aden. Sono stati disseccati, e perciò del colore nulla si vede; quanto al IV segmento caudale, esso è inferiormente assai granuloso in tre esemplari, poco granuloso in due e liscio in un solo. Anche *P. granimanus granimanus* è stato trovato in Dancalia e nell'Eritrea costiera; nel Museo di Firenze oltre ai 16 esemplari di Aden che ho presi come termini di confronto perchè della località tipica ed uno di provenienza ignota, ve ne sono due di Massaua, che concordano in tutto con quelli di Aden; quanto al colore, i primi segmenti caudali contrastano abbastanza nettamente, essendo fulvi, col resto che è bruno.

Degli altri due *Parabuthus* segnalati dall'Eritrea (*P. liosoma abyssinicus* Poc. e *P. liosoma dimitrivi* Bir.) solo il primo è rappresentato nella collezione del Museo da una ♀ di Decanamo nell'Assaorta, assolutamente tipica.

Delle forme del gen. *Buthus* note dell'Eritrea (*B. occitanus berberensis* Poc., *B. occitanus zeylensis* Poc., *B. (Hottentotta) scaber* (H. E.),

B. (Hottentotta) acutecarinatus abyssinicus Bir., *B. (Hottentotta) acutecarinatus maindroni*, *B. (Hottentotta) polystictus* Poc., *B. (Hottentotta) trilineatus* (Ptrs.), *B. (Hottentotta) minax* L. K. e *B. (Hottentotta) tigrinus* di Cap., solo la seconda e le due ultime sono rappresentate nelle collezioni del Museo.

Buthus occitanus zeylensis Poc. è rappresentato da due es. di Assab, ben caratterizzati, tra altro, dal loro colorito uniformemente giallo.

Buthus (Hottentotta) tigrinus di Cap. è rappresentato da sei ♂ ♀ e pulli di Enda Abba Malù, nei dintorni di Agri Ugri, 8 VI 1901. Non vi è nulla da aggiungere alla descrizione da me a suo tempo (« Atti Soc. It. Nat. », LXXXVI, 1937) data di questa forma, che è una forma di montagna (colorito scuro!) del ciclo di *B. (Hottentotta) minax* L. K., intermedia, quanto a granulazioni, tra questa forma e *B. (Hottentotta) emini* Poc., e più prossima, per le proporzioni del primo segmento caudale, a *B. (Hottentotta) trilineatus* Ptrs.

Buthus (Hottentotta) minax L. K. è rappresentato da una ♀ dei monti Dongollo (20-30, XII, 1900); da 2 ♂ e 4 ♀ di Adi Cajeh (aprile-giugno 1902); da un ♂ dei dintorni di Aid Cajeh (giugno, 1902); da 4 ♀ di Ghinda (29, XII, 1900); da un ♂, 1 ♀ e 1 pull. di Chenafenà (Seraè), maggio 1901; da 2 ♀ di Adi Ugri (1900), da 8 ♀ e pulli di Aaur presso Saganeiti, IV, 1902 e finalmente da 2 ♂, 7 ♀ e 3 pulli di Saganeiti (IV, 1901).

Tutti questi esemplari hanno la tipica colorazione della specie: giallo col tronco marmorato di nerastro, e le carene inferiori della coda nere; talora anche la carena accessoria del IV segmento è nera, almeno nella parte posteriore. Le carene superiori nelle ♀ sono nettamente denticellate; quelle inferiori del V segmento a granuli rotondi separati tanto nelle ♀ che nei ♂; nei ♂ invece le carene superiori mostrano la tendenza alla fusione tra i vari denticoli, senza però mai diventare del tutto lisce. Le carene accessorie sono complete nel I e II segmento; nelle ♀ sono per lo più leggermente denticolate, nei ♂ granulose. Il III segmento ha le carene accessorie complete, granulose, nelle ♀; nei ♂ esse sono formate da granuli minori di quelli delle altre carene ed arrivano circa ai $\frac{2}{3}$ dell'articolo; in due ♂ di Saganeiti arrivano solo alla metà. Nel IV segmento le carene accessorie nelle ♀ sono pure continue ma formate da granuli assai piccoli, specie nella metà basale

dell'articolo; nei ♂ ♂ esse sono formate solo da 5-6 granelli, che mancano completamente nei due ♂ di Saganeiti. Le carene superiori della coda sono granulose, evidenti nella metà basale dell'articolo; in quella distale si dissolvono in una serie irregolare di granelli; nei due ♂ di Saganeiti esse mancano completamente.

È noto come gli A.A. dissentano sulla validità delle varie forme del gruppo *Hottentotta*: io, avendo potuto esaminare altra volta esemplari di altre parti di Etiopia di *B. emini* Poc. e di *B. trilineatus* Ptrs. mi associo, quanto al primo, all'opinione di HIRST (« A. M. N. H. », 8, VII, pag. 217, 1911) e di BORELLI (« Ann. Civ. Mus. St. Nat. Genova », 3, VIII, 1920, pag. 362), i quali lo ritengono distinto da *B. minax* L. K. per le carene accessorie del V segmento caudale continue anche nei ♂ ♂ e per le carene superiori e laterali pure ben dentellate nei ♂; quanto al secondo, esso mi pare pure distinto, oltrecchè pel colore, anche per le proporzioni del I segmento caudale, più largo che lungo, mentre è al massimo largo quanto lungo in *B. minax*.

BIRULA (« Sitzungsber. d. k. Ak. d. Wissensch. »), CXVII, Bd. II, Heft, 1908, pag. 141-145) fa notare come i *B. minax* del Nilo si distinguano da quelli tipici dell'Eritrea per una diminuzione delle carene, nel ♂; è notevole che, negli esemplari di Saganeiti, i ♂ mostrano caratteri eguali a quelli nilotici. È probabile che noi abbiamo, in Africa Orientale, almeno tre sottospecie vicarianti: una dell'Eritrea montana (il *B. minax* tipico), una dei bassopiani sia orientali che occidentali (*B. minax* del Nilo e di Saganeiti) e una delle montagne più umide (*B. tigrinus*); è probabile che la forma dei bassopiani meriti di essere distinta, ma occorrerebbe, per decidere questa questione, poter fare la monografia dei *Buthus* (*Hottentotta*) dell'Africa Orientale e della valle del Nilo.

L'unica specie di *Prionurus* nota di Eritrea, *Prionurus bicolor* (H. E.) non è rappresentata al Museo di Firenze, nè vi sono le specie, pure Eritree, *Neobuthus berberensis* Hirst, *Microbuthus littoralis* (Pav.), *Babycurus zambonellii* Bor. ed *Isometrus maculatus* Deg.

Dei Scorpionidae Eritrei (*Hemiscorpion tellinii* Bor., *Opisthacanthus fischeri* Krpl., *Pandinus imperator subtypicus* (Krpl.), *Pandinus bellicosus* (L. K.) e *Pandinus magretti* Bor.) solo i due ultimi si trovano nelle collezioni del Museo; il primo è rappresentato da una ♀ senza

indicazione precisa di località; l'altro invece, che dev'essere abbondante in Eritrea, è rappresentato da 2 i uvv. di Seatit (15, VIII, 1907) (leg. Giglioli); 1 ♂ di Mai Mefales (Dembela) 1901, leg. Cap. Tassinari; 6 ♂ ♀ di Adi Ugri (6-30, VI, 1901) e molti ♂ ♀ di Barentù (stag. delle piogge, leg. Cipriani). Gli esemplari più giovani e più piccoli tirano al rossiccio, i maggiori al piceo; per il resto la specie appare notevolmente uniforme.

OSSERVAZIONI SU LA RIPRODUZIONE
IN CATTIVITÀ DI ALCUNE SPECIE
DI OFIDII ITALIANI (*)

(Con una tavola)

GUGLIELMO MANGILI

SUMMARIVM. — Observata nonnulla refert Auctor de genitali decursu (a fecundatione ad ovorum depositionem) quarundam specierum ophidiorum, qui in Italia vivunt. Qua de re demonstrat, certae si exstent condiciones, horum animalium generationem in captivitate saepe fieri solere, idemque nonnulla declarat quae ad sexus determinationem et ad tempus deponendi ova attinent.

Nel periodo di tempo fra il 1942 ed oggi, ho avuto occasione di osservare, su un complesso assai cospicuo di materiale vivente, svariati fatti inerenti a la riproduzione in schiavitù de i rettili, e particolarmente de gli ofidii, a i quali si riferisce la presente nota. Poichè ancor oggi la riproduzione de gli ofidii è ben poco conosciuta ne i suoi vari dettagli, e da molti ancora messa fortemente in dubbio la sua possibilità ne le condizioni di cattività, se non in qualche raro esemplare più particolarmente adattabile, e poichè ho fortunatamente avuto modo di seguire in alcuni casi l'intero ciclo, da l'accoppiamento a la deposizione de le uova ed ancora fino a la schiusa di queste, in altri casi — e sono naturalmente la maggioranza — di potere ricostruire, integrando i dati rilevati su diversi esemplari, il ciclo medesimo in maniera da averne egualmente il quadro completo o quasi completo, ritengo utile di riassumere brevemente alcune de le mie osservazioni.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Lepri il 12 luglio 1947.

Le osservazioni de i precedenti autori che - in sempre scarso numero - si occuparono de la questione, sono purtroppo frammentarie, nel senso che esse riguardano una sola parte del ciclo, in genere a partire da la deposizione, e se pure in qualche caso sia possibile indurre - come in quelli descritti da BRONZINI⁽¹⁾ - l'accoppiamento essere avvenuto in cattività, pure non è possibile affermarlo categoricamente; il PERACCA⁽²⁾ poi nel suo lavoro parla esplicitamente di femmine ricevute già fecondate, e del resto l'epoca in cui le ricevette (primi di luglio) pone fuor di dubbio il fatto. Relativamente a la modalità de l'accoppiamento vi è una relazione del GENÈ, che io non ho potuto consultare, ma che da le citazioni pare sia in merito ad accoppiamenti osservati in libertà, e si limiti ad una descrizione del caratteristico groviglio di numerosi individui de i due sessi.

Nulla di preciso è poi riferito ne le poche citazioni relative a l'argomento, reperibili in trattati generali o in monografie specializzate. Così la citazione in BREHM⁽³⁾ riguardante la riproduzione di *Python molurus* nel Jardin des Plantes, di cui diedero notizia VALENCIENNES e DUMÉRIL, quella in FLOERICKE⁽⁴⁾ relativa a l'ibridazione fra *Tropidonotus tessellatus* e *Tropidonotus viperinus* osservata da KLINGE, ed altre, non riferiscono se gli accoppiamenti sieno avvenuti prima de la cattura o dopo di questa, nè danno, a maggior ragione, alcuna notizia relativamente a le modalità de l'accoppiamento stesso. Impossibile mi è stato consultare in merito le riviste tedesche specialistiche del ramo erpetologico, attualmente introvabili.

Le mie osservazioni si sono svolte su esemplari appartenenti a più specie (*Tropidonotus natrix*, *Tropidonotus tessellatus*, *Zamenis gemonensis*, *Coluber longissimus*, *Coluber leopardinus*, *Elaphis quateradiatus*, *Coronella austriaca*, *Vipera aspis*, *Vipera Ursinii*) e di svariata provenienza (Lazio, Abruzzi, Dalmazia, Emilia, Alta Lombardia). In una prima fase, le osservazioni furono portate su esemplari catturati sicu-

(1) BRONZINI ERMANNO, *Note sulla riproduzione in cattività del Cervone (Elaphis quateradiatus) Latr.* « Atti Pontif. Acad. », vol. VIII, n. 5, pag. 29-38.

(2) PERACCA MARIO G., *Osservazioni intorno alla deposizione ed incubazione artificiale delle ova dell'Elaphis quateradiatus (Latr.)*. « Boll. Mus. Zoolog. ed Anat. Comp. R. Università di Torino », vol. I, n. 1, 19 novembre 1886.

(3) BREHM A. E., *La vita degli animali*. Trad Raffaele. « U. T. E. T. », 1932, vol. II, pag. 661.

(4) FLOERICKE K., *Der Terrarien-Freund*. « Franckh'sche Verlagshandlung. », Stuttgart 1927, pag. 98.

ramente dopo l'accoppiamento, e solo in un secondo tempo ho potuto ottenere numerosi gruppi omogenei i quali erano formati da soggetti catturati precocemente ed in località altimetricamente e quindi anche per condizioni climatiche e fattori stagionali tali da poter sicuramente affermare che la fecondazione non era per anco avvenuta; i quali gruppi, portati nel più mite clima romano, diedero in breve un'alta percentuale di accoppiamenti controllati.

Le condizioni in cui gli animali vennero tenuti erano il più possibile prossime a quelle naturali; nè l'agglomeramento de i soggetti, nel particolare momento, era da ritenere fatto incongruo, date le abitudini di convivenza, nel periodo de gli amori, proprie de gli ofidii; anzi forse ciò ha favorito, come fattore di eccitamento genesico, il verificarsi del fenomeno; del quale non ho effettivamente notato il manifestarsi se non quando ho posto in un solo terrario gruppi numerosi di 40 a 50 individui. *Elaphis quateradiatus* fa eccezione, e si riproduce anche quando gli esemplari vivano in coppie⁽¹⁾. Per quello che riguarda le condizioni ambientali in senso stretto, esse, pur tanto influenti in altri casi, non sono capaci, anche quando vi si verificchino de le deficienze, di inibire l'ardore genesico de i soggetti.

Sebbene, quando tenuti in gran numero nel medesimo terrario, i serpenti amino trascorrere il tempo gli uni vicini a gli altri, accumulandosi in qualche angolo, tuttavia questo atteggiamento differisce abbastanza profondamente, almeno nel significato, da quello assunto nel periodo de gli amori: mentre difatti nel primo caso esso altro non è da ritenere se non la ricerca di un nascondiglio (e vi è in fatto una continua gara per infiltrarsi al di sotto del cumulo), ed i corpi de i vari individui non sono che modicamente intrecciati fra loro, ne l'epoca de gli amori invece il gomitolo è assai più intricato, e da questo si sollevano erette per alcuni centimetri le eleganti testoline de gli animali, dando questi assembramenti serpentini veramente l'idea, visti da qualche distanza, di favolosi esseri policefali. È evidentissimo un eccitamento generale: gli occhi brillano vivacissimamente, ed il vibrar de la lingua, rapidissimo ed ininterrotto, denota uno stato di particolare interesse per il mondo esteriore. Quantunque recentemente catturati, i soggetti in questo periodo non si mostrano affatto timorosi, tanto che ci si può avvicinare al terrario - in prossimità de la cui parete

(¹) Vedi nota 1, pag. 220.

anteriore essi si trattengano al sole - senza che si turbino e si rifugino, come in altri casi son soliti fare, nel punto più protetto e più bujo.

In alcune ore l'eccitazione si fa più manifesta, ed allora, tutto intorno al gruppo principale, si agitano gruppi minori di due - tre o pochi più individui: ove gli animali appartengano al genere *Tropidonotus* si tratterà per lo più di uno a quattro - cinque maschi intenti a corteggiare una singola femmina. Dispersisi poi, od in traccia di altre femmine o per altri inapprezzabili motivi, gli altri corteggiatori, un d'essi rimane a far segno de la propria assiduità l'indifferente femmina; questa anzi, ancor più che indifferenza, mostra il più spesso insofferenza de le attenzioni maschili, cui tenta sottrarsi, non saprei se per reale frigidità o perchè questo fenomeno rientri ne i ludi amorosi. In tal caso il maschio la insegue per tutto il terrario, nè si lascia distrarre, di regola, nel passare vicino ad altre femmine o ad altri gruppi in fase di corteggiamento; sembra dunque, e certamente è così, che il maschio riconosca perfettamente la femmina prescelta: del resto non solo non la perde mai di vista, ma non perde addirittura - salvo casi eccezionali - il contatto con lei. Il corteggiamento consiste in una serie di moti carezzevoli effettuati con tutto il tronco, ma particolarmente con il capo e con il segmento post-cefalico del tronco, da parte del maschio; talvolta precede una fase di leggeri urti con il muso a i fianchi o al dorso, mentre ne la fase terminale del corteggiamento le appendici caudali, intrecciate due o tre volte si convolgono in lente spire. Ancora in questa fase la femmina tenta non di rado di sfuggire a l'insistenza del maschio.

In *Coluber longissimus*, e con ogni probabilità ne l'affine *Coluber leopardinus*, il comportamento de le femmine è ben diverso, ed esse sono partecipi ed attive attrici de i ludi amorosi; esse stanno per lo più isolate, nascoste qua e là fra le pietre o sotto i tronchi, mentre i maschi, molto eccitati, annodano e snodano le spire, aggirandosi in gruppi attorti e mobilissimi per il terrario, eccitandosi a vicenda. Solo qualche rara volta ho visto qualche femmina partecipare a questa sarabanda amorosa, ed in tal caso essa era segno di attenzioni e di carezze da parte de i maschi; nel più frequente caso, invece, in cui la femmina stia nascosta o isolata, ogni qual volta uno de i maschi più grandi e più belli passi in sua vicinanza, essa guizza sul posto e, senza fuggire nè avanzare, saetta la coda in alto e con quella frusta,

ed attorce talora fuggevolmente il tronco del maschio; che, se le prime volte in genere quasi non bada al fatto, in seguito abbandona il groviglio del quale faceva parte, e si sofferma per colpire reiteratamente col muso il tratto precloacale del tronco de la femmina, dopo di che il corteggiamento si svolge, se ho ben visto, in modo analogo a quanto descritto per *Tropidonotus natrix* e *tessellatus*, ma forse più rapidamente. L'unica differenza, è nel comportamento de la femmina, la cui coda si attorce subito con quella del maschio, mentre ne le *Tropidonotus* questo avviene solo al termine del corteggiamento.

Dopo tanto eccitato preludio, l'accoppiamento vero e proprio avviene, e si prolunga per un periodo più o meno lungo, in una relativa calma, in tutte le specie osservate.

Le ore di massima frequenza di accoppiamenti coincidono per lo più con quelle di maggiore attività normale proprie a la specie, e sono quindi quelle diurne ed assolate per *Tropidonotus* (*natrix* e *tessellatus*) e per *Zamenis*, serali per *Coluber longissimus* etc.; naturalmente, in gruppi molto numerosi accoppiamenti isolati si possono notare in qualunque ora del giorno e de la sera. Non ho notato particolari influenze climatiche sul ritmo de l'eccitamento genesico.

Un fattore stagionale, invece e climatico influisce evidentemente su la data di deposizione de le uova; la prima serie di osservazioni in merito, condotte su esemplari laziali e dalmati nel luglio del 1942, è particolarmente dimostrativa in proposito, poichè tutte le deposizioni ebbero luogo ne la stessa giornata, un solo esemplare avendola poi protratta durante la notte e la mattinata seguente. Le specie allora in esame erano: *Tropidonotus natrix* (forma tipica e var. persa) di provenienza laziale e dalmata, *Zamenis gemonensis*, *Coluber leopardinus* e *Coluber longissimus* (gli esemplari di queste due ultime specie, di provenienza dalmata). Esclusa la possibilità di una contemporaneità di data di fecondazione - il che sarebbe stato una coincidenza per lo meno strana, dato che, anche in una stessa zona di habitat, vi sono sempre più gruppi di individui de la stessa specie che si accoppiano in date diverse, e che le date di accoppiamento variano da specie a specie - e tenendo presente che, se bene nulla di certo si conosca in merito, è da ammettere, per analogia con quanto avviene in altre classi animali, l'esistenza di una certa variabilità - sia pure non molto ampia - del periodo di gestazione da individuo a individuo, non resta altra

ipotesi, per spiegare la simultaneità de l'inizio de la deposizione in tutti gli esemplari, che quella di una influenza climatica non identificata, ma che potrebbe risiedere in un alto grado di umidità de l'aria, accompagnato da temperature relativamente alte, tali essendo allora le condizioni mantenute ne i terrari mediante copiose e frequenti innaffiature. Conforta poi detta ipotesi il fatto che, in condizioni diverse, le deposizioni avvennero irregolarmente, e le uova non si svilupparono altrettanto bene.

Implicitamente, ove la deposizione sia regolata da fattori esterni, si dovrà ammettere che le uova possano venir da la femmina deposte nel momento che più risulterà opportuno e favorevole per l'ulteriore sviluppo fetale; onde la permanenza de le uova mature ne gli ovidutti potrebbe essere prolungata o no, a seconda de le evenienze. Ho cercato di chiarire la questione sia col mettere le femmine gravide in sfavorevoli condizioni climatiche e soprattutto igriche, per ritardare la deposizione de le uova, sia col trarre da femmine uccise le uova non del tutto mature, e ponendole in incubazione artificiale. Malauguratamente, sia le uova deposte con supposto ritardo, sia quelle premature, sono andate distrutte durante un breve periodo in cui le ho dovute forzatamente negleggere, e non ho quindi potuto controllare se il tempo necessario per la schiusa avesse subito accorciamenti, rispettivamente aumenti. Certamente però, tanto le une che le altre, fino a quando vennero mantenute in condizioni idonee, non dettero segno di alterazioni e di turbe de la vita fetale.

Per quanto riguarda il meccanismo fisiologico de la deposizione, ho potuto raccogliere un certo numero di dati che, sebbene non possano essere considerati definitivi, mi sembrano abbastanza significativi anche a lo stato attuale. Il ritmo normale di deposizione pare regolato da ben definite leggi; un esempio tipico ne è il seguente protocollo, relativo ad una tra le prime deposizioni osservate.

8 luglio 1942.

Coluber leopardinus. Deposizione de le uova.

- ore 16,30. Termina la deposizione di un primo uovo, lungo circa cm. 7.
- » 17,30. Viene deposto un altro uovo, più corto e più grosso.
- » 18,10. Inizia la deposizione di un terzo uovo, di egual grossezza del primo, ma più lungo.
- » 19,— Inizia la deposizione del quarto uovo, simile al secondo.
- » 19,50 Viene deposto il quinto uovo.
- » 20,55. Viene deposto il sesto uovo.

Analizzando i dati suesposti, è facile rilevare che le uova vengono deposte ad intervalli piuttosto lunghi, che tuttavia vengono progressivamente raccorciandosi: mentre infatti si ha un intervallo di un'ora tra il primo ed il secondo uovo, successivamente l'intervallo si riduce di un quinto circa. Tra il penultimo e l'ultimo uovo, l'intervallo è di nuovo lungo, tende anzi a superare quello tra il primo ed il secondo. In deposizioni abbastanza numerose – come una de le ultime da me osservate in *Elaphis quateradiatus*, con 14 uova – l'intervallo tende a ritornare lungo più precocemente, e non solo l'ultimo uovo, ma le ultime due o tre nascono con ritmo rallentato.

Il periodo espulsivo non è molto lungo, e si può calcolare in media di circa 5 minuti primi per ciascun uovo, con una certa latitudine di variazione individuale e con qualche differenza tra le varie specie; ma non mi sembra che mai, almeno ne i casi da me studiati, si possa parlare di un periodo espulsivo di 20 minuti circa, quale secondo il PRACCA si sarebbe verificato ne i suoi esemplari di *Elaphis quateradiatus*; per l'appunto ne le specie di grande mole, anzi, tutto il parto mi pare si effettui con molto maggior facilità e rapidità.

Come ho poco sopra accennato, la deposizione si va facendo via via più facile; il periodo espulsivo si mantiene pressochè eguale, o tende ad abbreviarsi progressivamente – e ciò è ovvio, dato lo sfiancamento de l'anello cloacale – mentre il periodo di espressione de l'uovo lungo le vie genitali superiori è per le ultime altrettanto lungo, se non più, che quello intercorrente fra l'emissione di ciascuna de le prime uova. Ciò si spiega con la considerazione che il piccolo volume complessivo de le uova residue risente meno l'azione de i muscoli che lo comprimono e lo sospingono, di quanto non avvenga per le uova più numerose e dunque volumetricamente più soggette a la pressione, al principio de la deposizione, precisamente come ne i mammiferi, a feto piccolo relativamente a la specie di appartenenza, corrisponde un periodo di contrazione più lungo. Inoltre viene certamente in giuoco l'affaticamento muscolare, che rende meno valide le contrazioni; le condizioni di optimum si hanno evidentemente per il gruppo di uova intermedie, poichè allora l'anello cloacale è già sufficientemente rilasciato e d'altra parte le contrazioni muscolari sono ancora pienamente efficaci, come dimostra la relativa brevità del periodo contrattivo stesso.

Il comportamento de l'animale durante la deposizione, osservato soprattutto in *Elaphis quateradiatus* ed in *Coluber longissimus*, ma - per quel che se ne può dire - eguale anche ne gli altri ofidii, anche vivipari, non è privo di interesse. Non sembra che esista un periodo prodromico paragonabile a quello de i mammiferi e de i volatili; al massimo si può notare, e non sempre, una certa inquietudine, che appare più che altro come una ricerca da parte de l'animale di un luogo idoneo a la deposizione de le uova o de i feti. Ben presto appaiono, nel tratto del tronco che precede immediatamente l'apertura cloacale, de le strozzature anulari, in numero di 1-2, e subito dopo, o trascorso un breve periodo, si nota un lento procedere del segmento rigonfio tra la strozzatura e la cloaca verso la cloaca stessa; successivamente si delimita nettamente la forma del primo uovo - in esemplari in buone condizioni la forma de le uova non appare da l'esterno prima di questo momento, come afferma invece il PERACCA, o almeno non così da poterne addirittura contare il numero, ma solo si ha un discreto turgore diffuso del tratto posteriore del tronco che aumenta sensibilmente ne l'immediata imminenza de la deposizione e si estende tanto più cranialmente quanto più numerose sono le uova - che viene portandosi sempre più vicino a l'apertura cloacale, con il suo diametro longitudinale disposto parallelamente a l'asse del corpo; in pari tempo comincia a delinearasi la forma de l'uovo successivo.

Quando l'uovo in espulsione ha imboccato l'anello cloacale, la strozzatura posta cranialmente ad esso si attenua, riprende, si attenua nuovamente...; infine l'uovo è parzialmente fuoriuscito, l'alternò accentuarsi ed attenuarsi de la strozzatura cessa o si riduce, mentre la forma de l'uovo, per la parte non ancora emessa, appare meno nettamente. Il polo inferiore de l'uovo è a questo punto fuori de l'apertura cloacale, volto verso l'apice de la coda ed un poco ventralmente, e pare che tutto l'uovo fuoriesca scivolando su le preanali che sono in spiccata angolazione con il tronco; le commessure laterali de la cloaca sono estremamente distese, la coda disposta ad arco, con la concavità ventrale.

Quando il parto è ormai in atto appaiono sottili pieghettature trasversali sul segmento precloacale iperdisteso, fenomeno puramente fisico di ordine meccanico, riproducibile stirando fra due punti di presa una qualsiasi lamina elastica. Le squame appaiono in tale momento concave.

Appena l'uovo è stato emesso fino a metà circa, fino cioè al suo massimo perimetro, i tempi vengono accelerandosi, e le labbra cloacali slittando sul guscio umettato di umori viscosi finiscono col collabire dietro il polo posteriore de l'uovo. A questo punto un movimento repentino del tronco materno porta la cloaca ad 1-2 cm. innanzi a l'uovo, rimanendo così uno spazio fra questo e la cloaca, spazio che sarà colmato da parte del successivo uovo deposto; ciò spiega la disposizione in fila in molti casi osservata.

L'animale — evidentemente stanco ed esaurito — assume una posizione di riposo e, mentre per tutta la durata del periodo espulsivo, o almeno a partire dal momento in cui l'uovo aveva cominciato ad affacciarsi con il suo polo inferiore fra le labbra de la cloaca, la rima cloacale e tutto il segmento terminale del tronco erano stati tenuti in posizione obliqua lateralmente, ora tutto l'addome poggia con la superficie ventrale al suolo, e l'animale si rilascia alquanto. Dopo un periodo più o meno lungo di riposo, iniziano nuove leggere contrazioni di tutto il tronco, che si vanno via via accentuando, ed in pari tempo tendono a limitarsi a la regione più caudale de l'addome; ricompaiono le strozzature anulari, la forma del secondo uovo — che si era attenuata fino a scomparire nel turgore del ventre — ricompare più vicina a la cloaca, ed il meccanismo già descritto si ripete, con le lievi differenze ne i suoi tempi, già menzionate.

Non ho mai notati quei movimenti a spira descritti dal PERACCA, e che questo autore ritiene destinati a facilitare l'espressione de l'uovo lungo le vie genitali superiori; tali movimenti ho invece osservati, e più volte, in un grosso esemplare di *Vipera aspis*, in tempo però lontano ancora da l'epoca del parto.

Talora invece compajono dei moti « pendolari » de l'uovo in espulsione che, sotto la spinta di ogni contrazione isolata si avvicina a la cloaca, ma perde poi col rilasciarsi de le forze muscolari che su di esso agiscono, parte del terreno guadagnato, tornando indietro di un tratto sempre notevolmente minore di quello percorso sotto la spinta, ma tuttavia sensibile. Il fenomeno potrebbe interpretarsi come indice di scarsa validità de l'apparato muscolare stesso, ma anche certamente è in funzione di uno stato di debilitazione generale de l'organismo materno.

Al termine de la deposizione de le uova, l'animale presenta il ventre ancora turgido, sì da trarre in inganno l'osservatore — le prime volte

mi è accaduto effettivamente di attendere per ore intiere la deposizione di altre uova che, con mia gran sorpresa, non venivano mai a la luce - e per l'evidente rilasciamento da fatica de i muscoli addominali - quelli soprattutto de i gruppi laterali - ed, ancora, per un qualche meccanismo analogo a la contrazione uterina de i mammiferi nota con il nome di « globo di sicurezza ». Non mi sembra poi assurdo il supporre i tessuti periferici al tratto inferiore de le vie genitali interne alquanto traumatizzati ed infiltrati; e così pure potrebbe contribuire al turgore in questione un accumulo di sierosità o mucosità ne le vie genitali inferiori. Ben presto, con un processo di riparazione alquanto rapido, il tutto scompare, e dopo 10-11 ore l'animale riprende l'aspetto normale, sebbene appaja stanco e spesso un poco smagrito, soprattutto quando si tratti di animale denutrito, cui viene a mancare l'« imbottitura » de le uova, che gli dava l'aspetto florido.

Relativamente a l'aspetto ed al comportamento de l'uovo, riservandomi di esporre in altra nota i dati che ho potuti rilevare circa l'evoluzione del suo aspetto esteriore in relazione a i vari stadi evolutivi del feto ed a le turbe di sviluppo del medesimo, dirò solo che ne i casi da me osservati non ho mai potuto notare che, come il PERACCA asserisce, durante la deposizione avvenga che la prima metà emessa de l'uovo contenga tutto o quasi il tuorlo e l'albume, nè che l'uovo sia dapprima floscio e semi-vuoto, inturgidendosi poi nel breve intervallo che precede l'indurimento del guscio, indurimento che talora è assai precoce. Solo uova premature possono — secondo quanto ho osservato tra l'altro in uova tratte dal corpo di un grosso esemplare di *Elaphis quateradiatus* — inturgidirsi un poco se tenute in ambiente saturo di umidità, nel qual caso però l'indurimento del guscio è notevolmente più lento.

Talvolta l'uovo è, a l'atto de la deposizione, chiazzato da aree semitrasparenti, corrispondenti a zone più molli del guscio, che non sono decalcificate, come si potrebbe pensare, ma ne le quali piuttosto i sali di calcio devono essere in qualche modo ancora in stato di soluzione, poichè queste aree in breve tempo imbianchiscono e si fanno altrettanto resistenti come la rimanente superficie, ed al loro posto rimano sovente una lieve rilevatezza. Il cambiamento di consistenza de l'uovo (o per dir meglio del guscio) è da elastico a pergamenaceo

(ma non rigido); il turgore in realtà aumenta solo di ben poco, poichè l'uovo viene deposto già disteso dal suo contenuto.

Nei vivipari ho potuto osservare una volta sola uno stato di eccitamento che mi parve preludere a l'accoppiamento, in un piccolo gruppo di Vipere aspis, ma non ho mai fino ad ora potuto disporre, ne la stagione de gli amori, di un gruppo sufficientemente cospicuo per poter condurre su questi ofidii osservazioni analoghe a le precedentemente esposte. Più volte invece ho potuto seguire il parto di Viperidi; questo avviene per lo più, conformemente a le abitudini semi-notturne de gli animali di questo genere, in ore crepuscolari, dopo il tramonto o verso l'alba.

Il meccanismo del parto segue, ne le sue grandi linee, quello già descritto per la deposizione de le uova de i Colubridi, ma, per la molto maggior flaccidezza de l'uovo non fornito di guscio calcificato, tutti i tempi ne sono grandemente accelerati. I piccoli vengono partoriti « duplicato corpore », talvolta anche ripiegati in tre, e generalmente avvolti ne le membrane ovulari, più o meno integre, e da le quali si liberano abbastanza presto, sebbene talvolta avvenga che, o per debolezza o per altre cause, non vi riescano, e così periscano per soffocazione.

Mentre non ho mai osservato casi di difficoltà deposizione de le uova in Colubridi, ma solo qualche volta deposizione di uova non vitali, nei Viperidi mi sembra di poter affermare che i disturbi de la gravidanza sieno molto più frequenti, compromettendo talora solo la vitalità de i feti, talaltra cagionando la morte anche de la femmina. Anche in Coronella austriaca, relativamente a la qual specie ho però potuto compiere un numero più esiguo di osservazioni, credo di aver notato una maggiore sensibilità a cause esterne o interne di perturbazione de la gravidanza.

Da quanto sopra ho riassuntivamente esposto, mi pare si possa concludere che:

la riproduzione de gli ofidii è fenomeno normale anche ne le condizioni di cattività, non solo, ma che tutti i fattori ambientali e di acclimatazione negativamente invocati a spiegarne la presunta im-

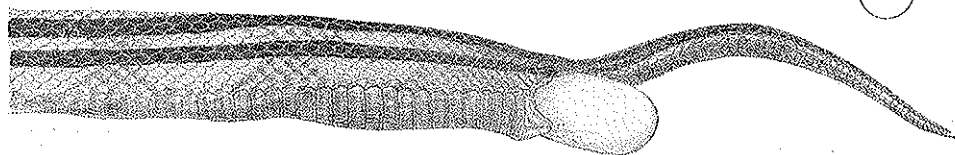
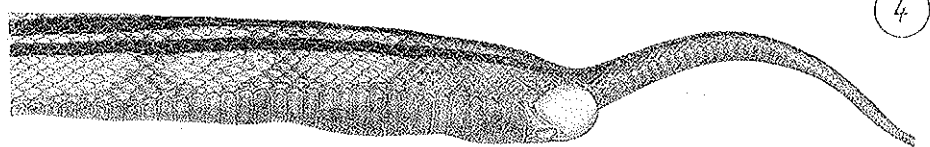
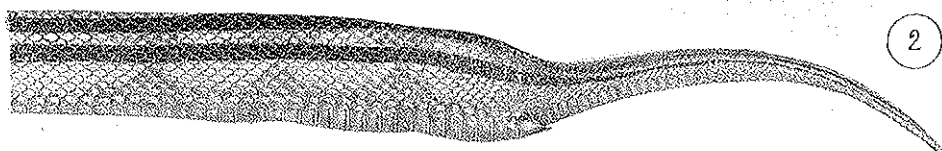
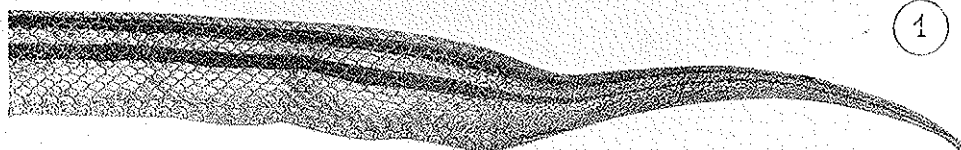
possibilità hanno ben poca influenza, e se pure in altri momenti de la vita in schiavitù di questi esseri tanto possano incidere su le reazioni loro, nel periodo di esaltazione de l'istinto genesico passano in seconda linea; forse è sola condizione essenziale che sieno riuniti esemplari in gran numero, acciò che l'istinto genesico si desti, almeno ne la maggioranza de i casi;

la scelta sessuale è privilegio in alcuni casi del maschio [*Tropidonotus natrix*, *Tropidonotus tessellatus* - *Zamenis* (?)] in altri invece de la femmina (*Coluber longissimus*, *Coluber leopardinus*);

la deposizione de le uova avviene con ogni probabilità, almeno di norma, nel momento climatico più favorevole a lo sviluppo ulteriore de i feti.

Al contrario, ne le specie vivipare l'emissione del feto è più strettamente legata a la maturità di quest'ultimo tanto è vero che i feti prematuri, anche di poco, non sopravvivono, e d'altra parte arresti di sviluppo fetale portano per lo più a ritenzione del feto stesso.

La tavola rappresenta sette fasi successive de la deposizione di un uovo da parte di *Elaphis quateradiatus*. Si notino il comportamento de le strozzature anulari e de le squame preanali, e l'atteggiamento de la regione precloacale del tronco, e de la coda.



UNA NUOVA SPECIE DI *LYCHAS* (*)

LODOVICO DI CAPORACCO

SUMMARY. — Describitur species nova generis *Lychadis* (*Lychas baldaseronii* Cap.).

Nel rivedere gli Scorpioni del Museo di Zoologia dell'Università di Firenze, mi è capitato tra mano un vaso contenente 4 esemplari provenienti dal viaggio in Birmania di L. FEA (1885-1886), catturati a Bhamo ed etichettati *Isometrus mucronatus* (Fabr.). Questa specie è attualmente assegnata al genere *Lychas* ed abita la Cina, il Giappone, le isole della Sonda e l'intera penisola Indocinese. Nulla di strano dunque che la si trovi a Bhamo. Senonchè un'occhiata agli esemplari in questione permette di escludere che si tratti di questa specie. Anzitutto, secondo l'ottima descrizione di KRAEPPELIN (*Das Tierreich*, 8 Lief., 1899, pag. 46) e di Pocock (*Fauna of British India, Arachnida*, pag. 36) il colore è variato di giallo e di nero, mentre gli esemplari in questione sono completamente gialli, con gli ultimi segmenti caudali e la vescica alquanto più scuri: nè è a pensarsi che il lungo soggiorno in alcool abbia fatto sbiadire il colore, chè in tal caso sarebbe sbiadito anche il colore oscuro degli ultimi segmenti caudali. Ho pensato dapprima a una semplice varietà di colore, ma vi è pure una differenza nelle carene dell'ultimo sternite, che sono due, e completamente lisce,

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Chigi il 2 dicembre 1947.

quasi obsolete. Il dito mobile appena più lungo del cefalotorace distingue questi esemplari da *Lychas scaber* Poc.; il fatto di avere due carene all'ultimo sternite li distingue da *L. scutillus* C. L. K.

Dò qui appresso la descrizione di questi esemplari, che appartengono ad una nuova specie, da me dedicata al prof. BALDASSERONI, Direttore del Museo al quale detti scorpioni appartengono.

Lychas baldasseronii sp. n.

♂ Corporis totius long. mm. 55, cephalothoracis mm. 5,5; cephaloth. latitudo mm. 5,5 I segm. caudalis long. mm. 3,5, latit. mm. 2,5, altit. mm. 2,5; II mm. 4, mm. 2,6 et mm. 2,5; III mm. 4,75, mm. 2,75 et mm. 2,5; IV mm. 5,5, mm. 2,75 et mm. 2,6; V mm. 6,5, mm. 2,5 et mm. 2,5; vesicae mm. 6,5, mm. 2 et mm. 2,2; longitudo femoris palpi mm. 5,2, latit. mm. 1,75; tibiae mm. 5,5 et mm. 2; manus sine digitis mm. 4,75 et mm. 2,5; longit. digiti mobilis mm. 5,75; pedum I paris mm. 13; II mm. 16; III mm. 20; IV mm. 23.

♀ Corporis totius long. mm. 49; cephaloth. mm. 5,2; cephaloth. latitudo mm. 5; I segm. caudalis long. mm. 3,5, latit. mm. 2,75, altit. mm. 2; II mm. 4, mm. 2,75 et mm. 2,1; III mm. 4,5, mm. 2,5 et mm. 2,3; IV mm. 5,25, mm. 2,4 et mm. 2,3; V mm. 6,5, mm. 2,25 et mm. 2,1; vesicae mm. 6,25, mm. 2 et mm. 1,8; longit. femoris palpi mm. 4,5, latit. mm. 1,1; tibiae mm. 5,5 et mm. 1,75; manus sine digitis mm. 3,5 et mm. 1,9; long. digiti mobilis mm. 5,5; pedum I paris mm. 12; II mm. 16; III mm. 19; IV mm. 23.

Corpus omnino flavum, macula fusca basi digiti mobilis manus; segmento caudali IV vix infuscato, V et vesica magis infuscatis, fere brunneis.

Cephalothorax et truncus vix coriacei; cephalothorax antice sat profunde incisus, marginibus parce et minutissime granulosis. Sulcus medius sat profundus. Tuber ocularis a margine posteriore fere duplo quam a margine anteriore distat. Cristae oculares laeves. Tergites carina media humili brevi (dimidium tergitis antice vix attingenti), antice laevi, postice 2-3 denticulis minimis, vix visibilibus. Tergites ultimus 4 carinis humilibus, postice minutissime denticulatis. Sternites laeves; ultimus 2 carinis laevibus, humilibus, fere obsoletis. Segmenta caudalia coriacea; I et II decemcarinata, III et IV octocarinata; ca-

rinae inferiores laeves; I segmento fere obsoletae; coeterae minutissime granulosa. V segmento adsunt 2 carinae superiores et carina ventralis granulosa; utrinque 2 series granulorum parvorum, carinarum locum tenentes. Vesica non carinata, dente subaculeari magno. Dentes pectinun in utroque sexu 20.

Palpi coriacei. Femur postice carina superiore finissime granulosa, antica carina superiore laevi et inferiore finissime denticulata; tibia desuper 2 carinis laevibus fere obsoletis, antice carina 10 denticulis parvis munita. Manus non carinata. Digitus immobilis e basi sinuatus. Digiti serie continua denticulorum, intus et extus 8 paribus denticulorum maiorum, qui cum denticulis seriei mediae series transversas designant. Calcar tibialis dimidia latitudine articulis aequilongus.

ALCUNI ARACNIDI CAVERNICOLI DI TOSCANA (*)

(Con due figure)

LODOVICO DI CAPORIACCO

SUMMARIVM. — Nominantur nonnullae species Arachnidarum in caveis montium Calvaniae dictorum a dom. Lanza collectae; describuntur tres species novae.

Il sig. BENEDETTO LANZA mi ha affidato in istudio alcuni aracnidi, da lui raccolti in grotte della Toscana.

Dal punto di vista biospeleologico, la Toscana è press'a poco terra incognita, e non c'è perciò da stupirsi se lo scarso materiale studiato ha tuttavia permesso di trovare varie specie nuove.

Dò qui l'elenco delle grotte visitate, accompagnata ognuna da una lettera e un numero, con i quali la grotta verrà designata nell'elenco degli Aracnidi trovativi.

- A 1. Tana dei Pipistrelli presso Sassorosso, alta Garfagnana, sinistra del fiume Serchio (grotta del tutto oscura), 11 agosto 1946.
- B 1. Tana del Frate, alta Garfagnana, sinistra del fiume Serchio, 11 agosto 1946.
- C 1. Tana del Bedizzano, Valle Torr. Carriona, sopra Carrara (Grotta non completamente oscura), 21 agosto 1926.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi il 2 dicembre 1947.

- D 1. Spelonca delle Pile, m. 760 sui monti della Calvana, presso Firenze, 10 aprile 1945; D 2, id., 14 aprile 1946; D 3, id., 28 luglio 1946; D. 4, id., 17 agosto 1946.
- E 1. Speloncaccia, m. 726 sui monti della Calvana, presso Cantagrilli, Firenze, 10 aprile 1945; E 2, id., 14 aprile 1946; E 3, id., 27 aprile 1947.
- F 1. Buca a' Frati, presso Siena, 13 novembre 1946.
- G 1. Grotta Maona, Montecatini, 25 febbraio 1947.

Le specie raccolte sono le seguenti:

CHERNETES

CHTHONIDES Chtoniidae

- 1) *Chthonius lanzai* sp. n. - 1 es.: evidentemente troglobia, A 1.
 2) *Chthonius (Ephippiochthonius) tetrachelatus* (Preysl.) - 1 es.,
 G 1. Specie trovata ovunque in Europa, non troglobia.
 2 bis) *Chthonius* sp. ind. - 1 es. rotto, D 4.

NEOBISIIDES Neobisiidae

- 3) *Neobisium dolichodactylum* (Can.) - 1 es., B 1. Specie talora trovata nelle caverne, ma per nulla legata ad esse: noto d'Italia, Corsica, Francia mer., Spagna.
 4) *Roncus (Parablothrus) beieri* sp. n. 1 es. evidentemente troglobio, F 1.

ARANEAE

AMAUROBIIFORMIA Amaurobiidae

- 5) *Amaurobius scopoli* Th. - 1 ♀ iuv., D 3. Determinazione non sicura, basata, non essendo l'epigine adulta, sulla disposizione degli occhi e sull'addome concolore. Noto della regione Alpina, è stato spesso trovato in grotte, senza esservi affatto legato.

SCYTODIFORMIA Pholcidae

- 6) *Pholcus phalangioides* (Füssli). - 2 ♀, G. 1. Specie quasi cosmopolita, non rara nelle grotte, ma per nulla legata ad esse.

LYCOSAIFORMIA Agelenidae

7) *Tegenaria domestica* (Cl.). - 1 ♀, G 1. Specie olartica, trovata anche nelle grotte, ma non legata ad esse.

8) *Tegenaria derhami* (Sol.). - 1 ♂ iuv. e 2 pull., C 1. Specie olartica, comunissima, non legata alle grotte.

9) *Tegenaria pusilla* (E. S.). - 1 ♀ subad., D 2, mi sembra determinata con sufficiente sicurezza, nonostante l'epigine non sia sviluppata, per la disposizione degli occhi, filiere ed aculei. Si trova, rara, in Francia e Germania. Per quanto ne so, la sua presenza nella Spelonca delle Pile deve essere accidentale, non essendo mai stata trovata in grotte.

ARGIOPIFORMIA ⁽¹⁾ Theridiidae

10) *Episinus maculipes* (Cav.). - 1 ♂, F 1. La sua cattura in grotta è certo puramente accidentale, poichè questa specie, nota d'Italia, Francia, Spagna e Africa minore, non è nemmeno lucifuga.

11) *Episinus eremita* (E. S.). - 2 ♂ ♀ immaturi, A 1; 1 ♀ ad e 1 pull, C 1. Sono tutti completamente concolori, con gli O.M.P. distanti tra loro di due diametri. Forma nettamente troglobia, nota di Francia mer. e d'Italia.

12) *Nesticus eremita* (E. S.) *italicus* di Cap. - 1 ♀, D 3; 1 ♀, E 1; 1 pull; F 1; 2 pull; G 1. Per quanto di aspetto meno nettamente troglobio della precedente varietà (colorazione bene espressa, O.M.P. maggiori, distanti fra loro del loro diametro) anche questa forma è stata trovata fin qui solo in grotte italiane.

Micryphantidae

13) *Gonatium corallipes* (Cbr.). - 2 ♀, D 2. Accidentale in grotta, poichè questa specie, nota di buona parte d'Europa, non è nemmeno lucifuga.

14) *Lessertia denticelis* (E. S.). - Un pull., C 1; 1 pull., D 2; 1 ♀ iuv., F 1. Specie lucifuga, non legata alle caverne, ma che vi si trova frequentemente, in Italia, Francia, Belgio ecc.

⁽¹⁾ Scrivo *Argiopiformia* ed *Argiopidae* anzichè *Argyropiformia* ed *Argyropidae*, parendomi giusta l'osservazione di BONNET che, essendo *Argiope* nome proprio, deve esser scritto correttamente, anche se l'Autore lo ha scritto sbagliato.

Linyphidae

15) *Leptyphantes* ⁽¹⁾ *pallidus* (Cbr.). - 1 ♂, F 1. Specie, come la precedente, lucifuga e perciò frequente in grotte della maggior parte d'Europa e di Algeria, ma non ad esse esclusiva.

16) *Leptyphantes florentinus* sp. n. - 1 pull., D 2; 2 ♂ ♀ ad., D 3. Non ha nessun carattere spiccatamente cavernicolo.

Argiopidae ⁽¹⁾

17) *Meta menardi* (Scl.). - 2 ♀ ad. ed 1 pull., A 1; 2 ♀ iuv., D 1; 1 ♀ iuv. e 1 pull.; D 3; 1 ♀ iuv. e 1 pull., E 2; 4 ♀ et iuv., E 3. Forma troglobia, come nelle grotte di tutta Europa.

Come si vede, di queste 17 specie, tre: *Tegenaria pusilla* (E. S.), *Episinus maculipes* (Cav.) e *Gonatium corallipes* (Cbr.), che non sono nemmeno lucifughe, devono essere capitate nelle grotte del tutto accidentalmente. Per otto, cioè per *Chthonius tetrachelatus* (Preysl.), *Neobisium dolichodactylum* (Can.), *Amaurobius scopolii* (Thor.), *Pholcus phalangoides* (Füssli), *Tegenaria domestica* (Cl.), *T. derhami* (Scl.), *Lessertia denticelis* (E. S.), *Leptyphantes pallidus* (Cbr.), si tratta di formar lucifughe, che sono state frequentemente trovate in grotte, ma che non sono punto legate a questo habitat; è probabile che a questa categoria vada assegnato anche il nuovo *Leptyphantes florentinus*. *Meta menardi* (Scl.) si trova in grotte ed oltracciò in cantine e pozzi, mai fuori di questi habitat. Finalmente le due varietà di *Nesticus eremita* (E. S.) sono esclusivamente troglobie e non si conoscono fuor delle grotte; le due nuove specie di Cherneti, completamente cieche, son certo da assegnarsi alla stessa categoria.

Faccio seguire la descrizione delle tre specie nuove.

⁽¹⁾ Uso la grafia *Leptyphantes*, poichè, come constata BONNET, questa, per la regola di semplificazione, è corretta quanto *Lephtyphantes*. La forma nella quale il nome venne scritto per la prima volta, *Lephtyphantes*, è invece scorretta, ma tra le altre due, egualmente corrette, la preferenza va data alla prima, non solo perchè più semplice, ma anche perchè più antica.

Chthonius lanzai sp. n.

Longitudo mm. 2, 11; cephalothoracis mm. 0,67; cephalothoracis latitudo mm. 0,7; palpi femoris long. mm. 1,2; lat. mm. 0,21; tibiae mm. 0,55 et mm. 0,25; manus mm. 0,6 et mm. 0,33; digiti immobilis longitudo mm. 1,2; mobilis mm. 1,14.

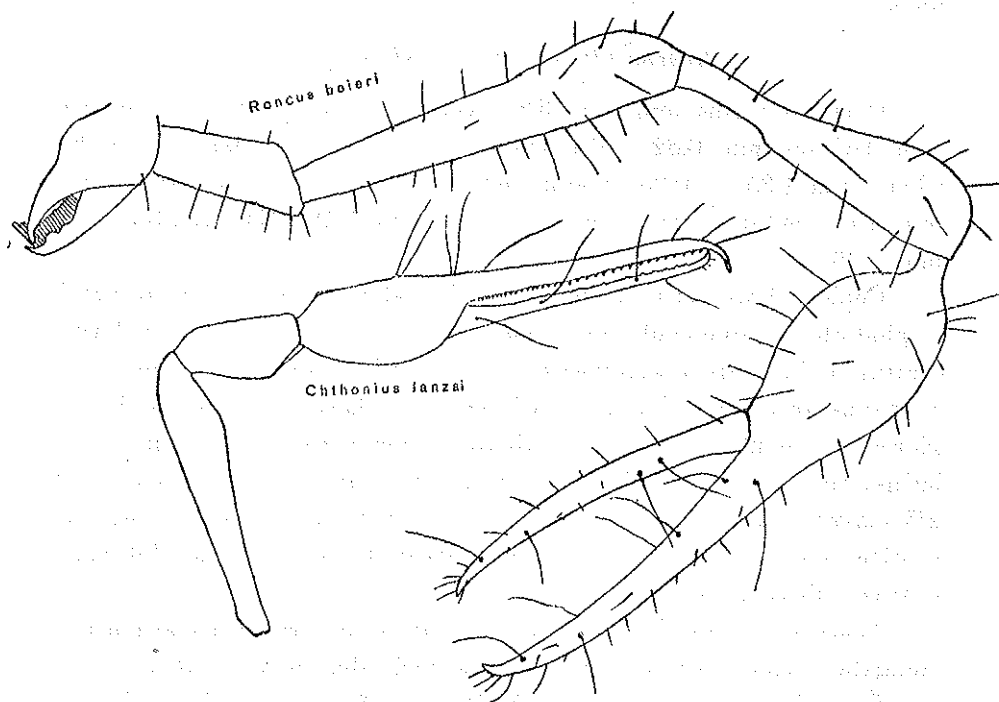
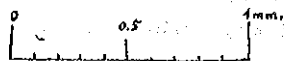


FIG. 1.

Cephalothorax sine epistomate et sine oculis (tantum macula dilutior adest, locum oculi I indicans). Setae marginis posterioris cephalothoracis 4, quarum 2 magnae. Tergites 4-4-4-6-6-6 setis. Chelae digito mobili tuberculo mamillari evidentissimo. Digitus immobilis manus palpi digito mobili longior, dentibus 35 triangularibus basin versus apice inclinatis, inter se saltem eorum diametro remotis. Digitus mobilis dentibus minoribus, in dimidio basali sensim fere obsoletis. Trichobo-

thrium *ist* ab *est* et ab *it*, inter se valde propinquis, sat late distans. Tibia sat inflata. Pedes normales. Colore fulvo, manu non obscuriore.

A *Chthonio microphthalmo* differt digitis manus magis inaequalibus, et digito immobili manus duplo longiore, femore = $2\frac{2}{3}$ longitudinis manus cum digitis (in *Chthonio microphthalmo* paullo minus), et palpo longiore si eum cum corpore comparas.

Speciei huius invenit ♀ in spelunca «Tana del Frate» dicta in valle fluminis Serchio, die III a. Id. aug. 1946 dom. Lanza, cui speciem dico.

Roncus (Parablothrus) beieri sp. n.

Corporis totius long. mm. 3,89; cephalothoracis mm. 1,91; cephaloth. latitudo mm. 0,82; palpi femoris long. mm. 1,73, latit. mm. 0,29; tibiae mm. 1,35 et 0,36; manus mm. 1 et mm. 0,56; digitorum long. mm. 1,6; pedum I paris mm. 3,27; II mm. 3,18; III mm. 3,76; IV mm. 4,49.

Cephalothorax et palpi rufobrunnei; abdomen colore fulvo ut palpi. Cephalothorax sine oculis, epistomate evidenti, magno, acuto. Chelarum digitus mobilis apice angulatus sed sine tuber mamillare. Palpi femur et manus antice finissime punctati; caeterum laeves, corpore valde longiores; trochanter postice non tuberosus; femur sextuplo longius quam latius; tibiae latitudo 3,75 in longitudine continetur; pedunculus est $\frac{2}{5}$ clavae. Manus ovalis; digiti femore vix breviores. Cephalothorax postice 6 setis; tergites 6-6-8-8-10-10-10-10 setis. Coxae III paris postice tuberculo acuto.

Ronco antrorum (E. S.) similis, sed ab eo differt tibia clava magis elongata, corpore maiore, tergitebus posterioribus magis setosis.

Speciei huius, chernetologo M. Beiero e Vindobona dictae, invenit speciem dom. Lonza in spelunca Buca de' Frati dicta, in prov. Sena, id. nov. 1946.

Leptyphantes florentinus sp. n.

♂ Corporis totius long. mm. 1,95; cephalothoracis mm. 0,75; abdominis mm. 1,2; pedum I paris mm. 4,6 (femoris mm. 1,05, patella mm. 0,31, tibiae mm. 1,1, metatarsi mm. 1,04, tarsi mm. 0,74); II mm. 4,24 ($1,05 + 0,29 + 1 + 0,96 + 0,64$); III mm. 3,75 ($0,96 + 0,28 + 0,86 + 0,9 + 0,45$); IV mm. 4,52 ($1,1 + 0,22 + 1,1 + 1,1 + 0,7$); palporum mm. 1,45.

♀ Corporis totius long. mm. 1,85; cephalothoracis mm. 0,75; abdominis mm. 1,15; pedum I paris mm. 4,66 ($1,15 + 0,3 + 1,15 + 1 + 0,7$); II mm. 4,34 ($1,15 + 0,28 + 1,03 + 0,95 + 0,63$); III mm. 3,45 ($0,9 + 0,23 + 0,75 + 0,72 + 0,55$); IV mm. 5,43 ($1,15 + 0,2 + 1,1 + 1 + 0,68$); palporum mm. 1,12.



FIG. 2. — *Leptyphantes florentinus*.

Corpus fulvotestaceum, oculis nigrolimbatis. Oculi superi in serie vix procurva (margo posterior lateralium post libram centri mediorum); anteriores in serie recta. Oculi superi inter se dimidio lateralium diametro remoti; laterales antichi a mediis distant quam quo distant superi inter se, idest spatio mediorum anticorum diametro aequo; medii antichi inter se eorum radio, a mediis superis superiorum diametro remoti. Clypeus area oculari aequae altus. Chelae margine superiore dentibus 3 magnis, inferiore 5 granuliformibus. Sternum valde latum. Femur I tantum aculeo anteriore; patellae aculeo; tibiae 2 aculeis superioribus et aculeo laterali anteriore subapicali gracili; metatarsi I, II et III aculeo singulo superiore, IV mutici.

Palpi ♂ patella seta sat valida; tibia seta valida, longa, subbasali. Paracymbium unco anteriore antice verso; lamina characteristicam biramosa, ramo externo lobato.

♀ epigyne e tubercolo non altiore quam longiore, desuper ligula non longiore quam tuberculum munita, constat.

Speciei huius forma genitalium a coeteris speciebus sat distinctae inventi sunt ♂♀ et pull. in Spelunca «delle Pile» dicta, in Monte Calvana, apud Florentiam, a dom. Ben. Lanza.

APPUNTI PER UNA TEORIA INTRINSECA DELLE VARIABILI COMPLESSE SOPRA UNA SUPERFICIE (*)

LUIGI CASTOLDI

SVMMARIVM. — Agit Auctor de functionibus analiticis in superficie ut tensoribus conceptis.

1. — In una nota di carattere elementare di qualche anno addietro ⁽¹⁾ ho mostrato come la nozione di numero complesso possa identificarsi (con qualche vantaggio concettuale) con quella di tensore del secondo ordine del piano, avente matrice delle componenti del tipo

$$[1] \quad \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$$

Siffatti tensori costituiscono, come tali, l'unica possibile generalizzazione della nozione di numero reale, che soddisfaccia alla condizione di permanenza delle proprietà formali delle operazioni del calcolo numerico.

Il supporre, in [1], a e b funzioni del posto (x^1, x^2) nel piano porta naturalmente alla nozione di « *variabile complessa* ».

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 14 settembre 1947.

(1) LUIGI CASTOLDI, *Alcune osservazioni sui numeri complessi e sui quaternioni*, « Per. di Matematiche », sez. 4^a, Vol. XX, pag. 185 (1940).

Volendo mettere in evidenza il carattere tensoriale del raggruppamento [1], converrà scrivere la variabile complessa sotto la forma

$$[2] \quad T^i_j = a(x^1, x^2) A^i_j + b(x^1, x^2) \varepsilon^{ik} g_{kj} \quad (i, j = 1, 2)$$

dove a e b sono assegnate funzioni invarianti e g^{ij} ed ε_{ij} sono rispettivamente il primo e il secondo tensore fondamentale della varietà piana. È poi $A_i{}^j = g_{ik} g^{kj}$ il tensore fondamentale unitario. In tal modo è data forma invariantiva, di fronte a tutti i possibili sistemi di riferimento nel piano, alla nozione di variabile complessa.

Ma v'ha di più: l'espressione a secondo membro di [2] ha forma tensoriale generale, nel senso che in essa non v'è traccia della particolare natura metrica della varietà delle variabili x^1, x^2 . Ne risulta immediatamente la possibilità di estensione, senza alcuna modificazione formale, della nozione di variabile complessa dal piano a una V_2 di metrica qualunque.

Sopra una qualsivoglia superficie V_2 definiremo dunque come « *variabile complessa* » o « *tensore complesso* » il più generale tensore della forma [2] ⁽¹⁾.

2. - La nozione di variabile complessa si precisa interpretando il tensore T^i_j come *operatore su vettori* in V_2 . Si riconosce tosto, attraverso la struttura [2] di T^i_j , che, in un generico punto di V_2 , l'applicazione di tale operatore a un vettore v^i , producendo il vettore $w^i = T^i_j v^j$, ha per effetto di moltiplicare il vettore dato per lo scalare a , di moltiplicare per b il vettore che si ottiene dal dato con una rotazione positiva di un angolo retto, indi di sommare i risultati ottenuti.

Si constata poi che l'ordine delle prime due operazioni eseguite è inessenziale, in virtù della proprietà commutativa della somma di vettori.

Una restrizione essenziale alla nozione di variabile complessa, come fin qui concepita, consiste nell'imporre all'operatore T^i_j di soddisfare

(¹) È forse superfluo rilevare che, nonostante l'uso dell'aggettivo « *complesso* » che adottiamo per ovvie ragioni di consuetudine, tutte le quantità che entrano nella presente trattazione sono *esclusivamente reali*.

alla seguente condizione: che, applicato ad un vettore qualunque v^j , dotato di carattere conservativo, per cui sia cioè $\text{div } \mathbf{v} = 0$, produca un vettore w^i per cui sia $\text{div } \mathbf{w} = 0$. Si richiede cioè che l'operatore T_{ij}^i mantenga l'eventuale carattere conservativo dei vettori cui si applica.

Questa condizione si esprime in formule affermando che è

$$[3] \quad \nabla_i (T_{ij}^i v^j) = 0$$

ogni qualvolta sia

$$[3'] \quad \nabla_j v^j = 0.$$

Da ciò segue che è

$$[3] \quad \nabla_i (T_{ij}^i v^j) = \nabla_i T_{ij}^i \cdot v^j = 0,$$

per ogni vettore v^j a divergenza nulla. Poichè quest'ultima limitazione sulla natura di \mathbf{v} non vincola ovviamente in modo alcuno i valori *locali* di \mathbf{v} , consegue da [4]:

$$[5] \quad \Delta_i T_{ij}^i = 0,$$

ossia facendo uso di notazioni introdotte in altra parte⁽¹⁾,

$$[5'] \quad \text{Div}_{(1)} \mathbf{T} = 0.$$

Ricorrendo all'espressione esplicita di T_{ij}^i , la [5] diventa:

$$[6] \quad \frac{\partial a}{\partial x^i} A_{ij}^i + \frac{\partial b}{\partial x^i} \epsilon^{ih} g_{hj} = 0,$$

ossia

$$[6'] \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial x^1} + \frac{g_{21}}{\sqrt{g}} \frac{\partial b}{\partial x^1} - \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial b}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial a}{\partial x^2} + \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial b}{\partial x^1} - \frac{g^{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial b}{\partial x^2} = 0, \end{array} \right.$$

(1) L. CASTOLDI, *Estensione a tensori qualunque di alcuni teoremi fondamentali dell'Analisi vettoriale.*

le quali, nel caso di una V_2 piana e di un riferimento ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si semplificano nelle seguenti:

$$[6''] \quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial x^1} = \frac{\partial b}{\partial x^2} \\ \frac{\partial a}{\partial x^2} = -\frac{\partial b}{\partial x^1} \end{cases}$$

e coincidono colle notissime equazioni di Cauchy-Riemann, o *condizioni di monogeneità* ⁽¹⁾.

Verificandosi dunque la [5'] per un tensore T^i_j in V_2 del tipo [2], risulta giustificato assumere un tale tensore come l'ente che generalizza a una V_2 qualunque la nozione di « *variabile monogena complessa* » e interpretare la [5'] o le [6'] come relative « *condizioni di monogeneità* ».

Le [6] con riferimento ad indici di controvarianza, può scriversi

$$[6'''] \quad (\text{grad } a)_i g^{ij} = -\varepsilon^{ji} (\text{grad } b)_i,$$

nella quale il vettore del secondo membro si ottiene, punto per punto di V_2 , da $\text{grad } b$, con una rotazione negativa di un angolo retto nel rispettivo piano tangente. Risulta di qui che, su V_2 , i campi vettoriali $\text{grad } a$ e $\text{grad } b$, e, con essi, le congruenze di linee $a = \text{costante}$, $b = \text{costante}$ riescono dappertutto mutuamente ortogonali.

Ciò spiega il presentarsi della nozione di variabile monogena complessa in tutti i problemi fisici bidimensionali (tipica, al riguardo la teoria dei moti laminari irrotazionali di fluidi perfetti ⁽²⁾) in cui intervengano con carattere intrinseco un campo vettoriale irrotazionale e le rispettive traiettorie ortogonali.

⁽¹⁾ La nozione di variabile complessa su una superficie risale al BELTRAMI [*Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque*. « Annali di Matematica pura ed applicata », Serie II, tomo 1^o (1868), pagg. 329-366], cui sono dovute le condizioni di monogeneità [6'] sotto una forma equivalente cui si perverrebbe partendo dall'analoga controvariante di [6]. Su queste nozioni fondamentali tornarono in seguito il CISOTTI [*Equazioni fondamentali dei moti laminari sopra una superficie*. « Rend. Acc. Lincei », vol. 1, serie 6^a (1925), pagg. 612-617], e il PALATINI [*Sulle funzioni di variabile complessa di una superficie e sui moti laminari*. « Boll. dell'Un. Mat. Italiana », vol. 7 (1928), pagg. 82-87].

⁽²⁾ Si confrontino i lavori di U. CISOTTI e di A. PALATINI, citati nella nota precedente.

Va anche osservato che, moltiplicando entrambi i membri di [6'''] per $\varepsilon_{ji} g^{hr}$, si perviene alla relazione equivalente

$$[6^{IV}] \quad (\text{grand } b)_i g^{ij} = \varepsilon^{ji} (\text{grand } a)_i$$

Dopo di che, prendendo la divergenza di [6'''], introducendo in V_2 il parametro differenziale secondo generalizzato

$$\Delta_2 \varphi = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right] g^{ij} = \nabla_j \nabla_i \varphi \cdot g^{ij} ,$$

e notando infine che il tensore doppio $\nabla_j \nabla_i \varphi$ è simmetrico rispetto agli indici i e j , riconosciamo che, per l'invariante scalare a , vale l'equazione generalizzata di Laplace:

$$[7] \quad \Delta_2 a = 0$$

In modo analogo, partendo da [6^{IV}], si riconosce valida per b la stessa equazione:

$$[7'] \quad \Delta_2 b = 0$$

Viceversa se a è un invariante armonico, soddisfacente cioè all'equazione [7], le [6'] determinano b , pure armonico per [7'], a meno di un fattore costante. Abbiamo in a e in b la generalizzazione (risalente al Beltrami) delle classiche funzioni armoniche associate dell'ordinaria teoria delle funzioni di variabile complessa.

Ancora, se \mathbf{v} è un vettore irrotazionale e a divergenza nulla in V_2 , è

$$\mathbf{v} = \text{grad } a , \quad \Delta_2 a = 0 .$$

Al vettore \mathbf{v} è dunque legato un invariante armonico a , e quindi, per quanto precede, una variabile analitica complessa in V_2 . Il che conferma quanto si è sopra osservato attorno al costante intervento di questa nozione nei problemi in cui si presentano campi vettoriali del tipo considerato.

3. - Sia ora

$$[2'] \quad U^i_j = A(x^t, x^s) A^i_j + B(x^t, x^s) \epsilon^{th} g_{hj}$$

una seconda variabile complessa ⁽¹⁾ definita sopra la medesima V_2 .

È sempre possibile concepire $A(x^t, x^s)$ e $B(x^t, x^s)$ come funzioni continue e derivabili di a e di b . Basta infatti pensare invertite le relazioni $a = a(x^t, x^s)$, $b = b(x^t, x^s)$ e sostituiti i risultati in luogo di x^t e di x^s in A e B . La richiesta invertibilità risulta poi assicurata dal fatto che il determinante funzionale

$$D = \frac{\partial(a, b)}{\partial(x^t, x^s)} ,$$

non si annulla nel campo considerato di V_2 , in virtù della rilevata ortogonalità dei vettori $\text{grad } a$ e $\text{grad } b$.

Diremo, in tal senso, che, date due variabili complesse T^i_j , U^i_j in un medesimo campo di V_2 è sempre possibile concepir l'una come « *funzione* » dell'altra, intendendo con ciò dichiarare la riconosciuta esistenza di due funzioni continue e derivabili f e φ di due argomenti, per cui è

$$A = f(a, b) , \quad B = \varphi(a, b)$$

Una tale definizione è conforme, nello spirito, se non nei particolari applicativi, alla definizione generale di « *funzioni di matrici* » data vari anni addietro dal GIORGI e successivamente approfondita in pregevoli lavori dal GIORGI stesso, dalla Signora PORCU-TORTRINI e dal FANTAPPIÈ⁽²⁾, il quale ultimo vi ha applicato i concetti e i procedimenti della sua teoria dei funzionali analitici.

⁽¹⁾ Nel seguito, dato che non considereremo variabili complesse che non siano monogene, ometteremo tale aggettivo nella locuzione *variabile monogena complessa*.

⁽²⁾ G. GIORGI, *Sulle funzioni di matrici*. « Atti Acc. Naz. dei Lincei », serie 6^a, vol. VII (1928), pag. 178; e: *Nuove osservazioni sulle funzioni delle matrici*. Ibidem, vol. VIII (1928), pag. 3.

E. PORCU-TORTRINI, *Calcolo delle funzioni qualunque delle matrici di secondo ordine*. « Atti Acc. Naz. dei Lincei », serie 6^a, vol. VII (1928), pag. 206.

L. FANTAPPIÈ, *Le calcul des matrices*. « Comptes Rendus » de Paris, vol. 186 (1928), pagg. 619-621.

Senonchè, tornando al caso che ci interessa, cioè di un tensore complesso U^i_j in V_2 , funzione di un altrettale T^i_j , va rilevato che la definizione testè adottata non può considerarsi come rispondente all'indole delle considerazioni che stiamo svolgendo, giacchè, per essa, risultano piuttosto definiti gli elementi della matrice U^i_j come funzioni di quelli di T^i_j , anzichè, come sarebbe desiderabile, il tensore stesso U^i_j come funzione (tensorialmente caratterizzabile) di T^i_j .

Se al requisito del carattere tensoriale del legame di dipendenza tra U^i_j e T^i_j si aggiunge l'altro, che sia possibile definire una derivata (prima) di U^i_j rispetto a T^i_j , risulta evidente la necessità di apportare alla precedente definizione una forte limitazione di contenuto. Precisamente, appare necessario considerare come funzioni di T^i_j i soli tensori costruibili come serie di potenze (positive e negative) di T^i_j , cioè limitare la nozione generale di funzione a quella di « *funzione analitica* ».

L'espressione della più generale funzione (analitica) della variabile complessa T^i_j va dunque concepita della forma:

$$[8] \quad U^i_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (a A^r_s + b \varepsilon^{rh} g_{hs})^n ,$$

dove le c_n sono costanti (reali) e le $a(x^1, x^2)$, $b(x^1, x^2)$ funzioni (reali) del posto in V_2 , dotate di derivate prime continue soddisfacenti le condizioni di omogeneità [6].

Va notato che, nel secondo membro della [8], con

$$T^i_j = a A^i_j + b \varepsilon^{ih} g_{hj} ,$$

va ritenuto

$$(T^i_j)^2 = T^i_h T^h_j = (a^2 - b^2) A^i_j + 2ab \varepsilon^{ih} g_{hj} ,$$

$$(T^i_j)^n = T^i_{h_1} T^{h_1}_{h_2} \dots T^{h_{n-1}}_{h_n} ,$$

inoltre:

$$(T^i_j)^{-1} = \frac{a A^i_j - b \varepsilon^{ih} g_{hj}}{a^2 + b^2} ,$$

con che risulta

$$(T^i_h) (T^h_j)^{-1} = A^i_j ,$$

e infine

$$(T^i_j)^{-n} = [(T^i_j)^{-1}]^n$$

Risulta da ciò e dall'osservare che è, in virtù di [5], con n intero positivo o negativo qualunque:

$$\nabla_i (T^i_j)^n = n (T^i_j)^{n-1} \nabla_h T^h_i = 0,$$

l'effettivo carattere di tensore complesso di ogni termine della serie [8], e quindi della sua somma in tutto il campo di convergenza.

4. - A valutare l'entità della restrizione imposta alla nozione di funzione di variabile complessa colla condizione di analiticità giova introdurre nell'espressione del tensore complesso T^i_j , in luogo degli invarianti cartesiani a, b , gli invarianti polari ρ, ϑ , come i primi funzioni di x^i e di x^p , e legati ad essi dalle relazioni $a = \rho \cos \vartheta$, $b = \rho \sin \vartheta$, si ha allora

$$T^i_j = \rho \cos \vartheta A^i_j + \rho \sin \vartheta \varepsilon^{ih} g_{hj}$$

e

$$(T^i_j)^n = \rho^n \cos n\vartheta A^i_j + \rho^n \sin n\vartheta \varepsilon^{ih} g_{hj},$$

con n intero qualunque.

La [8] può allora scriversi

$$[8'] \quad U^i_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \rho^n (\cos n\vartheta A^i_j + \sin n\vartheta \varepsilon^{ih} g_{hj})$$

Secondo la prima, più ampia definizione, si avrebbe invece

$$[9] \quad U^i_j = A(\rho, \vartheta) A^i_j + B(\rho, \vartheta) \varepsilon^{ih} g_{hj}$$

con $A(\rho, \vartheta)$, $B(\rho, \vartheta)$ funzioni univoche, continue e derivabili con derivate prime continue in tutto il campo di definizione.

L'univocità supposta di A e di B implica il loro carattere periodico, di periodo 2π , rispetto alla variabile ϑ . La continuità delle stesse

funzioni, unitamente a quelle delle loro derivate prime rispetto ϑ consente poi il loro sviluppo in serie di Fourier uniformemente convergente nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

Alla [9] può quindi darsi la forma:

$$[10] \quad U_{ij}^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f_n(\rho) \cos n\vartheta A_{ij}^i + \varphi_n(\rho) \sin n\vartheta \varepsilon^{ih} g_{hj}) .$$

Il confronto della [10] colla [8] mostra che la supposta analicità equivale ad imporre, per ogni n , la condizione

$$f_n(\rho) = \varphi_n(\rho) = c_n \rho^n .$$

Il campo di regolarità della serie [8] coincide con quello della serie che se ne deduce per derivazione formale, termine a termine, cioè della serie

$$[11] \quad (U_{ij}^i)' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n (a A_{ij}^i + b \varepsilon^{ih} g_{hj})^{n-1} .$$

L'uniforme convergenza di quest'ultima a una funzione continua in ogni dominio contenuto entro il campo di convergenza, consente di assumerla come funzione analitica « *derivata* » di U_{ij}^i . Un fatto notevole che risulta immediatamente di qui è che la definizione data di funzione analitica di variabile complessa, mentre dapprima è *imposta* dall'esigenza della definibilità della derivata prima, consente poi immediatamente, una volta istituita, la definizione e la costruzione di tutte le derivate successive, convergenti tutte ad altrettante funzioni continue di variabile complessa nell'interno di un medesimo campo di definizione.

Risulta di qui chiaramente che il fatto fondamentale della illimitata derivabilità delle funzioni analitiche di una variabile complessa è una immediata conseguenza del postulato di esistenza e di costruibilità di una derivata prima; laddove, nella trattazione consueta, esso ne risulta come conseguenza alquanto remota, pervenendosi ad esso attraverso la formula integrale di CAUCHY.

Tutto ciò, unitamente all'evitato uso dell'immaginario, può interpretarsi come una prova del carattere più strettamente legato alla natura intima delle cose della presente impostazione dei concetti.

5. - Il punto di vista qui adottato porta anche immediatamente alla dimostrazione e ad una interessante interpretazione del fondamentale teorema di CAUCHY per funzioni analitiche di variabile complessa sopra una V_2 qualunque.

Abbiamo infatti dimostrato in altra parte⁽¹⁾ che per un tensore generico sopra una qualunque varietà V_n vale un « *teorema della divergenza* » generalizzato, esprimentesi nella formula:

$$[12] \quad \int_S \nabla_j T^{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_r} dS = \int_\sigma T^{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_r} \chi_j d\sigma,$$

o, sotto forma sintetica, con ovvio simbolismo:

$$[12'] \quad \int_S \text{Div}_{[k]} T^{(p)} dS = \int_\sigma (T^{(p)}, \chi)_{[k]} d\sigma$$

dove S è una qualunque regione connessa della V_n assegnata, racchiusa dalla ipersuperficie di contorno σ , e χ il vettore unitario normale a σ , diretto verso l'esterno di S ; k è il «posto» rispetto cui sono fatti, la divergenza, nel primo membro, e il prodotto interno, nel secondo membro di [12'].

Applicando il teorema richiamato alla V_2 che ci occupa e al tensore complesso T^i_j su essa, e ricordando inoltre la [5'], otteniamo subito

$$[13] \quad \int_l T^i_j \chi_j dl = 0$$

dove l è ora un qualunque contorno completo racchiudente un campo connesso in V_2 , di regolarità per T^i_j . Ma se t^i è il vettore unitario tangente a l , diretto in modo che la coppia χ, t sia positiva, si ha:

$$\chi_j = -\varepsilon_{jk} t^k,$$

e la [13] diventa:

$$[13'] \quad \int_l T^i_j \varepsilon_{ik} t^k dl = 0,$$

(1) L. CASTOLDI, *Attorno a un « Teorema della divergenza » per tensori qualunque negli Spazi di Riemann.*

ossia, passando alle componenti controvarianti:

$$[14] \quad \left\{ \begin{array}{l} \int a \frac{1}{\sqrt{g}} dy + b dx = 0, \\ \int a \frac{1}{\sqrt{g}} dx - b dy = 0, \end{array} \right.$$

equazioni che generalizzano ovviamente quelle che si ottengono annullando separatamente la parte reale e il coefficiente dell'immaginario nel primo membro della classica identità di CAUCHY, $\int f(z) dz = 0$.

6. - L'impostazione precedente della teoria delle funzioni analitiche di una variabile complessa in V_2 offre immediata possibilità di estensione nel senso dell'istituzione del concetto di funzione analitica di due o più variabili complesse. Naturalmente, se $T_{1,j}^i, T_{2,j}^i, \dots, T_{m,j}^i$ sono m variabili complesse ed $U_{i,j}^i$ una $(m+1)$ -esima da concepirsi funzione di esse, e se tutte vogliamo dotate del carattere tensoriale che abbiamo attribuito a una qualunque variabile complessa, è necessario concepire sia le $T_{k,j}^i$ ($k=1, 2, \dots, m$), sia la $U_{i,j}^i$ come tensori complessi definiti in un comune campo di una medesima V_2 .

Dopo di che, la $U_{i,j}^i$, in base a considerazioni analoghe a quelle precedentemente svolte nel caso di una sola variabile $T_{1,j}^i$ andrà di nuovo definita come funzione analitica delle $T_{k,j}^i$ quando sussista per essa uno sviluppo della forma:

$$[15] \quad U_{i,j}^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum C_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{(n)} (T_{1,j}^i)^{\alpha_1} \dots (T_{m,j}^i)^{\alpha_m},$$

dove la somma interna va estesa a tutte le partizioni dell'intero n (con ripetizione e con possibili termini nulli) in numeri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ per cui sia $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$.

Argomentazioni analoghe a quelle svolte nel numero 3, provano ancora che la $U_{i,j}^i$ definita da [15] ha effettivamente il carattere di una variabile complessa in V_2 , illimitatamente derivabile, in un medesimo campo, rispetto a ciascuna delle $T_{k,j}^i$ ($k=1, 2, \dots, m$). In par-

ticolare, risultando U_{ij}^i a divergenza nulla, come ciascuna delle T_{jk}^i , vale per essa il richiamato teorema di CAUCHY.

Una osservazione essenziale va fatta peraltro a questo punto, e cioè che il concetto di funzione analitica di più variabili complesse, come sopra introdotto, riuscirebbe puramente illusorio allorchè le T_{jk}^i riuscissero tutte funzioni analitiche di una sola, diciamo T_{1j}^i , tra esse. Effettivamente, in tal caso, la U_{ij}^i si ridurrebbe ovviamente a una funzione analitica della sola T_{1j}^i .

Ma se le T_{jk}^i sono, non funzionalmente indipendenti, (chè, come precedentemente si è rilevato, due variabili complesse qualunque, in un medesimo campo di una V_2 , sono sempre concepibili l'una quale funzione dell'altra), ma *analiticamente* indipendenti, nel senso che non sia possibile attribuire ad alcuna delle T_{jk}^i un'espressione della forma [15] che consenta di concepirla come funzione analitica delle rimanenti T_{hj}^i ($h \neq k$), allora la U_{ij}^i non solo non è concepibile come funzione analitica di una sola delle T_{1j}^i , ma nemmeno di un gruppo qualunque di esse, in numero minore di m .

Un semplicissimo esempio fisico di funzione analitica di due variabili complesse è il seguente. Sia Σ una V_2 a due facce, su ciascuna delle quali sia definito un moto fluido laminare irrotazionale e a divergenza nulla. Siano u^i e v^i i due campi vettoriali rappresentativi delle velocità assolute nei due moti considerati. Si è visto sopra che, essendo

$$u = \text{grad } a, \quad \Delta_2 a = 0,$$

$$v = \text{grad } A, \quad \Delta_2 A = 0,$$

agli invarianti armonici a e A riescono associati, ciascuno a meno di un fattore moltiplicativo, altri due invarianti armonici b , B di guisa che

$$U_{ij}^i = a A_{ij}^i + b \varepsilon^{ih} g_{hj} \quad \text{e} \quad V_{ij}^i = A A_{ij}^i + B \varepsilon^{ih} g_{hj}$$

sono due variabili complesse definite su Σ .

La funzione analitica di U_{ij}^i e V_{ij}^i , definita ponendo

$$W_{ij}^i = V_{ij}^i - U_{ij}^i$$

rappresenta ovviamente, attraverso il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u} = \text{grad}(A - a)$, il moto laminare *relativo* del secondo fluido rispetto al primo.

Non rientra invece come possibile nel quadro concettuale qui presentato la definizione di funzione analitica di più variabili complesse definite separatamente su diverse V_2 , essendo a priori impossibile legare invariantivamente tensori di una varietà a tensori di un'altra affatto indipendente dalla prima.