

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

A C T A

ANNVS X
VOLVMEN X



EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MDCCCXXXVI

INDEX

	FOL.
1. F. IPPOLITO, <i>Sulla geologia delle Alpi Apuane</i> (cum 1 tab.)	1-20
2. E. CARRUCCIO, <i>Considerazioni sulla compatibilità di un sistema di postulati e sulla dimostrabilità delle formule matematiche</i>	21-42
3. G. APRILE, <i>Integrali di Stieltjes, e valutazione planimetrica di espressioni simboliche nel calcolo operatorio</i> (cum 2 fig.)	43-46
4. G. GOLA, <i>I materiali igroscopici delle piante e lo sviluppo delle muffe</i> (cum 3 fig.)	47-54
5. A. ROSSI FANELLI, <i>Sintesi biologica della treonina</i> (cum 3 fig.)	55-74
6. M. CIMINO, <i>Sopra un'estensione alle eclissi parziali di Sole del metodo di Julius per la determinazione dell'oscuramento al bordo solare</i> (cum 2 fig.)	75-94
7. T. FRANZINI e M. GALLI, <i>Sull'effetto di Einstein</i>	95-98
8. E. PISTOLESI, <i>Sulla forma di avvolgimento e di svolgimento di una fune dotata di rigidezza anelastica</i> (cum 2 fig.)	99-106
9. F. M. GEROLA, <i>Sull'origine degli elementi legnosi nel Caule</i>	107-110
10. V. LEONE, <i>Considerazioni su talune disposizioni architettoniche e strutturali dei vasi dello stomaco</i>	111-116
11. E. PISTOLESI, <i>Sull'andamento della tensione in una cinghia di trasmissione tenuto conto della dipendenza del coefficiente d'attrito dalla velocità</i> (cum 1 fig.)	117-126
12. G. SCORZA DRAGONI, <i>Sull'esistenza di soluzioni per un sistema di n equazioni in n incognite</i>	127-134
13. G. TORALDO DI FRANCA, <i>Sulle superficie illuminate uniformemente da un'onda cilindrica</i>	135-142
14. P. CALOI, <i>Sulle onde di Rayleigh in un mezzo elastico, fermo-viscoso indefinito</i> (cum 2 fig.)	143-154
15. G. DAL PIAZ, <i>Avanzi morenici prewürmiani allo sbocco della valle del Brenta presso Bassano</i> (cum 1 fig.)	155-166
16. P. TEOFILATO, <i>Sulla determinazione della verticale durante una evoluzione in volo cieco</i>	167-182

17. F. LERKINEN e E. MÄKILÄ, <i>Polini regolari e il teorema del gruppo risolubile nel Gruppo dell'Esponente</i> (parte I, tab. 1)	181-183
18. F. LEE, <i>Calcolo delle strutture compatte di algebre su algebre di commutazione e di algebre su algebre infinite non deformate</i> (parte I, fig. 1, tab. 1)	191-210
19. E. LEBESGUE, <i>Contributo alla conoscenza delle forme cubiche positive del genere di Nagata</i> (parte I, fig. 1)	217-222
20. P. LEMMONS, <i>Sull'isomorfismo delle algebre associative degli interi</i>	223-226
21. P. LINDQVIST e P. SIKKALA, <i>Integrazione dell'equazione delle curve sferiche curvatura e funzione del calcolo geometrico</i>	228-244
22. E. LINDQVIST, <i>Il calcolo delle algebre associative</i> (parte I, tab. 1)	245-256
23. G. LINDQVIST, <i>Un nuovo tipo di rappresentazione prospettica</i> (parte I, tab. 1)	257-272
24. G. F. LINDQVIST, <i>Algebrae dei numeri decimali</i> (parte I, fig. 1)	273-284
25. F. LINDQVIST, <i>Contributo alla conoscenza del Gruppo (lineare, bilineare) l'arbitrario del Gruppo</i> (parte I, fig. 1)	285-296
26. F. LINDQVIST, <i>Sul calcolo di un polinomio quadratico in un campo</i> (parte I, fig. 1)	297-308
27. A. LINDQVIST, <i>Algebra di un addizione del polinomio delle algebre delle forme degli interi</i>	309-320
28. G. LINDQVIST, <i>A proposito di un teorema di F. Lindqvist</i>	321-326
29. G. LINDQVIST, <i>Sul calcolo quadratico (non lineare) del Gruppo</i> (parte I, fig. 1)	327-334
30. G. LINDQVIST, <i>Contributo alla conoscenza del Gruppo (lineare, bilineare) l'arbitrario del Gruppo</i> (parte I, fig. 1)	335-346
31. G. LINDQVIST, <i>Contributo alla conoscenza del Gruppo (lineare, bilineare) l'arbitrario del Gruppo</i> (parte I, fig. 1)	347-358
32. G. LINDQVIST, <i>Sul calcolo quadratico (non lineare) del Gruppo</i> (parte I, fig. 1)	359-370

SULLA GEOLOGIA DELLE ALPI APUANE^(*)

(Con una tavola)

FELICE IPPOLITO

SVMMARIVM. — Exponit Auctor ut, ex geologicis investigationibus in Alpihus apuanis peractis, duae laciniae (tuscanica et ligustica) tegimenti inventae sint supra autoctonum; qua de re autoctoni et laciniarum tectonicam perhibet, et orogeneseos rationes.

PREMESSA

Riassumo qui per sommi capi taluni risultati scientifici degli studi geologici eseguiti, sotto la direzione del Prof. Dr. ALFREDO RITTMANN, dal Centro Ricerche Geominerarie dell'I. R. I. nelle Alpi Apuane durante gli anni 1942 e 1943 ⁽¹⁾. Come già per la contigua zona del M. Pisano ⁽²⁾ lo studio ha dimostrato che tutta la pila dei sedimenti, a prescindere da quelli più recenti dal Pontico ad oggi, deve scindersi in tre serie e precisamente, dall'alto in basso:

3. *Serie ligurica*, dal Malm all'Eocene Inferiore;
2. *Serie toscana*, dal Trias Medio-Superiore ⁽³⁾ all'Eocene;
1. *Serie autoctona e parautoctona*, dal Permo-Carbonico all'Eocene.

(*) Memoria presentata dall'Accademico Pontificio Giorgio Dal Piaz il 4 ottobre 1945.

⁽¹⁾ Lo studio completo vedrà a suo tempo la luce, assieme a quello del M. Pisano, in una monografia che ha in preparazione il Prof. A. RITTMANN.

⁽²⁾ Per cui vedi alla Bibliografia ai numeri [4], [8], [9], [11].

⁽³⁾ Eventualmente con lembi di Paleozoico alla base.

STRATIGRAFIA

La serie autoctona comprende tutti i terreni, dal Paleozoico fino all'Eocene Inferiore, riuniti dallo ZACCAGNA [24] sotto le denominazioni: «scisti inferiori», grezzoni, marmi e «scisti superiori». La successione di questi terreni è in molti punti del tutto normale dal Paleozoico fino al Lias incluso (calcari stratificati chiari con selce). I terreni più recenti si trovano racchiusi nei cosiddetti «scisti superiori» di ZACCAGNA, i quali rappresentano una zona di miscuglio tettonico e quindi non mostrano in nessuna località la loro successione normale indisturbata. Inoltre tutta la serie autoctona è stata sottoposta ad un dinamo-metamorfismo abbastanza marcato. Pertanto i calcari puri sono trasformati in marmi, i calcari argillosi in cipolliui, i calcari marnosi in calcescisti, mentre le arenarie si presentano sotto forma di pseudomacigno e le rocce pelitiche come filladi. Soltanto i calcari a selce del Lias Medio e Superiore, i diaspri del Giura Superiore e qualche lembo di calcare nummulitico hanno conservato il loro carattere litologico quasi inalterato.

La serie toscana comprende la medesima serie litologica dell'autoctono, non metamorfosata. Solo però in qualche punto questa serie si presenta completa con tutta la pila dei sedimenti in sovrapposizione normale. Per lo più esistono in essa delle lacune stratigrafiche dovute a dislocazioni tettoniche, di cui si dirà più avanti. Nelle tabelle delle pagine seguenti è istituito un confronto tra la serie toscana e l'autoctono.

La serie ligure comprende soltanto terreni del Giurassico Superiore, del Cretacico e forse anche dell'Eocene Inferiore.

Confrontando questi terreni con quelli delle due serie sottostanti, come è fatto nella tabella di pag. 6, si può constatare che mentre fra l'autoctono e la serie toscana non esiste alcuna differenza di *facies* nel Mesozoico Superiore, ciò non è tra i terreni della serie ligure e quelli delle altre due serie.

Confronto tra la Falda toscana e l'autoctono.

Età	Falda toscana	Autoctono
Priaboniano	Macigno: arenarie con rare lenti conglomeratiche. Specialmente nella parte superiore con intercalazioni di argille marnose o sabbiose. Rari nummuliti dell'Eocene medio e inferiore.	Pseudomacigno: arenarie indurite con sericite, talvolta quarzitiche, e filladi argillose.
Luteziano	Calcarei grigi e calcari screziati con nummuliti dell'Eocene inferiore in strati; verso il muro con intercalazioni di argille marnose.	Calcarei grigi e screziati con nummuliti dell'Eocene Inferiore intercalate nelle filladi.
Senoniano, Gaultiano ± Neocomiano	Scisti argilloso-marnosi polioromi; nella parte superiore con intercalazioni di singoli strati calcarei.	Filladi poliorome.
Neocomiano + Malm Superiore.	Calcarei chiari stratificati con selce chiara. Rari esemplari di <i>Calpionella alpina</i> Lorenz. del Cretacico Inferiore o del Malm Superiore. Sono eteropici con la parte inferiore degli scisti polioromi.	Calcescisti.
Malm (± sup.)	Diaspri e ftaniti variegati, per lo più rossi, localmente con strati di calcari silicei rosso-marnosi o violacei. Ove mancano i calcari chiari le ftaniti passano al tetto gradualmente negli scisti polioromi. Aptici e radiolarie del Malm.	Diaspri rossi e ftaniti con radiolarie del Malm.

Segue *Confronto tra la Falda toscana e l'autoctono.*

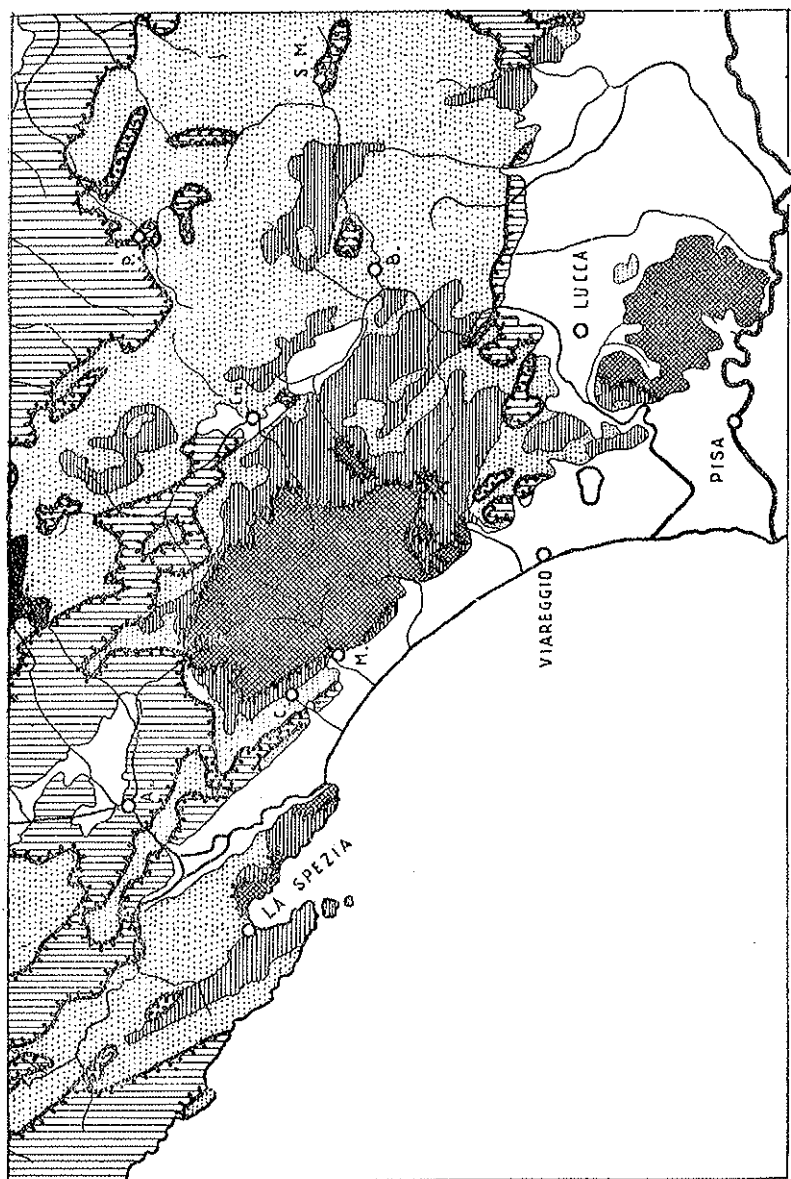
Età	Falda toscana	Autoctono
Dogger Superiore	Calcere grigio scuro stratificato con selce scura, eteropico con calcare picchiettato con crinodi.	Cipollini.
Dogger Inferiore	Scisti marnosi con posidonomie del Dogger Inferiore e Lias Superiore.	Filladi.
Toarciano	Verso il muro alternanti con calcari grigi ben stratificati (straterelli) con selce per lo più chiara.	
Domeriano, Pliensbachiano	Calcari grigi ben stratificati con selce chiara e con rari ammoniti.	Calcari grigi stratificati con selce e con ammoniti del Lias.
Sinemuriano Hettangiano Retico Superiore Retico Inferiore Norico	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="flex: 1;"> <p>Calcari ± marnosi rossi, rossicci o giallastri con ammoniti.</p> <p>Calcari stratiformi grigio cupi con ammoniti e p. p. calcari dolomitici.</p> <p>Calcari dolomitici chiari con lenti di portoro.</p> <p>Calcari scuri e scisti marnosi con <i>Avicula contorta</i>.</p> <p>Calcari grigi più o meno dolomitici.</p> </div> <div style="flex: 0.5; font-size: 2em; margin: 0 10px;">}</div> <div style="flex: 1;"> <p>eteropico: calcare bianco coralligeno (calcareceroidi)</p> </div> </div>	<p>Marni con fossili del Lias.</p> <p>Marni dolomitici.</p> <p>Marni.</p> <p>Marni con fossili del Trias Super.</p>

Segue *Confronto tra la Falda toscana e l'autoctono.*

Età	Falda toscana	Autoctono
Carnico	Calcari cavernosi (anidrite).	Localmente breccie poligeniche.
Ladinico	Calcari grigi dolomitici.	Calcari grigi dolomitici, con conglomerato basale di trasgressione e con <i>Encrinus liliiformis</i> del Ladinico.
T R A S G R E S S I O N E		
Anisico e Werfeniano	— — —	Arenose ed arenarie con lenti di calcari marnosi, peliti ed accumuli carboniosi metamorfosati.
Thuringiano, Xenoniano	— — —	Porfiroidi e tufi.
Autuniano e Stefaniano	Lembi di anageniti, quarziti e filladi.	Anageniti, quarziti e filladi con rari scisti grafici.

La differenza di *facies* si basa anzitutto sulla presenza di graniti e di rocce ofiolitiche nella serie ligure, la quale è stata perciò anche denominata « formazione ofiolitifera ». Quanto ai sedimenti la differenza di *facies* mostra a chiari segni che si tratta di due distinti spazi di sedimentazione. In sostanza il Cretacico della serie toscana è simile a quello del Veneto, mentre il Cretacico della serie ligure ne è ben diverso.

Età	Autoctono o serie toscana	Serie ligure
Luteziano	Calcari grigi e calcari screziati con nummuliti, con intercalazioni di scisti marnosi policromi.	Calcari marnosi grigio-scuri con intercalazioni di letti argillosi.
Senoniano	Scisti argillo-marnosi policromi.	Scisti argillosi e variegati talvolta marnosi o arenacei con intercalazioni di calcare screziato grigio e arenaria argillosa con inocerami.
Neocomiano	Calcari chiari con selce (calcare maiolica) con <i>Calpionella alpina</i> Lorenz.	Singoli banchi di calcare marnoso con <i>Calpionella alpina</i> Lorenz.
Malm	Diaspri e ftaniti variegati; strati di calcari silicei rosso-marroni o violacei, fino a calcari grigio scuri, stratificati, con selce scura (del Dogger).	Scisti argillosi e ftaniti colorati; strati sottili di diaspri rossi con radiolarie del Malm, associati a rocce ofiolitiche e masse granitiche dislocate.



Schizzo geologico delle Alpi Apuane e regioni limitrofe.

- | | | | |
|------------------------------|---|----------------------------|----------------------------------|
| <i>Linee verticali</i> . . . | Terroni della faldia ligure. | <i>Nero</i> | Gessi diapiri. |
| <i>Punteggiato</i> . . . | Arenaria macigno della faldia toscana. | <i>Bianco</i> | Terziario recente e Quaternario. |
| <i>Linee orizzontali</i> . . | Terroni mesozoici della faldia toscana. | <i>Linee dentate</i> . . . | Contatti tettonici. |
| <i>Quadrettato</i> . . . | Autoctono | | |

TETTONICA

Per comprendere la tettonica delle Alpi Apuane è stato necessario estendere il nostro sguardo anche alle zone limitrofe, dal golfo della Spezia a nord fino alla valle dell'Arno a sud e fino all'Appennino ad est. È infatti impossibile rendersi perfettamente conto della struttura geologica di una zona così tormentata se non inquadrandola nella geologia di tutta la regione. Questo assunto è stato in particolare facilitato dallo studio di dettaglio da noi già eseguito al M. Pisano, nonché da vari sopralluoghi eseguiti in altre zone limitrofe al massiccio apuano, come ad es. nei M. Oltre Serchio, in Val di Lima, in Garfagnana, ecc., e dallo studio della ricca bibliografia di geologia regionale.

L'autoctono compare, come ben si vede nello schizzo tettonico della figura, in due finestre di erosioni grandi ed in varie altre piccole. Le due grandi finestre sono costituite dalla zona centrale delle Alpi Apuane, di cui qui particolarmente di interessiamo, e dalla gran parte del M. Pisano. L'una ha forma grossolanamente ellittica con l'asse maggiore orientata da nord-ovest a sud-est e raggiunge una lunghezza di circa 25 km ed una larghezza di 16; la seconda ha anche essa una forma grossolanamente ellittica, incisa bensì profondamente dalla valle del Guappero, con l'asse maggiore similmente orientato e raggiunge, nella parte esposta, una lunghezza di circa 18 km ed una larghezza di 10. In ambedue queste grandi finestre tettoniche, di cui l'orlo è in parte, specie nella seconda, nascosto da sedimenti quaternari, si rinviene tutta la serie dell'autoctono, fino ai terreni più profondi finora conosciuti. Altre finestre più piccole si rinvencono andando da nord-ovest a sud-est (vedi figura).

La falda toscana affiora per grandi estensioni tutto intorno all'elissoide centrale delle Apuane ed in vaste zone dell'Appennino toscano, come ad es. tra La Spezia e Varese Ligure o nei M. Oltre Serchio. Un affioramento di questa falda forma l'estremità occidentale del M. Pisano. In genere i terreni affioranti di questa falda sono rappresentati dal macigno; altri terreni mesozoici di essa sono però esposti in varie località.

Dall'esistenza di questi affioramenti e dalla presenza del macigno in un ambito ancora maggiore si deduce che l'estensione della falda toscana è almeno di 60 km in direzione sud-ovest nord-est e di oltre 120 km in direzione nord-ovest sud-est.

La falda ligurica è molto erosa, specie ad est delle Apuane, ove si rinviene soltanto sotto forma di lembi di ricoprimento (*Klippen*). Verso nord-ovest, nord e nord-est essa copre però vastissime zone il cui studio esulava dal nostro compito. Ricordiamo soltanto che essa contiene presso Camporgiano una potente massa di « ofioliti » ⁽¹⁾ con graniti alloctoni e milonitizzati, e che presso Sassalbo ed in Val di Serchio si rinvencono affioramenti, probabilmente diapirici, di gessi e carniole.

LA TETTONICA DELL'AUTOCTONO

Nella vasta finestra tettonica delle Apuane, già un'osservazione sommaria mostra che lo stile tettonico varia fondamentalmente dall'una all'altra zona. La parte centrale dell'elissoide apuana è caratterizzata da predominanza di pieghe talvolta ampie, tal'altra più strette e fino a fittissime e acuminata, la cui vergenza è anche essa fortemente variabile. In generale i materiali scistosi del Paleozoico formano pieghettature strette e acute. In talune zone invece, come ad esempio in quella del M. Altissimo, l'erosione ha messo a nudo una serie di sinclinali e anticlinali: le prime più larghe, risultano costituite da un nocciolo di marmi circondato da grezzoni; le seconde, molto più strette, e nelle quali sono forse anche degli scorrimenti, dagli scisti e dalle filladi del Paleozoico.

(1) Il complesso di queste ofioliti consta ivi di una serie di potenti colate, con banchi di scorie e tufi, di basalto ora alterato in diabasi e spiliti. Nelle colate si osserva sovente la forma di contrazione sferica o ellissoidale, detta dagli americani « pillow », che caratterizza le lave basaltiche sottomarine o in genere subacquee. Anche i tufi, intercalati tra le colate, hanno caratteristiche spiccatamente subacquee. L'associazione di queste vulcaniti con galestri e specialmente diaspri, nonché la loro natura e alterazione, dimostrano inequivocabilmente che si tratta di prodotti tipici di vulcanismo geosinclinale.

In effetti anche in questa zona, ove, come abbiamo ora detto, dominano le pieghe, sono frequenti faglie e scorrimenti e ciò si è visto specialmente paragonando talune sezioni disegnate dallo ZACCAGNA con altre costruite durante il nostro studio. Infatti nella moderna geologia strutturale, come opportunamente ha illustrato G. B. DAL PIAZ in una sua prolusione ⁽¹⁾, si deve abbandonare definitivamente la comoda consuetudine di studiare la struttura delle catene montuose secondo una o al più due dimensioni dello spazio: gli elementi tettonici si devono osservare in volume, mediante intere serie di sezioni, e non già soltanto « secondo qualche insufficiente e spesso artificiosa sezione trasversale o longitudinale » ⁽²⁾.

Ben diversamente si presenta la tettonica in altri punti dell'elissoide apuana. Le pieghe tendono quivi a dislocarsi, accavallarsi ed a sparire del tutto in una zona di scaglie, come si può agevolmente osservare al M. Brugiana, nella zona della foce di Mosceta e nella regione di Farnocchia.

In sostanza, senza scendere ad ulteriori esempi, possiamo affermare che l'autoctono dell'elissoide apuana presenta due stili tettonici nettamente distinti: il primo tipo con prevalenza di pieghe, il secondo con prevalenza di scaglie tettoniche. Il primo interessa la zona centrale dell'elissoide apuana (zona dell'*autoctono*); il secondo le zone periferiche, ma è molto più sviluppato nella parte occidentale e sud-occidentale della finestra delle Apuane ed anche a sud, come si può vedere in altre finestre minori, ad esempio in quelle di Forno Volasco e di S. Anna, mentre all'orlo orientale è assai ridotto o manca affatto. È questa la cosiddetta « zona di scaglie » (*Schuppenzone*) di Massa, studiata da STAUB [13] e recentemente dallo SCHMEDDING [13], e che vari autori indicano opportunamente col nome di *paraautoctono* [17], [18], [22].

Nella zona dell'autoctono lo studio eseguito ha permesso di accertare i seguenti dati di fatto:

a) Le pieghe hanno un andamento ondulato che nel complesso va da nord a sud e da nord nord-ovest a sud sud-est; esse sono molto variabili nella loro ampiezza;

⁽¹⁾ DAL PIAZ G. B., *Metodi e fini della Geologia moderna*. «Atti Acc. Scient. Veneto-Trentino-Istrian», XXV, Padova, 1935.

⁽²⁾ Si veda ad esempio [12].

b) la vergenza è prevalentemente verso est nella porzione nord-occidentale; prevalentemente verso ovest nella porzione sud-orientale; può variare in una medesima anticlinale andando dal nord al sud;

c) le pieghe sono più ampie verso i lati della zona dell'autoc-tono più strette verso il centro;

d) gli assi delle anticlinali hanno forti ondulazioni, ma presentano la loro culminazione verso sud (val di Vezza);

e) benchè la zona sia prevalentemente a pieghe, si rinven-gono varie faglie, anche a rigetto orizzontale.

Alcuni di tali fatti trovano, a nostro parere, la loro logica spiegazione nelle seguenti considerazioni di petrografia strutturale. Alla formidabile compressione, prevalentemente in direzione dei paralleli, cui furono sottoposti quei terreni che oggi costituiscono l'ellissoide apuana, i vari materiali hanno reagito in modo diverso a seconda delle loro caratteristiche meccaniche.

I materiali del Paleozoico, in predominanza scistosi, nei quali cioè più facilmente potevano generarsi scorrimenti secondo una direzione, hanno dato luogo a piegature fitte e acute, talora a zig-zag, e sovente a piccoli scorrimenti.

All'incontro i calcari, oggi marmorizzati, sotto l'azione della compressione sono diventati plastici, in virtù dei così detti « movimenti particellari » ⁽¹⁾ determinatisi nei singoli individui di calcite, che assumono una geminazione lamellare polisintetica, o tra individui e individui. Per tale fatto un calcare micro e criptocristallino può, con il sommarsi di tutte queste translazioni operantesi nei singoli granuli, divenire addirittura plastico, può scorrere secondo le direzioni di minor pressione, può infine accumularsi in talune zone ed essere affatto spinto via, quasi « spremuto », da altre. Non è il caso di descrivere qui a lungo questo fenomeno, del resto notissimo, chè parlano come prove di esso la tessitura tipicamente di « tettonite » dei marmi apuani, nonchè la tettonica locale. Basta osservare con attenzione le superficie pulimentate dei marmi apuani, nelle loro diverse varietà - il che del resto è enormemente facilitato dall'impiego estesissimo che ha questo materiale ovunque in Italia - per avere sott'occhio un quadro completo di questa *tettonica fluidale*: zone in cui il materiale ha l'aspetto tipico

(¹) Vedi DAL PIAZ G., *loc. cit.*, pag. 4.

di una massa plastica in movimento, ove letti e vene più scure racchiudono chiazze più chiare, orientate secondo la direzione del movimento, si alternano a zone d'ombra della pressione, ove le chiazze più chiare, meno disturbate, si accumulano in un assieme brecciato, ma poco « stirato », e fanno sovente passaggio ad altre zone in cui più forte è stato lo scorrimento e la massa tutta del marmo appare torturata da vene e venuzze più chiare e più scure che si accavallano, si piegano e si ripiegano l'une sull'altre, accartocciandosi in mille guise e dando alla pietra quella grande varietà di aspetto che la rende tanto accetta nei più svariati usi architettonici ⁽¹⁾. Rare invece sono le plaghe lenticolari ove il marmo presenta i veri caratteri statuari di uniforme e fine grana, e sono quelle forse ove più sensibile fu l'azione della pressione idrostatica e della temperatura e lieve all'incontro l'effetto dello *stress*.

Tra gli scisti paleozoici ed i marmi, la più rigida massa dei calcari dolomitici (grezzoni) ha in parte seguito il movimento di questi ultimi formando talora pieghe, ma più di sovente si è fortemente frantumata. Alle volte nel seguire, rompendosi bensì, il movimento plastico dei marmi, i grezzoni hanno subito dei fenomeni di scorrimento, relativamente alla massa di scisti paleozoici, dando luogo a brecciatore ed a vari fenomeni di frizione. In alcuni luoghi si rinvencono infatti al contatto tra marmi e grezzoni delle breccie, costituite da elementi di grezzoni in un cemento calcitico marmoreo, che dimostrano appunto il diverso comportamento dell'uno e dell'altro materiale di fronte alle sollecitazioni tettoniche.

Nel loro complesso l'autoctono ed il parautoctono formano una specie di « Horst » limitato lungo il diametro minore - est ovest - da due serie di faglie a gradinate, lungo il diametro maggiore - nord sud - invece, da flessure e solo da poche faglie.

⁽¹⁾ Analoghi fenomeni di « pieghe di taglio » (*Scherfalten*) furono osservati nel marmo di Lasa in Val Venosta da C. ANDREATTA (« Atti Acc. Veneto-Trentino-Istria », 1935).

LA TETTONICA DELLE FALDE

La falda toscanica presenta nel suo assieme una singolarità; mentre la sua parte inferiore, costituita essenzialmente da terreni meso-triasici⁽¹⁾, forma una coltre continua, i terreni più recenti sono rappresentati solo localmente. Soltanto il macigno forma di nuovo una copertura ininterrotta, sebbene di spessore variabile e nel complesso tendente ad aumentare verso oriente. Un'analisi accurata mostra che le lacune sono distribuite irregolarmente, ma in genere si rinvencono in grande prevalenza nel Giurassico e nel Cretacico, raramente nel Trias e mai nell'Eocene Inferiore (macigno).

Tali lacune non è stato possibile spiegare altrimenti che ammettendo l'esistenza di movimenti tettonici, avvenuti durante il movimento delle falde stesse o in epoche successive, che si sarebbero verificati in vari livelli della successione stratigrafica. Questi movimenti rientrano in quelli detti di *avanscorrimiento* (*Vorschiebungen*), i quali sono appunto caratterizzati dal fatto che, ad opera di essi, scompaiono taluni membri della successione stratigrafica e che la superficie di scorrimento passa con grande facilità dall'uno all'altro livello, specie in dipendenza della natura dei materiali. Tracce molto ben visibili di questo avanscorrimiento si rinvencono in vari punti, specie in Garfagnana (in località l'Eremita) e al M. Pisano (M. Maggiore).

Per quanto concerne la tettonica della falda ligure, che non è stata oggetto di particolare attenzione nel nostro studio, nulla resta da aggiungere a quanto ha sintetizzato in proposito G. B. DAL PIAZ [6], [7]. Dalle nostre sporadiche osservazioni resta peraltro confermato il carattere plastico che i materiali di questa falda avevano durante il loro movimento; il che conferma altresì la preponderante influenza che nel movimento stesso ebbe la gravità. Per effetto di questa i terreni ligurici si sono come sparpagliati al di sopra della falda toscanica, sconvolgendo e laminando talvolta, durante il loro moto, i nuclei più resistenti in essi contenuti, quali lenti calcaree, rocce ofiolitiche, graniti.

(1) Non è il caso qui di considerare i lembi di Paleozoico che eventualmente furono trascinati a letto della falda per cui vedi più innanzi a pag. 14.

ANALISI MECCANICA DELLA TETTONICA

Una importante deduzione, scaturita dal nostro studio, è quella che concerne il diverso accorciamento che hanno subito le varie unità tettoniche.

Mentre infatti l'autoctono si presenta intensamente corrugato, con un accorciamento che può al massimo stimarsi da $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$ della estensione originaria, la falda toscana e la ligure appaiono poco corrugate, presentando soltanto lievi ondulazioni d'assieme o anche piegature ed accorciamenti di carattere locale.

L'autoctono presenta una vergenza delle pieghe secondo due diverse direzioni e precisamente verso est nella parte nord-occidentale e verso ovest nella parte sud-orientale. Un tale fenomeno, unitamente al forte raccorciamento, è un chiaro indice del fatto che la regione è stata sottoposta ad una compressione bilaterale secondo la direzione est-ovest. Secondo le nostre vedute sul meccanismo della orogenesi⁽¹⁾, la geosinclinale apuana sarebbe stata oggetto di un fenomeno di « inghiottimento ». Il che spiega agevolmente non solo la compressione bilaterale ed il forte raccorciamento, ma altresì — come vedremo subito — il soprascorrimento della falda toscana.

I fenomeni connessi con la formazione della falda toscana possono infatti meccanicamente spiegarsi nel modo seguente. Durante la fase di corrugamento della geosinclinale (« inghiottimento »), si genera in profondità, sui due lati dell'orogene, un afflusso plastico di Sial verso la zona di « inghiottimento ». Questo movimento plastico del Sial genera, a sua volta, per effetto di trascinamento sulle masse degli strati sovrastanti più rigidi, delle spinte dirette verso la zona del corrugamento.

Queste spinte continue provocano, ad un certo momento, su di una superficie di minor resistenza allo scorrimento, ove cioè è presente un qualsiasi materiale che possa fungere da « lubrificante tettonico »,

(¹) Si veda in proposito: RITTMANN A., *Vulcani, attività e genesi*, « E. P. S. A. », Napoli, 1944 (Appendice, pag. 277); ID., *Le temperature nella crosta terrestre e l'orogenesi*, « Rend. R. Acc. Sc. Fis. Mat. », serie 4, XIII, Napoli, 1945; IPPOLITO F., *Intorno ad una nuova teoria sull'origine del Sial e sull'orogenesi*, « Rend. R. Acc. Sc. Fis. Mat. », serie 4, XIII, Napoli, 1945.

un distacco, in modo che tutto un intero gruppo di strati viene lentamente a sormontarne un altro ed a scorrervi sopra.

È questo il caso della falda toscana: il distacco è avvenuto nella formazione anidritica del Trias Superiore [5], che rinveniamo oggi alla base della falda, e talvolta, là dove mancava l'anidrite ed i calcari del Trias erano saldamente uniti ai sottostanti scisti paleozoici, proprio in questi ultimi terreni. Ad un tal fenomeno deve attribuirsi il lembo di Paleozoico di Rupecava al M. Pisano [8], [9]. Alle Apuane non abbiamo in alcun punto riconosciuto, tranne forse nella zona di Ponte Stazzemese, un simile fenomeno, che d'altro canto deve ammettersi, sia sulla base di quanto affermano TILLMANN [21] e TEICHMÜLLER [18], sia perchè è difficilmente individuabile a causa della grande rassomiglianza tra gli scisti paleozoici a quelli cretaci, sovente confusi dallo ZACCAGNA nella zona degli « scisti superiori ».

Se per avventura la superficie di scorrimento trova ad un certo punto una maggiore resistenza all'avanzamento, le spinte, perdurando nel tempo, possono provocare, nel corpo stesso della massa in movimento, ulteriori distacchi, là dove sono presenti materiali atti a fungere da « lubrificanti tettonici »; talchè una parte della falda scorre sull'altra ed avanza più rapidamente, donde il nome di *avanscorrimenti* dato a questi movimenti. Caratteristica degli *avanscorrimenti* è che sovente la superficie di distacco attraversa obliquamente, secondo la minor « competenza » dei terreni, gli strati; come anche il fatto – visibilissimo alle Apuane – che sono spesso soppressi localmente, in questi movimenti, taluni termini della serie stratigrafica.

Alle Apuane e al M. Pisano è facilmente riconoscibile, alla base del calcare maiolica, l'avanscorrimento iniziatosi nella formazione diaspina del Malm che fungeva da lubrificante tettonico, ma che poi ha provocato dei visibilissimi fenomeni di milonitizzazione alla base del calcare maiolica stesso, come abbiamo potuto constatare in Garfagnana e al M. Pisano (¹).

Il nostro studio ha permesso agevolmente di riconoscere anche che, dopo il corrugamento e lo scorrimento delle falde, la regione Apuana

(¹) Fenomeno analogo è quello descritto da R. HELBLING per le falde di Glarona in Svizzera (cfr. « Beitr. geol. Karte Schweiz. », N. F., Liefg. 76, 1938, Tafel 21).

ha subito un nuovo importante movimento, di sollevamento questa volta, che ha provocato talune grandi flessure, nella zona di Serravezza, nonchè la zona a faglie dritte visibile ad esempio al M. Brugiana presso Massa.

OSSERVAZIONI SUL METAMORFISMO

Contrariamente all'opinione espressa da vari autori [15], [17], [18], i quali ritenevano che il metamorfismo dell'autoctono giungesse fino alla mesozona, il nostro studio ha permesso di stabilire i due seguenti punti:

a) che il metamorfismo dell'autoctono, con formazione di marmi e filladi, è un metamorfismo epizonale, strettamente connesso col corrugamento: *dinamometamorfismo*;

b) che il metamorfismo più spinto è un fenomeno affatto locale e localizzato, dovuto all'azione di volatili telemagmatici, ed è - almeno in gran parte - legato alla nota mineralizzazione di solfuri metallici (Pb, Hg, Fe, Cu) della regione.

Tale mineralizzazione si rinviene di frequente nell'autoctono specie lungo linee di fratture e poi sovente alla base della falda toscana o nella zona delle scaglie; mai, per quanto ci è stato dato di osservare, nella falda toscana.

SUCCESSIONE DEI FENOMENI

Purtroppo i dati cronologici che abbiamo a nostra disposizione per la ricostruzione della geologia delle Apuane, non sono molto abbondanti.

La stratigrafia mostra infatti:

a) che l'autoctono contiene terreni dal Permo-carbonico all'Eocene Inferiore (macigno);

b) che la falda toscana contiene, a prescindere dai lembi di Paleozoico alla base, terreni dal Ladinico o Carnico all'Eocene Inferiore (macigno);

c) che la falda ligure contiene terreni dal Giura all'Eocene.

La tettonica, dal suo canto, lascia dedurre:

d) che, dopo la lunga fase di geosinclinale in cui si depositarono tutti i terreni dell'autoctono, il corrugamento (« fase di inghiot-

timento») cominciò dopo gli inizi della deposizione del macigno (Eocene Inferiore), in quanto questa formazione è piegata assieme ai terreni sottostanti;

e) che il movimento che portò alla formazione della falda toscana è almeno coevo al macigno (Eocene Inferiore), in quanto questa formazione si rinviene sotto e sopra la falda toscana e mostra per chiari segni (grandi ammassamenti in talune zone, strutture fluidali, ecc.) di essere stato ancora alquanto plastico a quell'epoca;

f) che il movimento della falda ligure è certamente posteriore al macigno (che non si rinviene mai sopra la falda ligure) e nella nostra zona è precedente all'Oligocene che, come potè osservare BEHRMANN [2] lungo il torrente Rassina nel Casentino, è trasgressivo sulla falda ⁽¹⁾;

g) che il sollevamento, con conseguente formazione di faglie diritte e flessure, è avvenuto all'incirca nel Miocene, come si deduce da formazioni litoranee di lignite di questa età a nord di Canore;

h) che la mineralizzazione è posteriore, o anche coeva agli inizi, col corrugamento e perdurò certamente fin dopo il sollevamento (faglie diritte mineralizzate del M. Brugiana).

È sembrato pertanto lecito schematizzare nel seguente specchio la successione dei fenomeni:

FASE GEOSINGLINALE dal Trias Superiore all'Eocene Inferiore	{ Sedimentazione dei terreni dell'autocotono e della serie toscana, nello stesso spazio di sedimentazione; della serie ligure, con vivace vulcanismo di geosinclinale di magmi basici, in altro spazio di sedimentazione.
FASE DI INGHIOTTIMENTO Eocene medio e Superiore; Oligocene Inferiore (?)	{ a) Corrugamento dell'autocotono; b) Scorrimento della falda toscana (con formazione di scaglie e avanscorrimenti); c) Scivolamento principale della falda li- gurica.
FASE DI SOLLEVAMENTO dall'Oligocene ad oggi	{ Sollevamento ad « Horst » della zona cen- trale delle Alpi Apuane, con formazione di faglie, flessure, ecc. che facilitarono la mi- neralizzazione.

(¹) BEHRMANN ([2] pag. 75) indica la trasgressività dell'Oligocene sui terreni della falda ligure, ma non precisa il livello di questo Oligocene.

Al termine di questa breve illustrazione compio il grato dovere di ringraziare il Commissario dell'I. R. I., Dr. LEOPOLDO PICCARDI, ed il mio Maestro Prof. Dr. ALFREDO RITTMANN, Direttore del Centro Ricerche Geominerarie dell'I. R. I., che mi hanno autorizzato a pubblicare questo lavoro, nonchè tutti i miei colleghi del Centro con i quali ho svolto il lavoro di campagna in cordiale ed affettuosa collaborazione. Un particolare cordiale ringraziamento devo anche al Prof. G. B. DAL PIAZ che ha avuto la cortesia di leggere in manoscritto la presente nota, dandomi utili suggerimenti.

Napoli, Centro Ricerche Geominerarie dell'I. R. I., agosto 1945.
Istituto di Geologia Applicata e di Arte Mineraria della Università.

BIBLIOGRAFIA (*)

- [1] ARGAND F., *La tectonique de l'Eurasie*. Bruxelles, 1924.
- [2] BEHRMANN R. N., *Die Faltenbögen des Apennins*. « Ges. d. Wiss. zu Göttingen; Math. Phys., Kl. » F. III, H. 15, 1936.
- [3] BONATTI S., *Studio petrografico delle Alpi Apuane*. « Mem. Descr. Carta Geol. d'It. », vol. 26, Roma, 1938.
- [4] BURCKHARDT C. E., *Zur Geologie des M. Pisano*. « Eclogae Geol. Helv. », vol. 86, 1943.
- [5] — *Il sondaggio del Belagaio e il suo significato geologico*. « Boll. Soc. It. », LXV, 1946.
- [6] DAL PIAZ G. B., *Rapporti e differenze tra la formazione pennidica dei calcescisti alpini e la formazione argillosa ofiolitifera dell'Appennino Settentrionale*. « Atti R. Acc. delle Scienze di Torino », 1943.
- [7] — *L'influenza della gravità nei fenomeni orogenetici*. « Atti R. Acc. delle Scienze di Torino », 1943.
- [8] IPPOLITO F., *Studi geologici sul M. Pisano*. « Boll. Soc. Geol. It. », LXII, 1943.
- [9] — *Sulla geologia del M. Pisano*. « Boll. Soc. Geol. It. », LXIV, 1945.
- [10] LOTTI B., *Geologia della Toscana*. « Mem. Descritt. della Carta Geol. d'It. », vol. 13, Roma, 1910.
- [11] RITTMANN A., *Geologia del M. Pisano e delle A. Apuane*. « Relazioni inedite al Presidente dell'I. R. I. », Roma, 1943, 1945.
- [12] SACCO F., *Una sezione geologica attraverso le Alpi Apuane*. « Boll. R. Uff. Geol. », LXVIII, 1943.
- [13] SCHMEDDING J. A. M., *De Geologie van de Schubbenzone bij Massa en Carrara*. Amsterdam, 1941.
- [14] SPICHER A., *Ueber descendente gefüllte Spaltenbildungen am M. Pisano*. « Ecl. Geol. Helv. », vol. 36, 1943.

(*) Rimandiamo per una bibliografia più ampia alla memoria del Professore RITTMANN di prossima pubblicazione.

- [15] STAUB R., *Die Bedeutung der Apuanischen Alpen*. « Vj. Schr. Naturf. Ges. » Zürich, 77, 1932.
- [16] STEINMANN G., *Alpen und Apennin*. « Monatsberichte d. deut. geol. Ges. », 1907.
- [17] TEICHMUELLER R. e SELZER G., *Zur Geologie des Tyrrhenisgebietes*. « Abh. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. », F. III, H. 3, 1931.
- [18] TEICHMUELLER R. e QUITZOW V., *Deckenbau im Apenninbogen*. « Abh. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. », F. III, H. 3, 1935.
- [19] TEICHMUELLER R., *Über das Vorland des Apennins*. « Abh. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. », 1932.
- [20] TERMIER P., *Les problèmes de la Géologie tectonique dans la Méditerranée occidentale*. « Rev. Gen. des Sciences », 1911.
- [21] TILMANN N., *Tektonische Studien in der Catena metallifera Toscanas*. « Geol. Rundschau », xvii, 1926.
- [22] WIJKERSLOOT P., *Bau und Entwicklung des Apennins*. Amsterdam, 1934.
- [23] ZACCAGNA D., *Carta e sezioni geologiche delle Alpi Apuane*. « Boll. Comm. Geol. d'It. », 1897.
- [24] — *Descrizione geologica delle Alpi Apuane*. « Mem. Descritt. Carta Geol. d'It. », vol. 25, Roma, 1932.

CONSIDERAZIONI SULLA COMPATIBILITÀ DI UN SISTEMA DI POSTULATI E SULLA DIMOSTRABI- LITÀ DELLE FORMULE MATEMATICHE(*)

ETTORE CARRUCCIO

SVMMARIVM. — Problema decernendi, an omnes consequentiae quorundam postulatum possint, quacumque semota repugnantia, una simul consistere an non, pluries occurrit in historia scientiarum, quousque nostris hie temporibus mathematicus K. Gödel theorema protulit quod ita enuntiatur: Posito, quod aliqua de mathematica doctrina nullas contineat interiores contradictiones, impossibile est hanc eius proprietatem naturamque demonstrare, unico ipsiusmet doctrinae adhibito auxilio. Quamvis demonstratio sui theorematism, quam Gödel instituit, rem non adeo evincat, ut nil omnino obiici possit, tamen in presenti disquisitione nova argumenta exponuntur, quae ipsum theorema roborant, et simul singulares novae consequentiae derivantur, quas inter inprimis numerorum existentia, de quibus impossibile est demonstrare, an rationales aut irrationales sint appellandi.

§ 1. — IL PROBLEMA DI STABILIRE LA NON-CONTRADDITTORIETÀ DEI PRINCIPI FONDAMENTALI DELLA MATEMATICA ⁽¹⁾ non poteva presentare vivo interesse per i pensatori dell'antichità che hanno esercitato influenza profonda e duratura sullo sviluppo della filosofia e della scienza: per PLATONE, ad esempio, assiomi, postulati, definizioni matematiche riflet-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi il 29 marzo 1945.

(1) Sento il dovere di esprimere la mia viva gratitudine al Prof. F. ENRIQUES, il quale durante l'anno 1944, anche in ore per lui e per me di pericolo, s'intratteneva a ragionare serenamente intorno a questioni di logica matematica su cui è ben nota la sua competenza, ascoltato dal suo antico allievo che gli esponeva il frutto dei suoi studi sugli argomenti trattati nel presente lavoro, nel quale quando si riferisce il pensiero del prof. ENRIQUES senza indicare lo scritto in cui si trova espresso, si tratta di considerazioni svolte nei dialoghi ai quali si è ora accennato.

tevano una realtà trascendente superiore alla mente umana⁽¹⁾, ed era quindi escluso «a priori» il pericolo d'incontrare contraddizioni nelle conseguenze logiche di detti principi.

Ma quando in seguito all'evoluzione del pensiero matematico moderno⁽²⁾ alla base di ogni sistema ipotetico-deduttivo⁽³⁾ sono state poste proposizioni, dal punto di vista della logica formale, arbitrarie, il problema di garantire la non-contraddittorietà e compatibilità di un sistema di postulati divenne d'interesse fondamentale, acuito dagli sconcertanti paradossi della teoria degli insiemi⁽⁴⁾.

Sul problema che stiamo esaminando vennero conseguiti risultati particolari assai notevoli: è stata ricondotta, ad esempio, la compatibilità dei postulati alla base di ciascuna delle geometrie non-euclidee alla non-contraddittorietà della geometria euclidea⁽⁵⁾ e la non-contraddittorietà di questa ultima a quella dell'analisi⁽⁶⁾.

Il problema generale venne inquadrato da F. ENRIQUES nella sua concezione della logica, considerata come un ramo della psicologia, il

(1) V. per es. PLATONE (n. 428-7, m. 348-7 a. C.) *Eutidemo* 290bc: «i geometri... sono cacciatori; non creano essi medesimi le figure geometriche, ma vanno in cerca di quelle esistenti.» (trad. F. Zambaldi, ed. Laterza, Bari, 1927). Il realismo platonico si traduce nell'affermazione della oggettività della matematica (cfr. A. FRAJESE, *I dialoghi di Platone e la storia della matematica*; Riv. «Sophia» Padova, gennaio-marzo 1943). Dal pensiero platonico deriva il realismo di ARISTOTELE (n. 384, m. 327 a. C.): la logica considera i rapporti fra gli enti di un mondo intelligibile. La tesi realistica è stata ripresa dal logico matematico contemporaneo B. RUSSEL (v. B. LEVI, *Logica matematica*, art. dell'Enciclopedia Italiana Treccani, con relativa notevole aggiunta non firmata: *Il significato della logica*).

(2) V. F. ENRIQUES, *Per la storia della logica*, (Bologna 1922), Cap. III, *La riforma della Logica contemporanea*; e *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, raccolte e coordinate da F. ENRIQUES, parte I, vol. I (Bologna, 1924), art. I di F. ENRIQUES, § 12.

(3) La locuzione: sistema-ipotetico-deduttivo è stata introdotta da M. PIERRI (n. 1860, m. 1918), cfr. F. ENRIQUES, *Per la storia della logica*, op. cit., pag. 203.

(4) Sulle antinomie della logica v. p. es. B. LEVI, art. già citato, e F. WAISMANN, *Introduzione al pensiero matematico* (Torino 1942), VI, pagg. 101-117.

(5) V. per es. R. BONOLA, *La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo*, Bologna, 1906; oppure art. XI dello stesso Autore sulle *Questioni...* raccolte da F. ENRIQUES (op. cit., part. I, Vol. II, Bologna, 1925); F. ENRIQUES, *Conferenze di geometria non-euclidea*, Bologna, 1917; G. FANO, *Geometria non-euclidea. Introduzione geometrica alla teoria della relatività*, Bologna, 1925; F. WAISMANN, op. cit., III, Aritmetica e geometria, pag. 36-41.

(6) V. F. WAISMANN, op. cit., pagg. 41-43.

quale ha per oggetto la critica dei procedimenti elementari del pensiero esatto rispecchiantisi nei principi fondamentali del ragionamento, e prende in esame non soltanto le formule scritte, ma anche le convenzioni e le norme inesprese in simboli, le quali reggono i modi di combinare i simboli stessi⁽¹⁾. Secondo tale visione della logica, intesa come teoria delle operazioni mentali non completamente traducibili in un sistema di segni, non devono sorprendere gli insuccessi degli indirizzi logici che intendono fornire un'espressione simbolica integrale delle teorie matematiche.

I tre principi della logica: d'identità, non-contraddizione, terzo escluso, vengono considerati come condizioni d'invarianza alle quali devono soddisfare gli oggetti del pensiero logico; le operazioni logiche eseguite a partire da oggetti in numero finito, effettivamente pensati, soddisfacenti a dette condizioni, come osserva l'ENRIQUES, non possono condurre ad una contraddizione. Più difficile è il caso che si presenta di solito nelle teorie matematiche, in cui si tratta d'infiniti oggetti, non pensati effettivamente ad uno ad uno, ma tali da soddisfare a certe limitazioni (postulati) che definiscono i concetti stessi. Un giudizio sulla compatibilità di un tale sistema di postulati può basarsi, secondo l'ENRIQUES, sulla esperienza fisica e psicologica, sull'intuizione, su di una dimostrazione logica, attribuendosi solo a quest'ultima il valore di prova rigorosamente certa di detta compatibilità; ma il valore di tale prova viene considerato relativo, in quanto si tratta di riconoscere che dalla supposta compatibilità dei rapporti che definiscono i concetti di un certo sistema, segue la compatibilità dei rapporti che definiscono i concetti del sistema su cui si deve esprimere il giudizio. Per quanto riguarda la compatibilità dell'aritmetica dei numeri naturali, la dimostrazione di ENRIQUES si fonda sull'esperienza psicologica, secondo la quale si possono illimitatamente ripetere certi atti del pensiero, in modo di costruire una serie di oggetti che soddisfino ai noti postulati alla base dell'aritmetica: la successione

a, b, c, \dots

(1) V. F. ENRIQUES, *Problemi della Scienza*, Bologna, 1906, cap. III, § 3, pagg. 163, 168.

ottenuta considerando dapprima un oggetto a , poi b = pensiero di a , quindi c = pensiero di b e così di seguito all'infinito, soddisfa i postulati: ogni oggetto della successione possiede un successivo determinato ed un determinato precedente all'infuori del primo che non succede ad altri, e per questi oggetti vale il principio d'induzione matematica⁽¹⁾. Ma l'ENRIQUES stesso, riflettendo sopra le antinomie che si sono riscontrate nell'uso della proprietà riflessiva del pensiero, e tenendo conto della teoria dei tipi di B. RUSSELL⁽²⁾ preferisce ora basare la numerazione sopra un presupposto fisico:

« Si prendano come *date* più *serie* di oggetti:

a, b, c, \dots

m, n, p, \dots

$\dots \dots \dots$

delle quali si denotino i termini generali con A, M, \dots . Suppongasi per ciascuna serie che:

- 1) ogni oggetto abbia un successivo determinato;
- 2) ogni oggetto, all'infuori di uno (il *primo*), che non succede ad altri, abbia un determinato precedente;
- 3) valga la proprietà seguente (*principio d'induzione matematica*): se una classe di oggetti è tale che insieme ad ogni A contenga il suo successivo, e se contiene a , essa conterrà tutti gli elementi della serie a, b, c, \dots (analogamente per le altre serie).

Possiamo formare le serie seguenti:

$(a) \quad (ab) \quad (abc) \quad \dots$

$(m) \quad (mn) \quad (mnp) \quad \dots$

$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

⁽¹⁾ V. F. ENRIQUES, *Problemi della Scienza*, op. cit., cap. III, specialmente pag. 193-203, e *Per la Storia della Logica*, op. cit., pagg. 210-212.

⁽²⁾ V. B. RUSSELL, *Mathematical Logic as based on the theory of types*, « Amer. J. of Math. », 30 (1908); v. anche D. HILBERT e W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik* (ed. Springer, Berlino, 1928), cap. IV, § 5, pagg. 98 e segg.

Riunendo in una classe (composta) gli oggetti (classi) che si trovano in una medesima colonna del quadro precedente, definiamo, per astrazione, successivamente i numeri

1, 2, 3,

Lo sviluppo delle operazioni aritmetiche si lascia quindi fondare sopra gli assiomi logici e sui postulati 1), 2), 3) » ⁽¹⁾.

Ma una volta stabilita la compatibilità dei postulati dell'aritmetica, si può dimostrare rigorosamente la compatibilità dell'analisi? La risposta di K. GÖDEL in proposito sarebbe negativa: le sue ricerche lo avrebbero portato a concludere che è impossibile ricondurre la non contraddittorietà dei numeri reali a quella dei numeri interi ⁽²⁾.

Più fondati dubbi possono sorgere sulla compatibilità dei postulati alla base della teoria degli insiemi, in cui sono state prese da B. RUSSELL precauzioni allo scopo di evitare i paradossi noti, ma s'ignora se si è al sicuro da nuove antinomie che potrebbero incontrarsi in successivi sviluppi ⁽³⁾.

Queste considerazioni ci riconducono al problema generale della compatibilità dei postulati alla base di un sistema ipotetico-deduttivo, e c'inducono a chiederci se è possibile superare il carattere relativo attribuito dall'ENRIQUES alla dimostrazione logica della compatibilità di un sistema di postulati. Il problema fu ritenuto sulla via della sua completa risoluzione in seguito alle ricerche di HILBERT ⁽⁴⁾, le quali

⁽¹⁾ V. F. ENRIQUES, *Problemi della Scienza*, op. cit., cap. III, § 19.

⁽²⁾ V. F. WAISMANN, op. cit., XIII, E, pag. 288, dove si trova enunciato il risultato ora esposto, ma non la sua dimostrazione, nè l'indicazione del lavoro del GÖDEL.

⁽³⁾ V. F. WAISMANN, op. cit., VI, pag. 110.

⁽⁴⁾ V. p. es. D. HILBERT und W. ACKERMANN, op. cit., specialmente a pag. 2 e 29-31; alle pagg. 116-118 trovasi una bibliografia sulla logica matematica; nel cap. I, § 12, pag. 29, un sistema di postulati vien detto non contraddittorio quando non è possibile dedurre due proposizioni X e \bar{X} (negazione di X). Nel cap. I, § 12, pagg. 29-31 di detta opera, si dà una dimostrazione della non-contraddittorietà del sistema di postulati posto da HILBERT alla base della logica; ma tale dimostrazione si basa su di un'interpretazione aritmetica dei postulati in questione; presuppone quindi la compatibilità dell'aritmetica. Inoltre v. F. WAISMANN, op. cit., pagg. 114-117 e pag. 141.

però furono seguite dall'ENRIQUES⁽¹⁾ con uno scetticismo che apparve in seguito pienamente giustificato da uno sconcertante risultato del GÖDEL⁽²⁾ che verrà esposto nel presente lavoro (§ 2) con alcune osservazioni critiche (§ 3); mentre nel § 4 si vedrà che dal risultato del GÖDEL sull'impossibilità di dimostrare la non-contraddittorietà di un qualsiasi sistema ipotetico-deduttivo, si deducono singolari conseguenze nel campo dell'analisi matematica.

§ 2. RISULTATI DEL GÖDEL RELATIVI ALL'ESISTENZA DI AfferMAZIONI INDECISE, ED ALL'INDIMOSTRABILITÀ DELLA COMPATIBILITÀ DI UN SISTEMA DI POSTULATI. — Un'affermazione A si dice indecisa in un determinato sistema ipotetico-deduttivo quando è impossibile dimostrare tanto A quanto la negazione di A , che s'indica con \bar{A} . Il GÖDEL, nel già citato articolo del 1931 fornisce due dimostrazioni del suo risultato relativo all'esistenza di affermazioni indecise: la prima dimostrazione, considerata dal suo autore senza pretese di rigore, si riferisce ad un qualsiasi sistema ipotetico-deduttivo S che soddisfi a condizioni assai poco restrittive; la seconda, il pensiero fondamentale della quale era stato delineato nella prima, viene svolta dettagliatamente, ma presenta tuttavia ancora qualche lacuna, rilevata dall'autore stesso, ed è dedicata in modo particolare al sistema P , fondato sui 5 assiomi dell'aritmetica di PEANO, e su quelli alla base dei « principia mathematica » di A. WHITEHEAD e B. RUSSELL (Cambridge, 1925) mentre si dà un cenno sulle applicazioni agli altri sistemi.

Il GÖDEL nel suo citato articolo preannuncia la pubblicazione in un suo successivo lavoro, della dimostrazione rigorosa e completa del risultato in questione; non mi risulta tuttavia che tale pubblicazione sia effettivamente avvenuta (nel libro del WAISMANN, *Introduzione al pensiero matematico*, traduzione edita a Torino nel 1942, si cita soltanto lo scritto del GÖDEL del 1931).

(¹) V. F. ENRIQUES, *Problemi della Scienza*, op. cit., cap. III, § 19, pag. 203.

(²) K. GÖDEL, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I* (Monatshefte für mathematik und physik, Leipzig, 1931, pag. 173-198) e F. WAISMANN, op. cit., pag. 142-144.

Per semplicità ci riferiremo al ragionamento del GÖDEL esposto sotto la prima forma, di cui daremo la seguente esposizione, riserbando al prossimo § le osservazioni critiche in proposito.

Un sistema ipotetico-deduttivo S è costituito da postulati e teoremi⁽¹⁾ espressi mediante un insieme di formule⁽²⁾, le quali sono successioni di segni fondamentali [variabili, costanti logiche, come: ε (appartiene), \equiv (significa) etc.]⁽³⁾; e si ammette di poter riconoscere quali successioni di segni hanno un senso e quali non lo hanno. Analogamente le dimostrazioni, dal punto di vista formale si presentano come successioni finite di formule con speciali caratteristiche. Possiamo rappresentare i segni fondamentali mediante dei numeri naturali, perciò una formula si presenterà come una successione finita di numeri naturali, ed una dimostrazione come una successione finita di successioni finite di numeri naturali. I concetti e i teoremi relativi alla dimostrabilità delle formule di un sistema S , ed in particolare alla dimostra-

(1) Le definizioni in un sistema formale si considerano soltanto come modi di scrivere abbreviato e quindi sono principi superflui ai fini del presente lavoro (cfr. K. GÖDEL, art. citato, nota (6) a pag. 174 di detto articolo. Sullo sviluppo storico del concetto di definizione, che nei sistemi ipotetico-deduttivi, secondo la logica moderna, ha assunto carattere esclusivamente nominale, v. F. ENRIQUES, *Per la storia della Logica* (già citata), specialmente Cap. III; *La definizione come problema scientifico*, in «Periodico di matematiche», 1925; *Definizione* (art. dell'*Enciclopedia Italiana Treccani*).

(2) Tentativi di costruire una ideografia logica, di tradurre cioè in simboli le relazioni logiche, risalgono a G. G. LEIBNIZ (n. 1646, m. 1716), che chiamò detta ideografia *characteristica universalis*. Il programma di LEIBNIZ venne raccolto da G. PEANO (n. 1858, m. 1932), che a partire dal 1895, con la collaborazione di amici e discepoli espresse mediante il suo simbolismo nel *Formulario Mathematico* estesi campi dell'analisi (v. B. LEVI, *Peano, Giuseppe*, articolo dell'*Enciclopedia Italiana Treccani*, con bibliografia sull'argomento).

(3) Ogni sistema ipotetico-deduttivo S in cui compaiono simboli $s_0 s_1 \dots s_{x-1}$ può essere anche espresso mediante 2 soli simboli. Infatti: osserviamo innanzi tutto che è possibile far corrispondere ad ogni simbolo di S una lettera e scrivere queste lettere con punti e linee secondo l'alfabeto Morse. Ma in questa scrittura esistono gl'intervalli quindi i simboli impiegati sono 3. Per impiegare effettivamente due soli simboli facciamo corrispondere ad s_0 un punto, ad s_1 due punti... ad s_{x-1} x punti. Tra una di queste successioni di punti e l'altra intercaliamo una linea; tra una formula e l'altra due linee ecc. Così l'intento viene raggiunto. Si potrebbe obiettare che il punto e la linea (o due altri qualsiasi segni differenti) non sono simboli logici; tuttavia esaminando la questione, non sembra che esista una differenza sostanziale tra punto e linea da una parte e gli altri simboli logici dall'altra.

bilità della compatibilità del sistema stesso, diventano così esprimibili mediante i concetti e i teoremi relativi ai numeri naturali ed alle successioni di essi.

Dimostriamo ora il *Teorema I*: *Si può formulare un'affermazione A tale che nè A , nè la negazione di A è dimostrabile in S .*

A questo scopo stabiliamo una corrispondenza biunivoca tra la serie naturale dei numeri e le formule aventi senso in S e contenenti una sola variabile che varia nel campo dei numeri naturali, ed indichiamo con $R(m)$ l' m -esima di tali formule⁽¹⁾.

Indichiamo con $[R(m); n]$ la formula ottenuta a partire da $R(m)$, quando al posto della variabile si sostituisce il numero naturale n .

Definiamo ora una classe K di numeri naturali nel modo seguente: Un numero naturale n appartiene alla classe K , quando e soltanto quando non è dimostrabile in S la formula $R(n)$ in cui al posto della variabile è stato sostituito il numero n ; ciò che si esprime in simboli scrivendo:

$$[1] \quad n \in K \equiv \overline{\text{Dim}} [R(n); n]$$

Fra le formule del tipo $[R(m); n]$ dovrà anche esistere quella che s'interpreta: il numero naturale n appartiene alla classe K ; sia $R(q)$ tale formula, in simboli:

$$R(q) \equiv n \in K$$

In particolare per il numero naturale q :

$$[2] \quad [R(q); q] \equiv q \in K$$

(1) Il GÖDEL propone di ordinare le formule $R(m)$ secondo somme crescenti dei numeri che compaiono in dette formule, e in caso di parità secondo « somme lessicografiche ». Sembra che questa proposta s'interpreti nel modo seguente: se s ed s' sono le somme dei numeri che rappresentano rispettivamente le formule f ed f' , allora se $s < s'$ allora f precede f' . Se poi $s = s'$, sostituiamo ai numeri 1, 2, 3, ... le lettere a, b, c, \dots in ordine alfabetico (aggiungendo se occorre altre lettere convenzionali) nelle formule f ed f' , delle quali faremo precedere quella che precede in ordine alfabetico (come in un vocabolario).

Si dimostra precisamente che l'affermazione $q \varepsilon K$ è indecisa: supponiamo infatti che sia dimostrabile $q \varepsilon K$, cioè

$$[3] \quad \text{Dim } (q \varepsilon K)$$

Allora $q \varepsilon K$ sarebbe valida in S e quindi per la [1] in cui ad n si sostituisce q :

$$\overline{\text{Dim}} [R(q); q]$$

cioè per la [2]

$$\overline{\text{Dim}} (q \varepsilon K)$$

in contraddizione con l'ipotesi [3].

Se invece fosse dimostrabile la negazione di $q \varepsilon K$ avremmo:

$$[4] \quad \text{Dim } \overline{(q \varepsilon K)}$$

quindi sarebbe valida in S

$$\overline{q \varepsilon K}.$$

Ma allora sostituendo nella [1] q ad n , e ricordando che due negazioni applicate ad una proposizione si elidono, abbiamo:

$$\text{Dim } [R(q); q]$$

cioè per la [2]

$$\text{Dim } (q \varepsilon K)$$

Ma per l'ipotesi [4] la formula $q \varepsilon K$ risulterebbe dimostrabile insieme con la sua negazione ciò che è assurdo. Si conclude che l'affermazione $q \varepsilon K$ è indecisa c. v. d.

Il teorema del GÖDEL sull'impossibilità di dimostrare la non-contraddittorietà di un sistema ipotetico-deduttivo S , viene ottenuto da detto autore come una conseguenza del risultato di cui sopra sulle affer-

mazioni indecise, esposte sotto la seconda forma, cioè per il sistema P e con qualche lacuna. Tuttavia, anche basandosi sull'esposizione precedente (I^a forma) è facile ricavare il risultato fondamentale in questione. Si ottiene cioè il seguente *Teorema II*: *Non è dimostrabile la non-contraddittorietà di un sistema ipotetico-deduttivo, servendosi soltanto di mezzi offerti dal sistema stesso.*

Infatti: nel teorema precedente è stato stabilito che se si ammette la non-contraddittorietà di S , si deve escludere la validità della formula

$$[5] \quad \text{Dim}(q \in K) ;$$

quindi se si dimostra la non-contraddittorietà di S , si dimostra anche che la [3] conduce all'assurdo; si dovrebbe dunque concludere che è dimostrata la sua negazione

$$[5] \quad \overline{\text{Dim}}(q \in K) .$$

ma per la [2] e per la [1] nella quale al posto di n è stato sostituito q si avrà che in tal caso risulta dimostrata la formula

$$q \in K$$

cioè

$$\text{Dim}(q \in K)$$

che è in contraddizione con l'ipotesi [5]. Si conclude che la possibilità di dimostrare la non-contraddittorietà di S , conduce ad una contraddizione nel sistema S stesso.

Secondo il GÖDEL la compatibilità dei postulati alla base di un sistema ipotetico-deduttivo S , non si può dunque dimostrare con i soli mezzi offerti dal sistema S . Si può aggiungere che secondo quest'ordine d'idee è impossibile dare alla dimostrazione logica della compatibilità di un sistema S , un valore maggiore di quello relativo attribuitogli dall'ENRIQUES (v. § 1 del presente lavoro).

Infatti supponiamo di essere riusciti a dimostrare la compatibilità di S coi mezzi offerti da un'altro sistema T ; questa dimostrazione rag-

giungerebbe effettivamente il suo scopo, se si potesse dimostrare la compatibilità di T ; ma ciò non è possibile con i mezzi offerti da T ; si dovrebbe quindi ricorrere ad un'altro sistema U , e così via. Sia che in questo procedimento s'incontrino sempre nuovi sistemi, sia che nella successione S, T, U, \dots si ricada in qualche sistema già incontrato nella successione stessa, la dimostrazione delle compatibilità di S non può arrivare ad una conclusione definitiva; ma tale compatibilità può soltanto venir stabilita, se si vuole, mediante un postulato in base all'esperienza fisica o psicologica od all'intuizione.

§ 3. OSSERVAZIONI CRITICHE SUI RISULTATI DEL GÖDEL. — Non ci possiamo nascondere quanto siano delicati i ragionamenti esposti nel precedente § e la giustificata diffidenza che dette argomentazioni ispirano ai matematici al corrente delle antinomie già presentatesi nel mondo della logica. Lo stesso GÖDEL ⁽¹⁾ rileva l'analogia che sussiste fra il suo risultato relativo all'esistenza di affermazioni indecise (esposto nel teorema I del presente lavoro) e i paradossi del « Bugiardo » e di RICHARD ⁽²⁾.

Esaminiamo dunque alcune obiezioni alle quali prestano il fianco i ragionamenti del GÖDEL con osservazioni in proposito.

Ci chiediamo in primo luogo: è possibile riconoscere quali successioni di simboli costituiscono formule dotate di senso e quali no? La questione è piuttosto delicata: nell'opera di HILBERT e ACKERMANN, già citata nella nota ⁽²⁾ a pag. 24, la nozione « aver senso », assunta come primitiva, non viene ulteriormente approfondita (v. pag. 3 di detta opera).

Sull'argomento si possono fare le seguenti riflessioni:

Possiamo intendere che *un'affermazione ha senso in S* , quando si riferisce ad oggetti del pensiero logico, tali cioè da soddisfare alle condizioni espresse dai tre principi della logica: identità, non contrad-

⁽¹⁾ K. GÖDEL, art. già citato, § 1.

⁽²⁾ Il paradosso del « bugiardo » consiste nel notare che se qualcuno dice « io mento », egli mente se dice la verità e dice la verità se mentisce. Il paradosso di RICHARD concerne « il minimo numero che non si può definire con meno di cento parole » e che appunto così viene invece definito con meno di cento parole. Cfr. scritti citati nella nota ⁽¹⁾ a pag. 22 del presente lavoro.

dizione, terzo escluso; quindi se A è un'affermazione avente senso deve essere valida in S una ed una sola delle due affermazioni: A, \bar{A} . Ciò significa che hanno senso le affermazioni relative ad oggetti del pensiero che compaiono nei postulati dai quali vengono implicitamente definiti, oppure sono stati costruiti mediante operazioni logiche consentite dai postulati stessi.

Notiamo che un'affermazione priva di senso in un sistema S può aver senso in un sistema T . Per es. l'uguaglianza

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x} \sqrt{1-x}$$

per $|x| > 1$ è priva di senso nella teoria dei numeri reali ed ha senso nella teoria dei numeri complessi. I postulati ed i teoremi di S , le loro negazioni, e le altre eventuali affermazioni che soddisfano le condizioni di cui sopra hanno senso in S : per es. il V postulato di EUCLIDE ha senso rispetto ai principi precedentemente introdotti, pur essendo indimostrabile insieme con la sua negazione, rispetto ad essi.

Si può però intendere la nozione « avere senso » in modo più restrittivo, dal punto di vista neo-positivista secondo il quale il criterio esposto per stabilire quali affermazioni hanno un senso, viene ritenuto troppo largo ed infido, e se ne sostiene un altro, che attribuisce un senso soltanto ai postulati, ai teoremi dimostrati ed alle loro negazioni, in quanto si possa dimostrare che non sono validi in S , non attribuendosi un senso alle affermazioni indecise.

Vediamo per chiarire meglio i termini della questione come viene applicato in un caso particolare, ma di notevole interesse, quest'ultimo criterio dal WAISMANN, seguendo la corrente neo-positivista del « circolo viennese » di cui L. WITTGENSTEIN fu l'ideatore. Si tratta di stabilire quando è che ha un senso un'affermazione relativa ad un numero reale. Consideriamo ad esempio il numero

$$n = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

dove a_n è uguale ad 1 se l'equazione di FERMAT

$$x^n + y^n = z^n$$

è risolubile con numeri interi, mentre $a_n = 0$ nel caso contrario.

Per il momento non sappiamo se $n=0,11$ o se è maggiore.

Se il teorema di FERMAT fosse indimostrabile e fosse anche indimostrabile la sua negazione, secondo il WAISMANN il simbolo $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ non rappresenterebbe un numero, non avrebbe senso. Lo stesso autore ritiene che anche se di un decimale illimitato si sanno calcolare le successive cifre decimali, non per questo si può attribuire a tale decimale il nome di numero reale, perchè non è detto che si possa stabilire se si tratta di un numero razionale o irrazionale⁽¹⁾.

Se noi seguiamo quest'ordine d'idee dobbiamo rinunciare ad attribuire un senso alle affermazioni indecise, anzi dobbiamo bandire dai nostri ragionamenti quegli enti matematici intorno ai quali si possono enunciare affermazioni indecise; risulteranno quindi infirmate le dimostrazioni dei teoremi I e II del GÖDEL (v. § 2 del presente lavoro), perchè la classe K non avrebbe senso in S , dato che non si può stabilire con i mezzi offerti da S , se q appartiene o no alla classe K stessa. Una critica analoga potrebbe essere rivolta a qualunque dimostrazione dei teoremi I e II che stiamo esaminando, svolgendo le considerazioni seguenti: se dimostriamo che l'affermazione A « S non è contraddittorio » è indecisa, allora A non ha senso, cioè non ha senso di parlare in S di non contraddittorietà di S ; ma noi ci possiamo valere in un ragionamento, solo di un sistema per il quale abbia senso la non contraddittorietà, anzi sia non contraddittorio, quindi noi non possiamo valerci di S in un ragionamento, in particolare in quello che conduce a concludere che A è indecisa; naturalmente nemmeno potremo dimostrare che A è indecisa senza valerci di S , dato che A si riferisce appunto ad S ; si conclude che in nessun modo si può stabilire che A è indecisa, se le affermazioni indecise si considerano prive di senso. A rigore sembra che un neo-positivista non dovrebbe accettare la dimostrazione del teorema II del GÖDEL ma restare in dubbio circa la sua validità fino a che si fosse eventualmente dimostrata la negazione del teorema stesso; notiamo però che WAISMANN accetta i risultati del GÖDEL⁽²⁾. Questo dubbio circa le possibilità di dimo-

(1) V. F. WAISMANN, *op. cit.*, pagg. 178, 286, 287. A pag. 284-286 dell'opera stessa si esamina un limite, che secondo l'interpretazione dell'intuizionista BROUWER fornisce l'esempio di un numero reale che non è positivo, nè nullo, nè negativo.

(2) V. F. WAISMANN, *op. cit.*, pagg. 142-144.

strare la compatibilità di un sistema ipotetico-deduttivo S , basterebbe per rendere al neo-positivista malsicura qualunque sua deduzione nell'ambito di un sistema S .

In particolare il neo-positivista dovrà evitare di trattare di quei numeri per cui non è stato finora dimostrato se sono razionali o irrazionali, p.es. dovrà bandire dai suoi ragionamenti la costante di EULERO, perchè in tali numeri potrebbe annidarsi un non senso Ma la vastità del campo a cui si può estendere la critica neo-positivista non potrebbe forse costituire una sua debolezza? Dove il matematico sarebbe al sicuro dai non sensi? E allora non sarebbe meglio ritornare ad ammettere che un'affermazione indecisa può possedere un senso, purchè soddisfi alle condizioni precedentemente esposte, ed applicando il principio del terzo escluso dire che un sistema S è contraddittorio, o non non-contraddittorio, che un numero ben definito è razionale o irrazionale, e così via anche se non possiamo stabilire quale eventualità si verifica?

Si potrebbe ritornare così con una consapevolezza nuova alla concezione antica dell'obiettività della matematica, la quale risulterebbe costituita da tutti gl'infiniti sistemi ipotetico-deduttivi compatibili.

Una seconda questione è la seguente: le formule $R(n)$ formano un sistema della potenza del numerabile? Sembra che la risposta debba essere affermativa, dato che ognuna di dette formule è costituita da un numero finito di simboli; e se si può superare la difficoltà di riconoscere quali formule hanno senso e quali non l'hanno, è facile poi ordinarle.

In terzo luogo ci si può domandare: esistono fondati motivi per dubitare che la formula $n \in K$ s'identifica con una delle formule $R(q)$? Tali dubbi sarebbero fondati, sembra, soltanto nel caso in cui non si fosse certi che la classe K è dotata di senso. Ora il modo con il quale detta classe è stata definita non è tale da rendere perfettamente tranquilli in proposito, anzi sembra addirittura che si giunga ad un'antimonia.

Abbiamo già visto che l'ipotesi di $\text{Dim}(q \in K)$ conduce all'assurdo. D'altra parte sembra invece che si possa dimostrare che $q \in K$. Infatti: supponiamo che q non appartenga a K , allora per la [1] e la [2]

$$\overline{q \in K} \equiv \overline{\text{Dim}(q \in K)} \equiv \text{Dim}(q \in K)$$

quindi $q \in K$ contro l'ipotesi.

Si può però rispondere che questa dimostrazione sarebbe valida soltanto se si fosse dimostrato che il sistema S è non contraddittorio.

Questo ragionamento non sarebbe un'antinomia ma viceversa proverebbe che è impossibile dimostrare la non-contraddittorietà di S , perchè qualora questa fosse dimostrata se ne ricaverebbe l'assurdo ora considerato.

Ma l'obiezione forse più grave riguarda il modo con il quale è stata definita la classe K . Si nota che in genere una classe viene considerata ben definita in un certo sistema S quando è dato un criterio in virtù del quale si può stabilire in S , con numero finito di passaggi logici, se un elemento appartiene o meno alla classe stessa. Ora, proprio secondo il ragionamento esposto nella dimostrazione del teorema I del precedente §, non si può stabilire in S se q appartiene o meno a K .

Non ostante le riserve di carattere critico cui danno luogo le dimostrazioni del GÖDEL dell'esistenza di affermazioni indecise o dell'impossibilità di dimostrare la non-contraddittorietà di un sistema S tuttavia si è indotti a ritenere sostanzialmente giusto il risultato del teorema II in base alle seguenti considerazioni.

Ammesso, come nota l'ENRIQUES, che abbia un senso parlare di conseguenze immediate c_1 , di un certo sistema p di proposizioni, sviluppiamo il sistema ipotetico-deduttivo basato sulle proposizioni p prese come postulati, facendo seguire alle p le c_1 , alle c_1 le conseguenze immediate c_2 di p e c_1 , a c_2 le conseguenze immediate di p, c_1 e c_2 , e così di seguito. Si osservi innanzi tutto che per quanto si proceda in queste deduzioni senza incontrare contraddizioni, non si può per tal via acquistare la certezza di non incontrarne in seguito.

L'ENRIQUES osserva inoltre, che se si pronunciasse in seno ad un sistema S un giudizio relativo alla non-contraddittorietà del sistema S (giudizio che si riferisce anche al giudizio stesso) si trascurerebbero le cautele proposte dalla teoria dei tipi di B. RUSSELL, costruita per evitare antinomie logiche.

Infine sempre allo stesso proposito si può considerare a mio parere la seguente argomentazione: supponiamo di essere riusciti a dimostrare con mezzi forniti esclusivamente dal sistema S che S stesso non è contraddittorio. Tale dimostrazione anche se formalmente perfetta, non può renderci certi della non-contraddittorietà di S , perchè se S fosse contraddittorio, sarebbe dimostrabile in S qualunque pro-

posizione⁽⁴⁾, in particolare che S non è contraddittorio. Perchè una dimostrazione in S sia valida, occorre già sapere che S è non-contraddittorio, ma se ciò è proprio quello che si vuol dimostrare risulta che una dimostrazione di non contraddittorietà di S con mezzi offerti dal sistema S è sempre viziata di circolo e quindi impossibile.

§ 4. — ALCUNE CONSEGUENZE DEL RISULTATO DEL GÖDEL RELATIVO ALL'IMPOSSIBILITÀ DI DIMOSTRARE LA NON CONTRADDITTORIETÀ DI UN SISTEMA IPOTETICO DEDUTTIVO. — Se si ammette la validità del risultato del GÖDEL esposto nel teorema II del § 2, ritengo di poterne dedurre alcune singolari conseguenze. Ricordando le considerazioni svolte a proposito delle affermazioni aventi senso, introduciamo due definizioni ed un postulato al fine di esporre nel modo più semplice e chiaro le deduzioni alle quali si è accennato (teoremi IV, V, VI).

Definizione I. — Chiameremo ben definito un numero del quale è possibile calcolare valori con un approssimazione prefissata.

Sono quindi ben definiti i numeri per i quali è possibile calcolare le successive ridotte del loro sviluppo in frazione continua, i numeri

(4) Dimostriamo questo risultato seguendo in sostanza D. HILBERT e W. ACKERMANN (cfr. *op. cit.*, cap. I, § 9, pag. 21). Si dice somma logica di due proposizioni A e B , che s'indica con $A \& B$ e si legge A e B , la proposizione che è vera quando e soltanto quando A e B sono entrambe vere. Si dice prodotto logico di due proposizioni A e B che s'indica con AB e si legge A o B , la proposizione che è vera quando e soltanto quando almeno una delle proposizioni A e B è vera. Quindi se è vera la proposizione A , sarà vera la AB , (anche se per caso la B fosse falsa). Se si accettano come valide le proposizioni A e C sarà quindi valida anche la proposizione

$$AB \& CB$$

e sempre nelle stesse ipotesi si otterrà la proposizione equivalente:

$$B(A \& C);$$

(vale la proprietà distributiva del prodotto logico rispetto alla somma logica). In un sistema ipotetico-deduttivo in cui si trovassero due proposizioni A e \bar{A} (negazione di A), e B fosse una proposizione qualsiasi, si ricaverebbe, ponendo \bar{A} in luogo di C :

$$AB \& \bar{A}B$$

$$B(A \& \bar{A})$$

Ma $A \& \bar{A}$ è certo falsa; risulta dunque dimostrata la B .

espressi mediante sviluppo in serie convergente, oppure mediante numero decimale illimitato, di cui si sanno calcolare le successive cifre etc.

Postulato: Ogni numero ben definito è un oggetto del pensiero logico; hanno quindi un senso le affermazioni riguardanti tali numeri.

Definizione II. — Chiamiamo ultrarazionale un numero intero del quale non si può dimostrare che è razionale nè che è irrazionale. — Dimosteremo nel teorema IV che tali numeri esistono. Alla dimostrazione dell'esistenza di numeri ultrarazionali premettiamo il seguente:

Teorema III: Un sistema ipotetico-deduttivo S può essere sviluppato in modo che l'insieme delle proposizioni che ad esso appartengono come postulati o come teoremi dedotti dai postulati di S venga posto in corrispondenza biunivoca con la serie naturale dei numeri.

Infatti: ai simboli fondamentali del sistema S presi in un certo ordine

$$s_0 s_1 \dots s_{x-1}$$

facciamo corrispondere i numeri

$$0, 1 \dots x-1;$$

e ad ogni formula il numero espresso nel sistema di numerazione in base x , secondo il noto principio di posizione applicato nella consueta numerazione decimale; cioè se ad una formula corrisponde la successione di numeri (tutti minori di x)

$$a_0 a_1 \dots a_n$$

a questa successione e quindi alla formula data corrisponde il numero

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

Consideriamo il sistema dei postulati p alla base di S , i quali verranno ordinati secondo l'ordine di grandezza, dei numeri che rappresentano le formule esprimenti detti postulati. Dai postulati p che sono in numero finito, ricaviamo tutte le conseguenze immediate c_1 .

che saranno anch'esse in numero finito⁽¹⁾; tra le conseguenze immediate di date proposizioni, annoveriamo anche le proposizioni stesse, e ciò per essere sicuri di poter precedere indefinitamente nella deduzione. Le formule c_1 verranno ordinate con lo stesso criterio adottato per le formule p e dopo queste; dalle proposizioni p e c_1 ricaviamo tutte le conseguenze immediate c_2 e le ordiniamo nella solita maniera

(¹) Per brevità rinunciamo nel presente lavoro ad un esame approfondito di quest'ultima affermazione, la quale risulta evidente, quando si pensi che nei nostri sistemi ipotetico-deduttivi le conseguenze immediate di premesse in numero finito vengono ricavate applicando leggi logiche in numero finito.

Per esempio nella logica tradizionale dalla proposizione «tutti gli A sono B » si ricava «qualche A è B »; dalla maggiore e dalla minore di un sillogismo si ricava una sola conclusione ecc.

Un'analisi del ragionamento matematico, la quale ci conduce a ritenere in numero finito le conseguenze immediate di un numero finito di premesse, trovasi in S. ZAREMBA, *La logique des mathématiques*, (Mémorial des sciences mathématiques, fasc. XV, Paris, 1926); da detto lavoro riassumiamo le considerazioni seguenti:

Si dice funzione logica ogni espressione $F(x, y, z, \dots)$ che acquista un significato determinato almeno per alcuni sistemi di significati delle x, y, z, \dots detti punti logici, per cui è definita. Una dimostrazione si dice completa quando ogni passaggio da una proposizione all'altra viene eseguito mediante l'applicazione di uno di questi due principi: principio di sostituzione e «modus ponens».

Principio di sostituzione. — Sapendo che una funzione logica $F(x, y, z, \dots)$ fa corrispondere una proposizione vera ad ogni punto logico per cui è definita, si ha il diritto di portare sulla lista delle proposizioni vere, ogni proposizione ottenuta mediante la sostituzione ad x, y, z, \dots dei simboli a, b, c, \dots relativi ad un qualsiasi significato particolare di x, y, z, \dots ; per cui $F(x, y, z, \dots)$ è definita.

Principio «modus ponens». — Date due proposizioni p e q , sapendo che

$$p \supset q$$

(cioè da p si deduce q) e che p è una proposizione vera, si ha il diritto di mettere anche q nella lista delle proposizioni vere.

Postulato. — Si ammette che ogni dimostrazione logica corretta sia sostituibile mediante una dimostrazione completa, in cui cioè si applicano soltanto i principi sopra enunciati.

Osserviamo che nell'applicazione di questi due principi (che si possono ricondurre alla teoria del sillogismo) da due premesse si ricava una determinata conseguenza: per il principio di sostituzione da « $F(x, y, z, \dots)$ è una funzione logica» e da « a, b, c, \dots è un punto logico per cui è definita $F(x, y, z, \dots)$ » si deduce $F(a, b, c, \dots)$; e per il «modus ponens» da «ogni conseguenza di una proposizione vera è vera» e da « q è una proposizione conseguenza della proposizione vera p » si ricava « q è una proposizione vera». V. anche D. HILBERT e W. ACKERMANN, *op. cit.*, cap. I, § 10, pagg. 22 a 23.

dopo le c_i ; ricaviamo quindi tutte le conseguenze di p c_1 e c_2 , le ordiniamo, e così di seguito all'infinito.

Teorema IV. Esistono numeri ben definiti ultrarazionali.

Infatti: consideriamo l'insieme delle formule che esprimono i postulati ed i teoremi dimostrabili di un sistema ipotetico-deduttivo S , formule poste in corrispondenza biunivoca con la serie naturale dei numeri, come è stato indicato nel teorema precedente. Ad ogni preposizione

$$f, f_1 \dots f_n \dots$$

che non sia in contraddizione con una delle precedenti, facciamo corrispondere con una determinata legge i numeri naturali diversi da zero

$$[7] \quad a, a_1 \dots a_n \dots$$

(i quali possono anche essere presi per semplicità eguali fra loro).

Formiamo ora la frazione continua

$$[8] \quad a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots a_n + \dots}}$$

Se s'incontra nella successione delle formule di S una formula in contraddizione con una delle precedenti, s'interrompe la successione [7] arrestandoci al termine a_n corrispondente all'ultima formula del sistema S che non dà luogo ad esplicita contraddizione. La frazione continua [8] sarà uguale in ogni caso ad un numero reale ben definito, razionale se la successione [7] è limitata, irrazionale nel caso contrario.

Ora se il sistema S non è contraddittorio non si potrà dimostrare la sua non contraddittorietà (v. teorema II del § 3), nè prevedere quindi che la successione [7] sarà illimitata e che il numero espresso dalla frazione continua [8] risulterà irrazionale. Neppure si potrà dimostrare

che il numero in questione è razionale, perchè ciò equivarrebbe a dire che S è contraddittorio, contro quanto abbiamo supposto.

Esistono dunque numeri ben definiti ultrarazionali.

Osservazione. Per alcuni numeri reali ben definiti, nonostante le ricerche effettuate in proposito dai matematici, non si è finora dimostrato che sono razionali e neppure che sono irrazionali. Questo caso si presenta ad esempio per la costante di EULERO

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) = 0,577215 \dots$$

Potrebbe darsi che C ed altri numeri per cui si verifica circostanza analoga fossero ultrarazionali.

Teorema V. Esistono coppie di numeri ben definiti a e b tali che non si può dimostrare che

$$a = b$$

e neppure che

$$a \neq b .$$

Sia per fissare le idee

$$a = 0,777 \dots$$

(numero decimale periodico semplice di cui la parte intera è 0 e il periodo è 7).

b sia uguale ad un numero del quale la parte intera è zero e le successive cifre sono uguali a 7, se le formule di un sistema ipotetico deduttivo S , con cui dette cifre vengono poste in corrispondenza biunivoca, non sono in contraddizione con qualcuna delle formule precedenti; ma se s'incontra una contraddizione la successione dei 7 s'interrompe in corrispondenza della formula precedente a quella che dà luogo ad esplicita contraddizione. Dunque se il sistema S è contraddittorio $a \neq b$ e lo si può dimostrare, ma se S non è contraddittorio, pur essendo $a = b$, non sarà possibile dimostrare detta uguaglianza,

perchè se la si dimostrasse si dimostrerebbe anche la non-contraddittorietà di S ciò che è impossibile.

Teorema VI. — Esistono serie certamente convergenti o divergenti, per le quali tuttavia non è possibile dimostrare quale dei due casi effettivamente si verifica. — Facciamo corrispondere alle formule del sistema ipotetico-deduttivo S ordinate nella maniera già spiegata, i termini di una serie armonica finchè in S non s'incontrano contraddizioni:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Sarà divergente se S non è contraddittorio.

Se invece S è contraddittorio, se all'ultima formula prima d'incontrare una contraddizione, corrisponde il termine $\frac{1}{n}$, alla prima formula che dà luogo ad una contraddizione facciamo corrispondere $\frac{1}{n^2}$ alla successiva $\frac{1}{n^3}$ e così via; la serie da un certo punto in poi si trasformerà in serie geometrica di ragione minore di 1; quindi la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$$

sarà convergente.

Se la serie è convergente si potrà dimostrare che è convergente, perchè in tal caso la contraddizione S si dovrà incontrare dopo un numero finito di passaggi, ma se è divergente non si potrà dimostrare che è divergente (e naturalmente nemmeno che è convergente).

Esempi analoghi a quelli considerati nei teoremi IV, V, VI si possono moltiplicare.

I delicati problemi piuttosto proposti che risolti nel presente lavoro, potranno fornire argomento di nuove ricerche e suggestive meditazioni a chi desidera esplorare le ragioni di confine tra matematica e filosofia.

INTEGRALI DI STIELTJES, E VALUTAZIONE PLANIMETRICA DI ESPRESSIONI SIMBOLICHE NEL CALCOLO OPERATORIO (*)

GIUSEPPE APRILE

SUMMARIVM. — Adhibito planimetrico integralium Stieltjesianorum calculo, secundum Nyström, Auctor exhibet rationem qua generica expressio symbolica calculi operatorii functionalis per numeros perpendi possit, dummodo nota sit generatrix integralis $H(t)$ operatoris, et operanda $V(t)$.

1. — Il NYSTRÖM ha indicato ⁽¹⁾ un procedimento planimetrico per il calcolo numerico di integrali di STIELTJES, del tipo:

$$[1] \quad S = \int_a^b g(\vartheta) dh(\vartheta)$$

Con un metodo derivante da detto procedimento, può utilmente venir compiuta la valutazione numerica di espressioni simboliche come la seguente:

$$[2] \quad W(t) = f(\Delta) V(t) = \int_0^t V(t - \vartheta) G(\vartheta) d\vartheta$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi il 3-4-1946.

(1) E. J. NYSTRÖM, *Planimetrische Auswertung von Stieltjesintegralen*, «Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.», 1934, pag. 276.

nella quale $G(t)$ è la *funzione generatrice* dell'operatore $f(\Delta)$, essendo $\Delta \equiv \frac{d}{dt}$, e $V(t)$ l'*operanda* ⁽¹⁾. (Tanto $G(t)$ che $V(t)$ si suppongono nulle per $t < 0$).

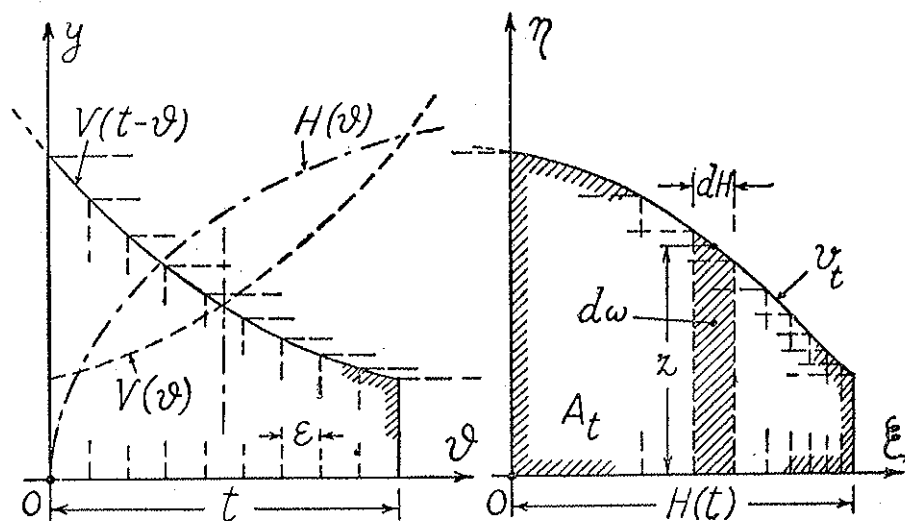


FIG. 1.

Si ha difatti, introducendo la *generatrice integrale* $H(t) = f(\Delta) 1(t)$ dell'operatore $f(\Delta)$:

$$G(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} H(\vartheta) ; \quad G(\vartheta) d\vartheta = dH(\vartheta)$$

e quindi:

$$[3] \quad W(t) = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=t} V(t-\vartheta) dH(\vartheta)$$

con che la [2] è ricondotta alla forma [1].

⁽¹⁾ Vedi ad esempio: G. GIORGI, *Sul calcolo delle soluzioni funzionali*, ecc., ristampato sul «Boll. Tecn. dell'Istituto Mil. Sup. delle Trasmissioni», 1940, n. 3-4, pag. 95. Alle notazioni ivi usate si fa qui riferimento.

2. - Dato il grafico della funzione $y = V(\vartheta)$ in coordinate cartesiane $\{\vartheta, y\}$, si consideri il particolare sistema di coordinate $\{\xi, \eta\}$ che si ottiene mediante la trasformazione:

$$\xi = H(\vartheta) , \quad \eta = y$$

Per ogni valore di t , allora, alla curva $y = V(t - \vartheta)$ corrisponderà, nella rappresentazione $\{\xi, \eta\}$, una curva v_t . L'area A_t compresa fra v_t e gli assi ξ, η , misura il valore $W(t)$, (fig. 1).

Difatti A_t è composta di tante aree elementari $d\omega$, o striscioline, ottenibili con rette dividenti parallele all'asse η . Ogni elemento $d\omega$ si estende sull'ascissa per dH , e la sua altezza media vale $z = V(t - \vartheta)$.

Talchè si ha:

$$A_t = \int_0^{A_t} d\omega = \int_0^t V(t - \vartheta) dH(\vartheta) = W(t) ; \quad \text{c. d. d.}$$

3. Ciò posto, per la valutazione planimetrica della [2] si può procedere praticamente come segue. Fissato un intervallo temporale ε (pic-

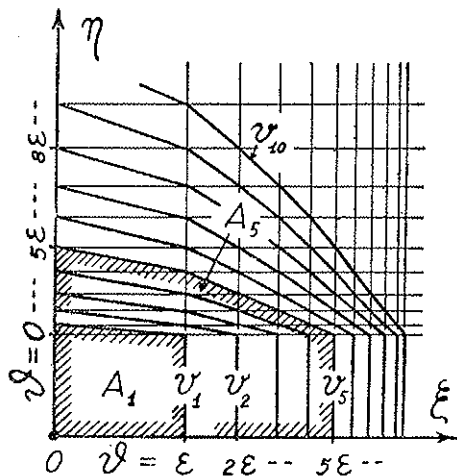


FIG. 2.

colo compatibilmente col graficismo da impiegare nel disegno) si considerino i tempi in progressione aritmetica: $\mathfrak{S}_j = j \times \varepsilon$, ($j = 0, 1, 2, \dots$). Si portino in ascissa ξ i valori $H(\mathfrak{S}_j)$, e in ordinata η i valori $V(\mathfrak{S}_j)$, (fig. 2). Per i punti così ottenuti su ciascun asse, si conducano le parallele all'altro asse. Si traccino quindi le spezzate v_j come nella figura 2 è mostrato in modo ovvio ⁽¹⁾.

Si noti che ogni spezzata v_j (la quale tende ad una curva se $\varepsilon \rightarrow 0$) collega, sugli assi, punti relativi ad uno stesso valore $t = j\varepsilon$ di \mathfrak{S} .

Il valore del risultato $W(t)$, per $t = j\varepsilon$, è misurato dall'area A_j (nella figura 2 sono segnate, con tratteggio al contorno, le aree A_4 e A_5). Mediante misura planimetrica delle A_j , può quindi ricavarsi, per punti, l'andamento di $W(t)$.

⁽¹⁾ Nelle figure si è supposto che la $H(t)$ abbia ordinata zero all'origine dei tempi, ossia che la funzione generatrice $G(t)$ non contenga all'origine un elemento impulsivo, ma ciò non è essenziale.

I MATERIALI IGROSCOPICI DELLE PIANTE E LO SVILUPPO DELLE MUFFE (*)

(Con tre figure)

GIUSEPPE GOLA

Accademico Pontificio

SVMMARIVM. — Auctor observat mutationes quantitatis aquae hygroscopicae in plantarum textilibus exsiccatis, et huius aquae rationem cum mucorum incremento, ostendens mucores non posse frui ea aqua, quae textilibus connexa est per hygroscopicitatem, sed ea tantum quae per imbibitionem.

La grande sensibilità all'attacco delle muffe che si verifica nelle droghe vegetali, e in genere negli organi erbacei essiccati, si manifesta con una certa variabilità che appare legata allo stato igrometrico dell'aria e alle sue oscillazioni.

Accade spesso che droghe essiccate completamente sino a divenire fragili « rinvengano », per così dire, se lasciate all'aria, assumendo una flessibilità ed un evidente stato di umidità senza subire attacchi di muffe, mentre altri campioni, in condizioni apparentemente eguali, ed anche apparentemente meno ricchi di acqua, sono invasi da rapido intenso sviluppo di muffe.

Anche in colture su tessuti vegetali inumiditi non si ha sempre lo sviluppo di funghi se lo stato igrometrico dell'aria non appare sensibilmente prossimo alla saturazione.

Sappiamo ancora come i legni tenuti nelle cantine o nelle gallerie vadano soggetti a rapido attacco di funghi, mentre ciò non si verifica se appena sia possibile attuare un certo grado di ventilazione.

(*) Nota presentata il 2 maggio 1946.

Sembrerebbe dunque che lo sviluppo di parecchi di tali funghi si abbia a determinare solo in presenza di una saturazione dell'umidità atmosferica.

Particolare oggetto di indagini in questo campo sono state le invasioni di *Merulius* e di poliporei in genere, che provocano il marciume del legname delle travature delle case e delle gallerie; e il problema dello stato igrometrico dell'aria ambiente è stato minutamente studiato.

Ma meno studiato e, a mio avviso, di maggiore importanza, mi sembra sia lo stato di legame dell'acqua col substrato sul quale si hanno a sviluppare i disseminuli dei funghi e la possibilità che questa possa essere utilizzata per lo sviluppo e l'accrescimento dei miceli.

Nello studiare tale argomento ho sperimentato specialmente sopra verdure essiccate, le quali rappresentano un substrato nutritizio ottimo per i funghi: sono infatti povere di tannini, di materiali resinosi o tossici che possono ostacolare l'attecchimento dei saprofiti.

Ho preparato verdure essiccate ad una temperatura non superiore a 40°C. in condizioni, cioè, assai prossime a quelle che si verificano nei moderni processi industriali di essiccamento, e che non possono dar luogo a quei prodotti di natura fenolica che talora si formano a temperature più elevate e tali da costituire fattori ostacolanti lo sviluppo dei saprofiti.

In tal modo ho usato foglie di spinaci, radici di carota, cavolfiore. Tali materiali, essiccati fino a peso costante a 40° senza precauzioni che ne potessero modificare la carica microbica, furono distribuiti in matracci chiusi e paraffinati, nei quali si erano aggiunti o un tubetto con acqua distillata oppure altri con soluzione a diversa concentrazione di acido solforico fino a acido concentrato; le quantità di liquido erano di cc. 1,5 per 4 gr. di sostanza secca.

Tali matracci furono posti in termostato a 22° stabilmente per 10 mesi. Dopo un così lungo periodo il materiale non mostrò alcuna traccia di ammuffimento: evidentemente se si poteva pensare che la tensione di vapore delle soluzioni solforiche concentrate poteva determinare una eccessiva secchezza dell'aria limitata nei matracci, ciò non poteva essere per i campioni in presenza di acqua distillata.

Una porzione degli stessi campioni dopo un tale periodo, tolta dal termostato, fu collocata in un laboratorio in un locale a nord ad

una temperatura media di 14°C. e dove le oscillazioni erano contenute in limiti abbastanza ristretti. Dopo due mesi non si verificò alcuna comparsa di muffe: così che una nuova serie di materiali rimasti in termostato per 12 mesi fu portata in laboratorio sopra un tavolo esposto a sud, dove la temperatura oscillava d'inverno tra i 12° e 28° a seconda dell'irradiazione solare.

In tali condizioni avveniva di osservare sulle pareti di alcuni matracci delle goccioline di acqua di condensazione, ciò che non si era mai verificato nelle precedenti condizioni di esperienza.

Solamente nei matracci nei quali si erano osservate le goccioline di acqua sulle pareti si svilupparono entro pochissimi giorni abbondanti muffe.

Le foglie di spinaci furono le prime ad esserne invase, seguirono in breve le carote: i cavoli non ammuffirono neppure in tali condizioni. È da osservare che la quantità di liquido posto nei matracci era di cc. 1,5, in misura quindi insufficiente per saturare la capacità igroscopica della quantità di cavolfiori posta nei matracci.

È evidente che lo sviluppo delle muffe non poteva aver luogo che in presenza di acqua in una certa condizione, la quale non si poteva verificare che dopo saturato il potere igroscopico dei tessuti stessi.

Solamente l'avvenuta distillazione di acqua in seguito agli squilibri termici, cioè, in pratica, un apporto di acqua liquida sui tessuti vegetali, poteva apportare a questi quella quantità di acqua che è necessaria per lo sviluppo dei saprofiti.

La serie di esperienze fu ripetuta adoperando, anziché soluzioni solforiche, diluizioni diverse di glicerina, delle quali era facile seguire, colle variazioni dell'indice refrattometrico, la tensione di vapore. I materiali vegetali differivano da quelli precedentemente adoperati solo per essere stati, dopo prolungato essiccamento a 45°, tenuti in diversi ambienti igrometrici, così da potere gli uni assorbire acqua in misura diversa dagli altri. Poiché di ciascun campione in esperimento era noto il peso secco iniziale, si potevano, alla fine dell'esperienza conoscere:

a) le percentuali di acqua assorbita durante il periodo di permanenza all'aria libera e durante quella in matraccio chiuso in presenza di soluzioni gliceriche;

b) la concentrazione delle soluzioni gliceriche prima e dopo l'esperienza e quindi la quantità di acqua scambiata tra vegetali e soluzioni gliceriche ambientali;

c) la tensione di vapore che, per effetto della glicerina, si trovava nei matracci in principio e alla fine dell'esperienza;

d) le condizioni igrometriche di equilibrio tra soluzioni gliceriche e tessuti vegetali.

I materiali così disposti vennero tenuti per sei mesi in termostato a 20°-22° senza che, anche in presenza di acqua pura, si avesse mai a verificare alcun ammuffimento; alla fine dell'esperienza, dopo di aver raccolto i dati sopraindicati, i materiali furono posti in condizioni di assai ampie escursioni termiche, come fu sopra accennato, ed allora, colla stessa successione (dapprima le foglie di spinaci, poi le carote e nulla si verificò nei cavolfiori), si verificarono in pochi giorni gli sviluppi di muffe.

È evidente che tra soluzioni gliceriche e tessuti vegetali si verifica immediatamente un gradiente igrometrico, mediante il quale ha luogo una distillazione molecolare tra tessuti e soluzioni fino a raggiungere un equilibrio.

Se si ha cura di non eccedere nella quantità di soluzione glicerica si verifica un momento nel quale la soluzione non è più in grado di cedere nuova acqua all'aria e quindi al tessuto, e questo a sua volta non è ancora saturato di acqua.

Senza riferire le tabelle e i numeri che sarebbero ineomodi a leggere, i grafici riportati ci dimostrano come, partendo dalle più diverse concentrazioni di glicerina e da tessuti più o meno imbibiti di acqua igroscopica, si arrivi, dopo un certo tempo, ad una condizione di equilibrio che è sensibilmente eguale qualunque sia il termine di partenza, e che si aggira intorno al valore di una soluzione glicerina avente un indice di rifrazione di 1,452, cioè una concentrazione di circa 86 % di glicerina. Tale valore è sensibilmente eguale per i tre tipi di organi che ho sperimentato.

I risultati sono alquanto uniformi per gli spinaci e la carota, oscillazioni più ampie si verificano per i cavolfiori; nei primi i tessuti sono omogeneamente ricchi di elementi parenchimatici; nel cavolfiore i campioni non erano così omogenei, poichè in alcuni erano prevalenti gli abbozzi florali, in altri le porzioni peduncolari, le quali

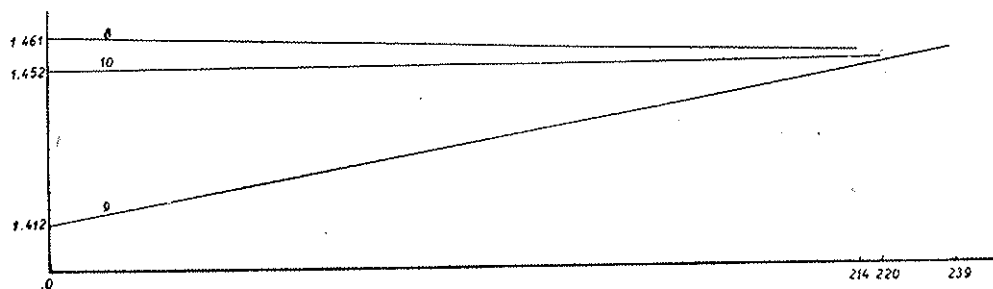


FIG. 1.
Radici di *Daucus Carota*.

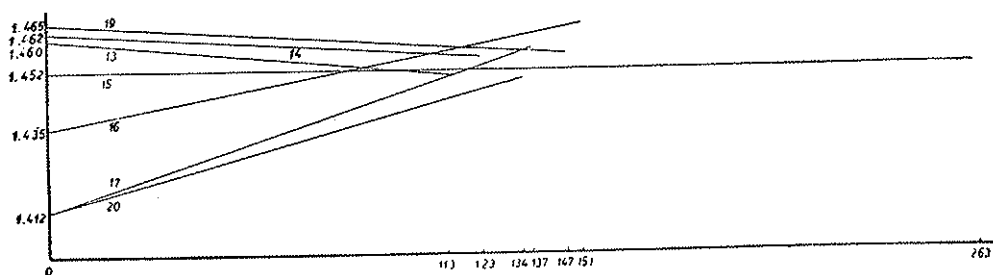


FIG. 2.
Foglio di *Spinacia oleracea*.

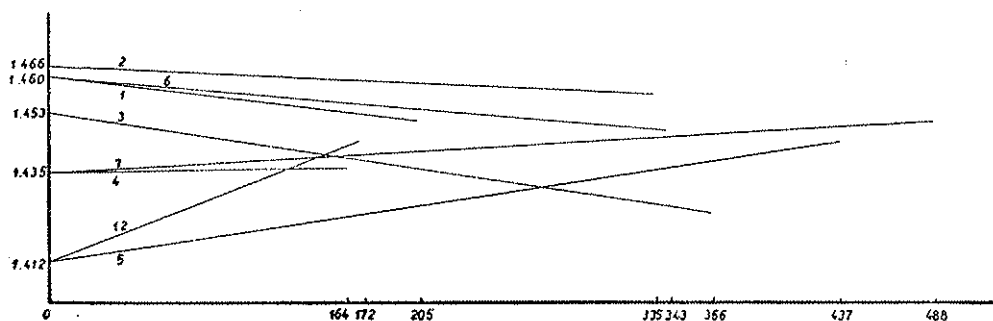


FIG. 3.
Infiorescenza di *Brassica oleracea*.

SPIEGAZIONI DELLE FIGURE. - I tre grafici rappresentano le variazioni delle concentrazioni di glicerina e del peso dei tessuti all'inizio e alla fine dell'esperienza. Sulle ordinate sono segnate le concentrazioni di glicerina rappresentate dall'indice di rifrazione; sulle ascisse i pesi in centigrammi di materiali sperimentati.

sono ricche di elementi meccanici aventi da secchi una consistenza quasi cornea e da freschi una singolare e caratteristica elasticità. La diversa prevalenza dell'uno e dell'altro tipo di tessuti ha probabilmente dato luogo alla disformità di risultati.

È noto come nei tessuti vegetali i materiali igroscopici vi siano diffusissimi ed abbiano la capacità di fissare acqua con notevole energia; l'energia colla quale tale fissazione ha luogo è capace di portare le soluzioni di glicerina fino a concentrazioni notevoli.

Fino a quando non si sia superato il limite di questo legame « tessuti acqua », e che non è dipendente dalla vitalità delle cellule, i disseminuli dei funghi non possono germinare; ma neppure i tessuti stessi sono in grado di sottrarre all'aria ambiente acqua in misura maggiore a quella di cui siano capaci per igroscopicità. Occorre l'apporto di acqua liquida, quale è quella che si forma per condensazione durante sbalzi termici, perchè si abbia a superare il limite minimo di acqua sufficiente per lo sviluppo dei funghi.

È ancora da considerare quali siano i rapporti tra tali condizioni di umidità dell'aria ambiente e lo sviluppo dei funghi; è il contenuto di acqua del substrato nutritizio o quello dell'aria che regolano da tale sviluppo?

Il problema è già stato da parecchi preso in esame, ma mi sembra si possano ancora sviluppare delle ricerche in proposito.

Ho eseguito un'altra serie di esperienze: in una serie di provette da colture microbiche avevo posto 10, 9, 8 ecc. gocce di glicerina addizionate rispettivamente di 0, 1, 2 ecc. gocce di acqua distillata in modo da avere delle concentrazioni gradualmente scalari, delle quali avevo determinato refrattometricamente il valore esatto.

Sospeso poi in ogni provetta un dado di carota fresca e tappata la provetta con sughero, esse venivano poi sterilizzate in autoclave; poi le provette venivano lasciate a sè per alcuni giorni onde si stabilisse un equilibrio tra acqua dei tessuti e acqua delle soluzioni gliceriche; in pochi giorni era dato osservare come in alcuni tubetti i dadi di tessuti apparivano raggrinzati, in altri no, e ciò in relazione colla concentrazione delle soluzioni gliceriche ambientali; allora su ciascun dado si seminavano dei conidi di *Aspergillus fumigatus*.

Lo sviluppo delle muffe era alquanto ineguale: tutte le provette contenevamo soluzioni di glicerina in concentrazioni superiori al 60 %

all'inizio della prova, e al 50 % dopo stabilito l'equilibrio testè accennato, non mostravano alcuno sviluppo di muffa, il quale era invece intensissimo nelle altre provette, nelle quali il rapporto acqua-glicerina era disceso sotto al 50 %.

Ho ripetuto i saggi sopra una serie di altri materiali vegetali: lembi fogliari di *Tecoma radicans*, *Bohemeria nivea*, *Ipomaea Bona Nox*, *Dahlia*, *Eulalia japonica*, *Gingko biloba*, *Heliopsis scabra*, *Ilex Aquifolium*, *Mimosa Julibrissin*, *Nymphaea alba*, *Nymphaea stellata*, *Oxalis corniculata*, *Sagittaria montevidensis*, *Pontederia crassipes* e *Solanum Lycopersicum* e relativi picciuoli, corolle di *Tecoma* e di *Ipomaea* sopra citate; rametti giovani di *Gingko*, *Heliopsis*, *Ilex*, *Mimosa*, sopra ricordati, semi di frumento, girasole, piselli e giusquiamo, foglie carpellari ben mature di fagiolo e giusquiamo. Essi erano stati distribuiti in tre lotti a concentrazioni differenti di glicerina, da quella anidra a quella più o meno idratata; materiali appena tratti dalla stufa di essiccamento e materiali lasciati un po' rinvenire all'aria.

In tutti ho avuto nettamente ripetute le variazioni di concentrazione delle soluzioni gliceriche fino a convergere verso una concentrazione comune per i tre lotti. Cioè un comportamento perfettamente eguale a quello dei campioni precedenti e più completamente studiati.

Irregolarissimi riuscirono i risultati riguardanti i carpelli arcimaturi di fagiolo e di giusquiamo stati da lungo tempo esposti all'aria, nei quali i materiali igroscopici costituenti le membrane (verosimilmente le pectine), erano già andati fortemente deteriorati.

Ritengo perciò di poter concludere sopra alcuni dei fatti osservati.

Anzitutto la germinazione delle spore delle muffe e lo sviluppo successivo del micelio è dovuto all'assorbimento di acqua libera. L'acqua che è contenuta nei tessuti vegetali, anche se morti, deve essere considerata sotto due forme distinte; l'una legata come materiale assorbito dai tessuti vegetali stessi e come tale non è suscettibile di separarsene che come vapore quando vi siano le necessarie condizioni ambientali; l'altra è libera e rappresenta un materiale d'imbibizione; questa può contenere in misura varia dei materiali disciolti, cosicchè tali soluzioni più o meno diluite sono passibili di penetrare nelle cellule vive, per esempio di microorganismi, in conformità delle leggi sulla permeabilità della plasma vegetale; leggi comunque dominate dal fat-

tore osmotico, secondo il quale soluzioni a forte concentrazione non possono penetrare nelle cellule vive (sciropi, canditi, salamoie, ecc.).

L'ulteriore sviluppo dei miceli dei funghi germinati non può aver luogo che se vi sia a disposizione altra quantità di acqua libera che possa penetrare nelle cellule assorbenti del micelio.

Quanto alle condizioni nelle quali un tessuto vegetale seccato diviene capace di contenere acqua libera, esse sono determinate dalle condizioni igrometriche ambientali.

Per precisare: i rapporti continuamente variabili tra tessuti cellulari essiccati e umidità atmosferica portano ad un continuo scambio di acqua tra le parti; ma il potere fissatore dell'acqua per parte dei vegetali, si arresta al limite della capacità igroscopica dei tessuti, e non si può mai verificare, da parte dei tessuti, una fissazione di acqua superiore alla loro capacità igroscopica e tale da divenire « libera ». Quando il tessuto si inumidisca di quel tanto da possedere acqua libera, ciò avviene per il semplice fatto fisico della condensazione dell'umidità atmosferica conseguente a rapidi abbassamenti di temperatura.

SINTESI BIOLOGICA DELLA TREONINA (*)

A. ROSSI FANELLI

SYMMARIUM. — Cum KÖGL et BORG (1941) suspicati sint activationem fermentationis alchoolicae a glycina productam oriri ex huius mutatione in treoninam, Auctor demonstrat glycynam, saccaromycetis opportuna ratione incubatam, mutari in treoninam ex dimidia circiter parte. Censet Auctor treoninam ita obtentam, esse formam laevam naturalem. Etiam acidus pantotenicus excitat fermentationem alchoolicam, treoninae synthesim fovens.

I. - INTRODUZIONE E SCOPO DELLE RICERCHE (1)

EULER e coll. nel 1924 scoprirono nel succo di lievito bollito un nuovo fattore che denominarono fattore Z; esso aveva la proprietà di favorire la fermentazione alchoolica del lievito senza produrre contemporaneo aumento delle cellule. Gli stessi Autori dimostrarono subito che il fattore Z era caratterizzato dalla grande stabilità all'azione del calore, degli acidi e degli alcali e che era diverso dalla cozimasi. La scoperta di questo nuovo fattore nel lievito provocò subito una vasta fioritura di ricerche atte a individuare ed isolare il fattore stesso.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gaetano Quagliariello il 14 giugno 1945.

(1) Le spese per queste ricerche sono state sostenute dalla Commissione per lo studio dei Problemi dell'Alimentazione. Ringrazio vivamente S.E. il prof. Quagliariello, direttore dell'Istituto di Chimica Biologica della R. Università di Napoli, che con tale aiuto e con la larga e cortese ospitalità concessami nel suo Istituto, mi ha permesso di completare queste ricerche che avevo iniziato nell'Istituto di Chimica Biologica della R. Università di Pavia.

MYRBÄCH e EULER [2] esclusero che esso potesse identificarsi con il triptofano, l'istidina, l'alanina e che l'attività dell'estratto di lievito dovesse attribuirsi al suo alto contenuto in esosofosfato. Una serie di ricerche fu eseguita nell'Istituto di Stoccolma [3] per differenziare il fattore Z dal Bios e dagli altri costituenti del complesso B e per cercare con metodi di arricchimento di isolare ed individuare il composto stesso. Queste ricerche riuscirono, per altro, solo a dimostrare che il fattore è ubiquitario nel mondo animale e vegetale, come i componenti del Bios, e in prove di arricchimento si riuscì ad ottenere un preparato appena 8 volte più attivo del prodotto di partenza. PHILIPSON [4], della stessa scuola, dimostrò poi che il fattore Z non poteva identificarsi con l'aneurina nè con l'acido nicotinico.

MYRBÄCH e coll. [5] in una prima serie di ricerche avevano osservato che il lievito secco non si lasciava attivare dal fattore Z. Essi pensarono perciò che l'azione di questo fattore consistesse in una modificazione della permeabilità cellulare. Ma gli stessi Autori sperimentando con razze diverse di lievito constatarono che alcuni preparati di lievito secco venivano attivati dal fattore Z. La diversità dei risultati potrebbe esser dovuta al fatto che i preparati di lievito secco contengono ancora un numero più o meno elevato di cellule vive; la questione quindi se il fattore Z è capace di attivare la fermentazione di cellule morte, non più capaci cioè di riprodursi, rimane tuttora aperta. Nel 1934 BORCHARDT e PRINGSHEIM [6] riuscirono ad ottenere, partendo dal lievito secco sgrassato, un preparato 100 volte più concentrato e poco dopo KÖGL e coll. [7] partendo dalla « marmite », un preparato circa 10.000 volte più attivo. Nello stesso anno EULER e LARSON [8], studiando comparativamente le proprietà del Bios e del fattore Z, giunsero alla conclusione che quest'ultimo doveva avere una massa molecolare di 200 circa. Mentre PHILIPSON [9] della stessa scuola credette di identificare il fattore Z con il Bios II di LUCAS [10].

Subito dopo però VAN HULSEN (della scuola di KÖGL) [11] trovò del tutto inattivo come fattore Z l'estere metilico della biotina (cristallizzato a partire dal Bios II). Le ricerche erano giunte a questo punto quando nel 1941 KÖGL e BORG [12] pubblicarono i risultati assai interessanti delle loro ricerche. Questi Autori, riprendendo antiche osservazioni di MYRBÄCH e coll., sperimentarono l'azione sulla fermen-

tazione alcoolica di miscele di aminoacidi che avevano la seguente composizione:

- 1) l(+) ac. aspartico, glicina, l(+) isoleucina, l(-) tirosina, l(+) valina.
- 2) l(+) arginina, l(+) ac. glutammico, l(-)leucina, d, l-fenilalanina, d, l-prolina.
- 3) l(+) alanina, l(-) cistina, l(-) istidina, d, l-lisina, l(-) ossiprolina.

Gli Autori trovarono l'inatteso risultato che la miscela 1) produceva un aumento della fermentazione che andava fino al 100 %. Incoraggiati da questi primi successi gli Autori saggiarono separatamente i vari aminoacidi componenti la miscela 1) trovando che la glicina, tra tutti i componenti, si dimostrava straordinariamente attiva, non solo, ma l'effetto dell'aminoacido si verificava non subito, ma dopo un periodo di induzione più o meno lungo raggiungendo un massimo dopo la 1^a h. Estendendo le ricerche ad altri aminoacidi allora conosciuti, gli Autori trovarono che solo la treonina, scoperto nel 1935 da Rose, mostrava un'azione dello stesso ordine di grandezza di quella della glicina, ma che tra i due aminoacidi esisteva una sostanziale differenza: mentre la glicina per agire aveva bisogno di un periodo di induzione più o meno lungo, la treonina si mostrava attiva appena aggiunta. Gli Autori conclusero, per questo comportamento, che il fattore Z molto probabilmente doveva identificarsi con la treonina ed emisero l'ipotesi che questa veniva sintetizzata dal lievito a partire dalla glicina. Purtroppo però gli Autori non riuscirono a dimostrare sperimentalmente questa loro supposizione isolando o determinando la treonina eventualmente formatasi, e conclusero le loro ricerche affermando che « die Bildung von Threonin aus Glycin wenigstens auf biologischem Wege wahrscheinlich zu machen ».

L'ipotesi di KÖGL e BORG mi è sembrata molto interessante ed ho eseguite le presenti ricerche con le quali è stato dimostrato, per via chimica, la sintesi biologica della treonina dalla glicina.

Dopo di essermi assicurato che il lievito di birra a mia disposizione ⁽¹⁾ era sensibile all'azione del fattore Z, ho fatto agire, in opportune condizioni, una sospensione di lievito su di una soluzione di gli-

(1) Il lievito mi è stato gentilmente fornito dalle Birrerie Meridionali di Napoli, alle quali rivolgo il più vivo ringraziamento.

cina in apparecchi di Warburg seguendo il corso della fermentazione dallo sviluppo di CO_2 nel tempo e determinando poi alla fine dell'esperienza la treonina formata, adoperando un metodo già sperimentato e trovato esatto e specifico. Ho, infine, studiato la ripartizione della treonina sintetizzata tra cellule e mezzo nutritivo e l'azione dell'ac. pantotenico sulla sintesi stessa.

II. - TECNICA SPERIMENTALE

Per le prove di fermentazione ho seguito le indicazioni di EULER e quelle di KÖGL apportando qualche modifica come verrà esposto più sotto.

Come terreno nutritivo ho impiegato una soluzione così costituita:

Glucoso	gr. 100	K_2HPO_4	gr. 0,16
$(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$	» 3	NaCl	» 0,5
$\text{MgSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$	» 0,7	$\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$	» 0,4
KH_2PO_4	» 1		

a 1 litro con acqua distillata. La soluzione veniva sterilizzata mediante tindalizzazione.

Come apparecchi ho adoperato comuni vasetti di Warburg di forma conica con diverticolo laterale della capacità di circa 30 cc e come liquido di livello nei manometri il liquido di Brodie. La temperatura durante l'esperienza è stata di 30° , l'agitazione di circa 100 escursioni al minuto.

1. - *Determinazioni del numero delle cellule.* Ho proceduto nel seguente modo (consigliato da PHILIPSON [13]). Da ogni prova si preleva esattamente, subito dopo di averla allestita, 0,4 cc di sospensione e si versa in un palloncino da 10 cc contenente 5 cc di una soluzione di sublimato al 0,1%, si agita e si porta a volume con la stessa soluzione, se ne preleva una goccia che viene posta nella camera del contaglobuli di Thoma-Zeiss. Dopo 5' si esegue la conta delle cellule con la tecnica usuale. Finita l'esperienza si preleva ancora da ogni vasetto

0,4 cc di sospensione e si determina il numero delle cellule con lo stesso procedimento. L'aumento percentuale (a) delle cellule è così calcolato:

$$a = \frac{b - c}{c} \times 100.$$

dove c e b indicano il numero delle cellule all'inizio e alla fine dell'esperienza.

2. - *Metodo per il dosaggio della treonina* ⁽¹⁾. Il metodo si fonda sulla ossidazione della treonina ad aldeide acetica con tetracetato di Pb e determinazione fotometrica dell'aldeide.

Reagenti:

1) Preparazione del tetracetato di Pb (modificazione del procedimento di DIMROTH e SCHWEIZER [15]: In un pallone a 3 colli provvisto di un termometro, un'agitatore meccanico e di un tubo ripiegato a squadra che peschi fino al fondo del pallone, si pongono 100 cc di ac. acetico glaciale e 25 cc di anidride acetica, si riscalda a b. m. fino a 65°, si mette in moto l'agitatore e si lascia passare, attraverso il tubo a squadra una moderata corrente di cloro secco ⁽²⁾. Si introducono ora gr. 20 di Pb₃O₄ (seccati in stufa a 150° per 1-2 h) in 5 porzioni approssimativamente eguali attendendo prima di ogni nuova aggiunta che il colore che si forma sia scomparso. Si porta ora la temperatura a 75-80° (una temperatura maggiore riduce notevolmente il rendimento della reazione) e si lascia ancora per 90' circa. Finita la reazione si filtra rapidamente la sospensione ancora calda attraverso un filtro riscaldato a 70° circa. Il filtrato si lascia raffreddare in pesafiltro. A freddo cristallizza il tetracetato in forma di lunghi aghi splendenti che all'aria rapidamente si arrossano e si decompongono. Il residuo solido rimasto sul filtro è riportato nel pallone a 3 colli agitato per 15-20' a 70-80° con altri 100 cc di ac. acetico + 25 cc di anidride acetica. La sospensione viene rapidamente filtrata a caldo e lasciata cri-

⁽¹⁾ Adattamento e modificazione del procedimento di BLOCK e BOLLING [14].

⁽²⁾ Per ottenere facilmente in laboratorio cloro secco, in una boccia di svolgimento fornita di imbuto separatore, si introduce permanganato di potassio in sostanza finemente polverato, dall'imbuto si fa gocciolare poi cautamente HCl conc.; si sviluppa così Cl in quantità facilmente regolabile.

stallizzare come prima. Il residuo viene trattato ancora una volta con ac. acetico ed anidride acetica come sopra. I cristalli delle varie preparazioni si raccolgono alla pompa su di un imbuto di Büchner, si lavano con poco ac. acetico, si pressano bene sul filtro e si portano subito in essiccatore dove si conservano nel vuoto. Tutte queste operazioni devono venire eseguite molto rapidamente onde evitare la decomposizione dei cristalli. Con questo procedimento è possibile ottenere da 20 gr. di Pb_3O_4 circa 15 gr. di tetracetato.

2) Preparazione del p-idrossidifenile: il procedimento si fonda sulla preparazione, col metodo di HIRSCH [16] modificato in qualche punto, del para + orto-idrossidifenile e nella separazione del composto para a mezzo della cristallizzazione frazionata dall'ac. acetico. Ed ecco come si procede: in una beuta da circa 250 cc tenuta in ghiaccio si misurano 5 cc di anilina di fresco distillata in corrente di vapore, 50 cc di acqua e 15 cc di HCl conc., si lascia raffreddare poi si aggiunge a gocce agitando una soluzione ottenuta sciogliendo gr. 3,75 di $NaNO_2$ in 7,5 cc di acqua. Al sale di diazonio così ottenuto si aggiungono gr. 15 di fenolo sciolti a caldo con aggiunta di 1,5 cc di acqua, si agita in agitatore elettrico per 1 h. Dopo tale periodo di tempo si interrompe l'agitazione si trasferisce il liquido in un imbuto separatore: si formano 2 strati, uno sottostante fenolico intensamente colorato in marrone e uno soprastante acquoso di colore gialletto. La soluzione fenolica si mette a parte e la parte acquosa si agita ancora 4 volte per 1 h con 5 gr. di fenolo ogni volta. Un'aliquota delle varie frazioni fenoliche, riunite assieme, si trasferisce in un recipiente di vetro fornito di un refrigerante a ricadere con giuntura a smeriglio a si riscalda a b. m. cautamente a 50-60° fino a inizio di reazione (forte produzione di gas). Terminato lo sviluppo di gas si aggiunge dal refrigerante il resto del liquido fenolico a piccole porzioni attendendo ogni volta che sia terminato lo sviluppo di gas. Si porta ora la temperatura a 90° e si riscalda per 2 h. Si forma così ancora un poco di acqua che si allontana. Il liquido si sottopone ora a distillazione frazionata: fino a 200° distilla acqua e fenolo. Si raccoglie la frazione tra 200-300°. Poichè il distillato solidifica rapidamente è opportuno riscaldare cautamente l'apparecchio di distillazione onde evitare l'ostruzione del tubo di deflusso. Il distillato si scioglie in 15 cc. di toluolo a caldo e si trasferisce in un imbuto separatore, si aggiunge

un eguale volume di una soluzione di NaOH 5%, si riscalda a 50-60° e si agita per 10-15'. Si ha un'intensa colorazione azzurra della fase acquosa. Si ripete l'estrazione a caldo della soluzione toluolica con NaOH 5% fino a che questa non dia più precipitato per aggiunta di HCl conc. Ai liquidi di estrazione riuniti si aggiunge ac. cloridrico conc. fino a completa precipitazione. Il precipitato si raccoglie sul filtro Jena (G4) alla pompa, si lava con soluzione acquosa di ac. cloridrico, si pressa bene e si scioglie in ac. acetico conc. Si lascia in in ghiacciaia. In questa maniera cristallizza solo il composto *para*, mentre l'*orto* resta nelle acque madri. I cristalli si raccolgono su filtro di vetro e si lavano con poco ac. acetico. Il prodotto della prima cristallizzazione fonde in genere intorno a 145°. Si ripete la cristallizzazione dall'acido acetico fino ad ottenere un composto a punto di fusione costante ed eguale 164-165°. Il p-idrossidifenile così ottenuto si presenta sotto forma di aghi bianchi splendenti come seta, isolati o aggruppati a fascio, solubili in acetone, etere, cloroformio, alcool etilico, alcool metilico, alcool n-butilico, tetracloruro di carbonio, insolubile in acqua, ac. solforico conc.

3) *Ac. acetico*. Per ottenere un ac. acetico che non dia prodotti che reagiscono con p-idrossidifenile bisogna bollire l'acido puro del commercio con 1% circa di bicromato potassico a ricadere per 7-8 h e distillarlo poi in apparecchio completamente di vetro (evitare i tappi di gomma o di sughero).

4) *Ac. solforico*. Poichè la reazione colorata dell'aldeide acetica col p-idrossidifenile è più sensibile e completa in presenza di tracce di Pb è opportuno tenere l'ac. solforico puro del commercio su toritura di Pb puro per 4-5 h prima di adoperarlo per la determinazione.

Descrizione dell'apparecchio per la determinazione della treonina. - L'apparecchio è quello riportato nella fig. 1. Il tubo I della lunghezza di circa cm. 20 e del diametro di 25 mm. contiene 20-25 cc di H₂SO₄ conc. e serve per fissare eventuali impurità dell'aria. Il tubo II è vuoto ed è adibito a sequestrare eventuali tracce di ac. solforico aspirate nel tubo dal tubo I. Il recipiente III in cui avviene l'ossidazione della treonina ad acetaldeide, è costituito da un provettone della lunghezza di circa 25 cm. e del diametro di 30 mm. con chiusura a smeriglio fornito di un sistema di due tubi che permette il passaggio dell'aria nella soluzione contenuta nel recipiente III che deve essere

mantenuto a 30°. Il recipiente IV viene immerso in un bagno a 3-4° e serve per fare condensare i vapori di ac. acetico e di acqua provenienti dal tubo III. Nel tubo V, che è simile per costruzione e dimensione al tubo I e II, si pongono perline di NaOH fino all'altezza di circa 10 cm., per fissare i vapori di acido eventualmente ancora presenti. Il tubo VI è simile al tubo III, in esso si introducono 10 cc di H_2SO_4 (reagente n. 4) e 5 o 6 gocce di acqua e dopo raffredda-

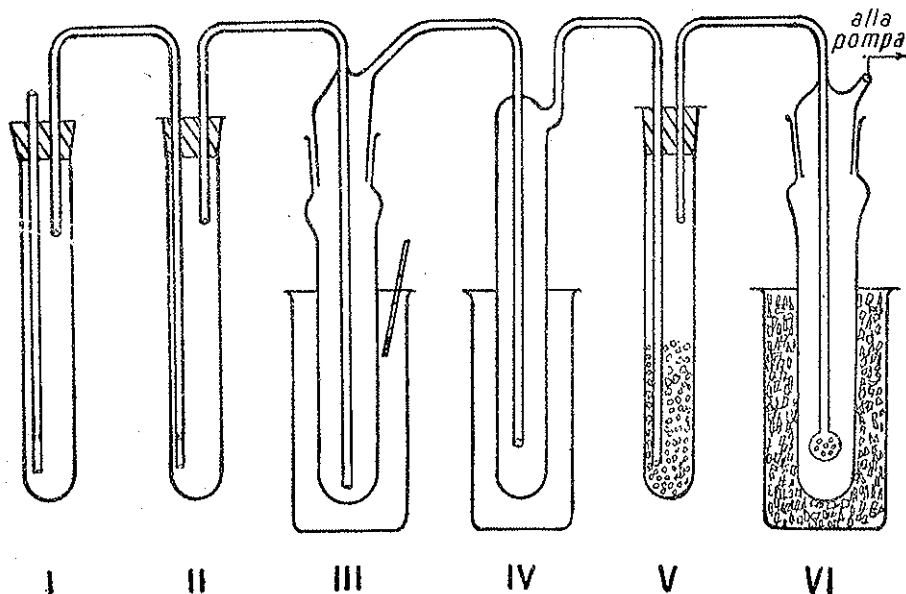


FIG. 1.

mento 20 mg di p-idrossidifenile che resta in sospensione nel liquido. Il tubo durante la determinazione viene tenuto in un recipiente contenente ghiaccio fondente. Le connessioni tra i vari tubi devono essere tutti in vetro tenute assieme da tubi di gomma a pressione. La corrente di aria durante l'aspirazione viene mantenuta costante.

Procedimento. - Per la determinazione della treonina si procede nel modo seguente: un volume noto della soluzione in esame viene misurato nel tubo di ossidazione dell'apparecchio e portato a secchezza tenendo il tubo stesso a b.m. bollente e aspirando l'aria mediante un tubo ripiegato a squadra connesso con una pompa aspirante e che giunge a pochi mm. dalla superficie del liquido. Con questo disposi-

tivo è possibile portare a secchezza il liquido in pochi minuti. Il residuo si scioglie in ac. acetico (reagente n. 3), si aggiunge 1 gr. di tetracetato di Pb, si porta il volume a 25 cc con ac. acetico (reagente n. 3), si immerge il tubo in bagno a 30° si fa passare una moderata corrente di aria per 1 h. Nel tubo VI si sviluppa un colore rosso-viola proporzionale alla quantità di treonina presente nel tubo III. Finita

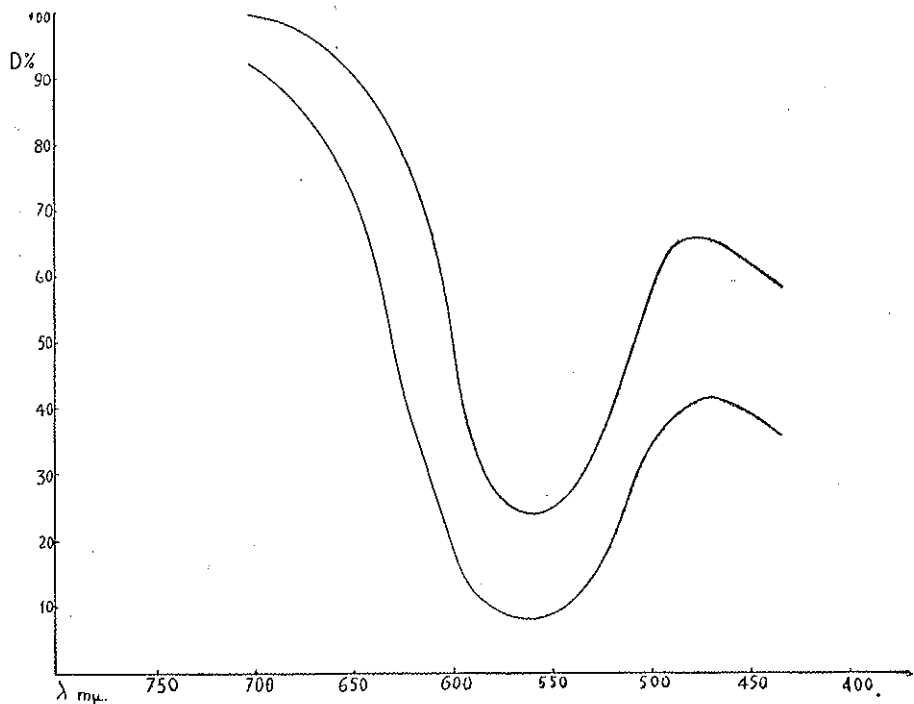


FIG. 2.

l'aereazione il tubo VI è immerso in un b. m. bollente per 2' esatti per eliminare l'eccesso di p-idrossidifenile. Si raffredda a circa 0° e si lascia a temperatura di stanza. Si legge al fotometro di Pulfrich col filtro S 57. Il colore rimane stabile anche dopo 24 h.

Determinazione della curva di assorbimento del colore. — Allo scopo di determinare la zona dello spettro in cui si ha il massimo di assorbimento, ho misurato al fotometro di Pulfrich l'assorbimento luminoso del composto colorato che si forma nella nostra reazione tra $\lambda = 750 \text{ m}\mu$.

a μ 434. I risultati di queste misure sono riportati nella fig. 2. I dati riportati nella grafica dimostrano che il massimo di assorbimento si ha a $\lambda = 570$ μ . Nelle determinazioni della treonina ho perciò impiegato il filtro S 57.

Prove in bianco. — È opportuno prima di ogni serie di determinazione eseguire una prova con i soli reagenti. Quando questi sono sufficientemente puri si sviluppa nel tubo VI una colorazione appena apprezzabile al fotometro. Questo valore viene peraltro sottratto da quello ottenuto nelle prove con treonina. Se l'ac. acetico non è abbastanza puro anche trattato con bicromato dà un valore troppo alto nella prova in bianco. In questo caso è necessario cambiare l'acido.

Con questo procedimento ho determinato la treonina alla fine dell'esperienza sia direttamente nel liquido nutritivo priva di cellule (*trionina libera*) sia dopo idrolisi del mestruo *in toto* (cellule + liquido) = (*treonina totale*).

Treonina libera. — Finita l'esperienza si preleva un determinato volume della sospensione si raffredda in ghiaccio, si centrifuga rapidamente, un'aliquota del liquido limpido privo di cellule (esame microscopico) si misura nel tubo di ossidazione dell'apparecchio per la determinazione della treonina e si porta a secchezza. Sul residuo secco disciolto in ac. acetico (reagente n. 3) si determina la treonina.

Treonina totale. — Ad un'altra aliquota del liquido di reazione si aggiungono subito 5 cc di H_2SO_4 8N e si idrolizza in apparecchio di vetro con refrigerante a ricadere per 20 h circa. Finita l'idrolisi, si trasferisce il liquido quantitativamente in un pallone tarato da 15 o 25 cc e si porta a volume con acqua. Una aliquota si misura in un tubo da centrifuga tarato a 10 cc, si aggiunge acetato di bario (soluzione satura) fino a completa precipitazione dei SO_4 , si porta a volume, si allontana il precipitato di solfato di bario per centrifugazione. Su di un'aliquota del liquido limpido portato a secchezza nel modo sopra esposto e disciolto in ac. acetico si determina la treonina.

La *treonina delle cellule* è calcolata per differenza:

$$[\text{treonina totale}] - [\text{treonina libera}] = [\text{treonina delle cellule}]$$

Esecuzione delle esperienze di fermentazione. — Il lievito viene ripetutamente lavato in recipienti sterili, spremuto su imbuto di Büchner

e conservato in ghiacciaia in pesafiltri sterili. Per ogni esperienza se ne pesa una determinata quantità in una beutina, si addiziona con il liquido nutritivo, si tappa con ovatta sterile e si lascia a temperatura di stanza per circa 20 h. Dopo tale periodo di tempo si rende omogenea la sospensione agitando, se ne preleva un'aliquota, si pone nel vasetto dell'apparecchio di Warburg, si aggiunge un determinato volume delle soluzioni delle sostanze da sperimentare, si congiunge il vasetto al manometro dell'apparecchio che si immerge nel bagno a 30°. Dopo 10-15', raggiunto l'equilibrio di temperatura, si iniziano le letture, per la determinazione della produzione di CO₂, che si ripetono ogni 15'. Per mettere in evidenza l'eventuale aumento della fermentazione, si allestiscono contemporaneamente prove di controllo a cui, oltre la sospensione di lievito, si aggiunge solo un volume corrispondente di acqua.

La percentuale di attivazione viene calcolata nel modo seguente:

$$\text{attivazione per cento} = \frac{(\text{mm}^3 \text{ prova attivata} - \text{mm}^3 \text{ prova controllo})}{\text{mm}^3 \text{ prova controllo}} 100.$$

Alla fine dell'esperienza si staccano i recipienti dai manometri, si preleva un'aliquota della sospensione su cui si esegue la conta delle cellule, e un'altra su cui si determina la treonina.

III. - RISULTATI SPERIMENTALI

1. - FATTORE Z NELL'ESTRATTO DI LIEVITO.

Preparazione dell'estratto di lievito bollito. - 5 gr. di lievito lavato e pressato si sospendono in 10 cc di acqua in un recipiente di vetro munito di refrigerante a ricadere e si lascia a b.m. bollente per 1-1½ h. Dopo raffreddamento si filtra su imbuto di Büchner. Il filtrato limpido, trasferito in una beuta tappata con ovatta si tiene a 100° per 30', si raffredda e si conserva in ghiacciaia. Per saggiare l'attività si allestiscono 4 prove: due con 1 cc di sospensione di lievito (10 mg) + 1,2 cc di H₂O e due con 1 cc di sospensione di lievito + 1 cc di H₂O + 0,2 cc di estratto di lievito. Si segue la produzione di CO₂ facendo letture ogni 15'. All'inizio e alla fine dell'esperienza si determina il numero

delle cellule con la tecnica esposta precedentemente. I risultati di queste esperienze sono riportati nella tabella I.

Come si osserva dai dati riportati nella tabella l'estratto di lievito ha prodotto un'attivazione della fermentazione che va fino all'85%. Mentre però l'extraproduzione di CO_2 che si verifica nei primi 80-90' è

TABELLA I.

Tempo in minuti	mm ³ CO ₂ sviluppati		Attivazione %	Numero delle cellule in milioni	Aumento percentuale delle cellule
	prova in bianco	prova con estrat- to di lievito			
15	190	304	60	150	0
30	210	325	55	—	—
45	200	330	65	—	—
60	180	286	59	156	4
75	215	356	66	—	—
90	207	351	70	168	12
105	202	353	75	—	—
120	195	360	85	173	16

da attribuirsi esclusivamente all'attivazione della fermentazione, perchè il numero di cellule rimane praticamente costante, l'extraproduzione di CO_2 verificatasi successivamente è dovuta anche all'attività di nuove cellule formatasi sotto lo stimolo di fattori specifici contenuti nell'estratto di lievito. Dopo i primi 80-90' infatti si verifica, nelle prove addizionate con lievito un aumento delle cellule che va fino al 15% circa. Questi dati confermano l'osservazione analoga fatta da KÖGL e BORG in presenza di « marmite » [17].

2. - AZIONE DELLA GLICINA SULLA FERMENTAZIONE.

Assicuratomi che le colture di lievito erano sensibili all'azione del fattore Z sono passato a studiare l'azione della glicina sulla fermentazione.

tazione. Le condizioni sperimentali sono state identiche alle precedenti. I risultati sono riportati nella tabella II.

Come si osserva dai dati riportati nella tabella, 250 γ di glicina producono dopo un periodo di induzione di 1 h circa, un'attivazione

TABELLA II.

Tempo in minuti	mm ³ CO ₂ sviluppati			Attivazione %		N.ro delle cellule in milioni		
	prova in bianco	prova con glicina						
		(a)	(b)	(c)	(b)	(c)	(a)	(b)
15	220	218	222	0	0	160	158	162
30	222	230	229	4	4	—	—	—
45	237	243	251	3	4	—	—	—
60	236	318	306	35	30	—	—	—
75	228	319	318	40	48	—	—	—
90	240	351	371	50	55	—	—	—
105	245	362	367	48	50	—	—	—
120	250	368	380	47	52	165	168	169

della fermentazione che va fino al 50% senza aumento contemporaneo delle cellule. Una quantità doppia di glicina non produce un'ulteriore attivazione della fermentazione.

3. - FORMAZIONE DI TREONINA DALLA GLICINA.

Per dimostrare per via chimica la sintesi biologica della treonina dalla glicina, ho fatto le seguenti esperienze: in recipienti dell'apparecchio di Warburg si introducono 1 cc di sospensione di lievito, e 1 cc di una soluzione acquosa di glicina 0,025% e 0,3 cc H₂O. Si connettono i vasetti coi manometri, si immergono nel bagno a 30° e si segue manometricamente lo sviluppo di CO₂ per per 120'.

Altre prove che contengono al posto della soluzione di glicina un egual volume di acqua servono da controllo. Alla fine dell'esperienza

si estraggono gli apparecchi dal bagno e si determina nel liquido il contenuto in treonina totale nel modo esposto sopra. I risultati sono riassunti nella tabella III.

Poichè da 250 γ di glicina si possono ottenere teoricamente 396 γ di treonina i dati riportati nella tabella dimostrano che in questa espe

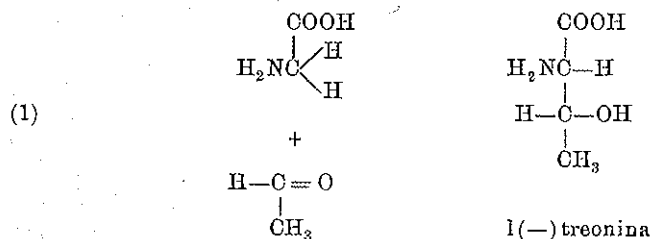
TABELLA III.

Treonina formata	Sintesi %	Extraproduzione CO ₂ mm ³	Attivazione %
215	54	135	50
205	51	125	46
190	48	117	43
180	45	124	44
210	53	130	48
Medie: 200	50	126	46

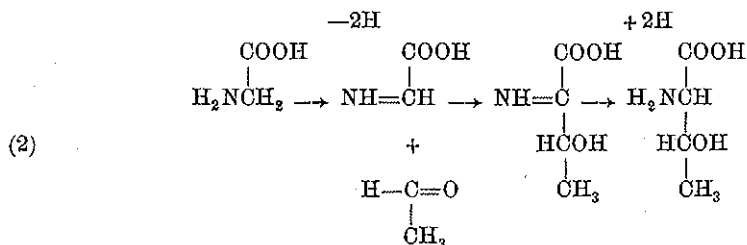
rienza si è ottenuta una sintesi del 50%, circa (nella tabella non sono riferiti i valori della prova in bianco, ma essi sono stati detratti dalle prove con glicina).

Viene così dimostrata la sintesi biologica della treonina.

Resta ancora da chiarire il meccanismo con cui questa sintesi ha luogo. Allo stato attuale delle nostre conoscenze non possiamo che riferirci ai due schemi seguenti (proposti da KÖGL, l. c.):



Secondo questo schema un derivato non ancora noto della glicina verrebbe condensato con una molecola di acetaldeide a treonina mediante l'azione di un'aldolasi.



Secondo lo schema II la glicina verrebbe prima deidrogenata ad acido iminogliossilico, questo poi subirebbe una condensazione aciloinica con una molecola di aldeide acetica allo stato nascente per formare una molecola di treonina.

Dal confronto poi dei miei risultati con quelli ottenuti da KÖGL e BORG si può trarre ancora una interessante conclusione. Tale confronto mi sembra giustificato dal fatto che sia il lievito da me impiegato, sia quello impiegato dagli Autori olandesi risponde all'azione del fattore Z approssimativamente con la stessa intensità. Ora KÖGL e BORG avevano osservato che 200 γ di d, l-treonina producono un'attivazione del 23% e una quantità doppia (400 γ) un'attivazione del 45%, mentre io ho trovato a 200 γ di treonina formata un'attivazione corrispondente al 46% circa. Ora se nella sintesi si fossero formate tutte e due le forme d e l e se queste fossero ambedue attive come fattore Z, 200 γ di treonina avrebbero dovuto produrre un'attivazione eguale a quella ottenuta da KÖGL e BORG con 200 γ di d, l-treonina (= 23%), mentre io ho avuto un'attivazione del 45% eguale a quella ottenuta da KÖGL e BORG con una quantità esattamente doppia. Questo comportamento mi autorizza a pensare che *nella sintesi biologica si forma l-treonina e che delle due forme solo la L sia attiva come fattore Z* ⁽¹⁾.

(1) La treonina esistente in natura ed isolata da ROSE dalla fibrina e dalla caseina ha la stessa configurazione spaziale del d-treoso. Fu perciò dall'Autore designata come d(—) treonina ed assegnata alla serie *destro*. Ma poichè la disposizione del gruppo NH₂ e dell'atomo di idrogeno intorno al C α è uguale a tutti gli aminoacidi naturali, cioè alla serie *levo*, è più opportuno denominare l'aminoacido naturale come l(—)treonina.

4. - RIPARTIZIONE DELLA TREONINA SINTETIZZATA TRA CELLULE E LIQUIDO NUTRITIVO.

KÖGL e BORG nelle citate esperienze in base a sole prove biologiche, misurando cioè l'extraproduzione di CO_2 giungevano alla conclusione che la la treonina, che molto probabilmente si formava dalla glicina, rimane quasi esclusivamente nelle cellule di lievito ed in ogni caso passa nel liquido nutritivo solo in quantità del tutto trascurabili.

Ho ripetute queste esperienze con metodi più sicuri, determinando cioè per via chimica la ripartizione della treonina sintetizzata tra cel-

TABELLA IV.

	Totale γ	Treonina trovata			
		libera		nelle cellule	
		γ	%	γ	%
(¹) Prova di controllo . .	300	7	2	293	98
Prova + glicina . . .	490	160	33	330	67
Treonina sintetizzata .	190	153	80	37	20

lule e liquido esterno nel modo detto sopra. Le medie dei risultati di alcune esperienze sono riassunte nella tabella IV.

Questi risultati dimostrano: 1) Che il lievito fresco (pressato) contiene circa il 3% di treonina (nella sospensione di lievito da me impiegata sono contenuti, infatti, 10 mg. di lievito). 2) Nella sospensione di lievito, allestita nel modo sopra esposto, il 98% della treonina è contenuto nelle cellule, il 2% nel liquido esterno. 3) Della treonina sintetizzata dalla glicina il 20% si trova nelle cellule, l'80% nel liquido esterno.

(¹) La stessa ripartizione è stata trovata in prove eseguite nella sospensione di lievito appena allestita.

5. - AZIONE DELL'AC. PANTOTENICO SULLA FERMENTAZIONE ALCOOLICA E SULLA SINTESI BIOLOGICA DELLA TREONINA.

Era già noto dalle ricerche di WILLIAMS [18] che l'ac. pantotenico (uno dei fattori del filtrato) favorisce la fermentazione alcolica del lievito. KÖGL e BORG nelle loro recenti ricerche avevano osservato che

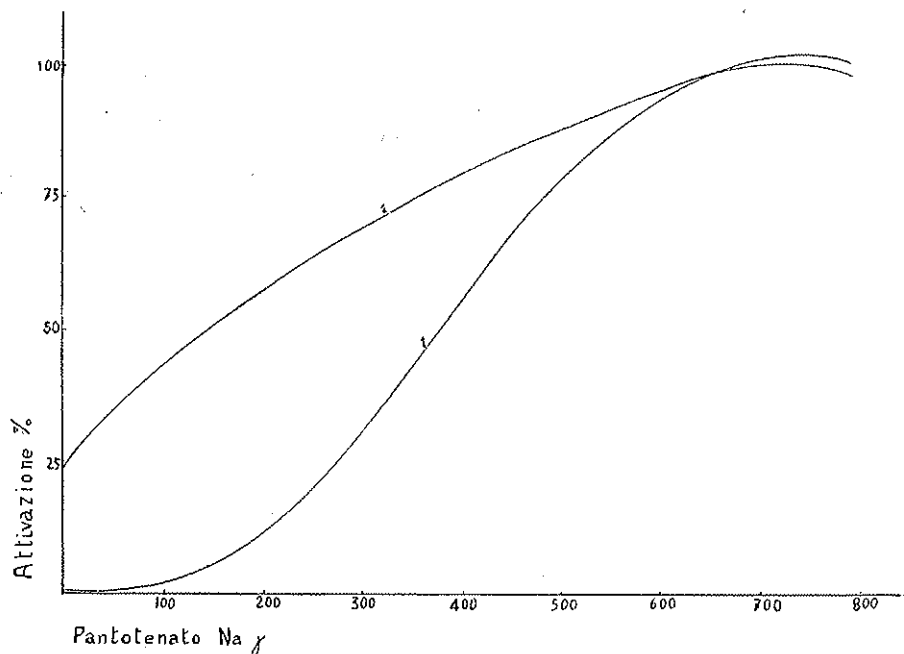


FIG. 3.

varie razze di lievito rispondevano in modo diverso all'azione dell'ac. pantotenico. Così per es. l'aggiunta di 10 mg. di pantotenato di sodio produceva in un lievito un'attivazione della fermentazione del 100%, in un altro un'attivazione del solo 10%. Ho perciò saggiato l'attività dell'ac. pantotenico sul lievito da me impiegato nel modo seguente: un determinato volume di sospensione in liquido nutritivo di lievito lavato viene misurato, assieme ad un noto volume di soluzione di pantotenato di sodio a varia concentrazione, in un vasetto dell'apparecchio di Warburg. Prove a cui si aggiunge un egual volume di acqua ser-

vono da controllo. Nella curva 1 della fig. 3 sono riportati i valori medi di alcune esperienze. Da essa si rileva come l'ac. pantotenico fino alla concentrazione di 100 γ circa non ha azione apprezzabile sulla fermentazione alcoolica, per quantità superiori favorisce la fermentazione fino a produrre un'attivazione del 100% con 700 γ . Quantità maggiori non producono ulteriore attivazione.

Questi risultati sono alquanto diversi da quelli di KÖGL e BORG i quali con 1200 γ di ac. pantotenico non ebbero alcun effetto ed il massimo di attivazione (=100%) venne raggiunto solo con 10.000 γ . Questo diverso comportamento può essere dovuto sia al diverso contenuto di ac. pantotenico dei lieviti impiegati, sia alla loro diversa sensibilità.

Ho inoltre voluto vedere se l'ac. pantotenico facesse aumentare l'attivazione prodotta dalla glicina sulla fermentazione. Ho perciò determinato l'extraproduzione di CO_2 in prove in cui si aggiungeva oltre a 250 γ di glicina quantità variabili di ac. pantotenico. I risultati di queste esperienze sono riportati nella curva 2 della fig. 3. L'andamento di questa curva è molto diverso da quello della curva 1: l'aggiunta di quantità crescenti di ac. pantotenico fa aumentare l'attivazione della sola glicina sino ad un massimo che per quantità di acido eguale a 600-700 γ corrisponde a quello del solo ac. pantotenico. Il tratto più interessante della curva è quello iniziale. Da esso infatti si ricava che l'ac. pantotenico, anche a concentrazioni in cui aggiunto da solo è inattivo, cioè fino a circa 100 γ , è capace di fare aumentare l'attivazione prodotta dalla glicina. Questa extraattivazione va poi diminuendo fino a raggiungere prima la somma delle due attivazioni (attivazione glicina + attivazione ac. pantotenico) e poi quella del solo ac. pantotenico. Questo comportamento ci ha fatto pensare che l'ac. pantotenico potesse avere azione sulla sintesi della treonina. Ho perciò determinato la quantità di questo aminoacido nelle prove in presenza e in assenza di ac. pantotenico ed ho trovato in media della prova con sola glicina 157 γ , nella prova con glicina + ac. pantotenico (10 γ) 204 γ di treonina, un'extra-produzione cioè di 47 γ di treonina corrispondenti ad un aumento del 30 % circa della sintesi ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ In queste esperienze non è stato notato alcun aumento apprezzabile del numero delle cellule.

Questi risultati dimostrano che l'ac. pantotenico favorisce la sintesi biologica della treonina; è anzi probabile che esso sia necessario o addirittura indispensabile alla sintesi stessa. Viene così indicata una nuova funzione di questa importante vitamina e dato un altro esempio di vitamine che intervengono nella sintesi biologica degli aminoacidi.

IV. — CONCLUSIONI

1) Viene confermata la presenza del fattore Z di EULER nell'estratto di lievito e l'attività della glicina sulla fermentazione alcolica prodotta dal lievito.

2) Viene dimostrata la sintesi biologica della treonina a partire dalla glicina. Da 250 γ di glicina si è ottenuta la formazione in media di 200 γ di treonina, una sintesi cioè del 50% circa. Della treonina sintetizzata il 20% si trova nelle cellule di lievito e l'80% nel liquido nutritivo.

3) Nella sintesi biologica si forma solo l(—)treonina che si è dimostrata essere anche la sola forma attiva come fattore Z.

4) Il lievito fresco (pressato) contiene circa il 3% di treonina.

5) L'ac. pantotenico aggiunto fino alla concentrazione di 100 γ non ha alcun effetto sulla fermentazione alcolica. Per concentrazioni maggiori produce un'attivazione che va fino al 100% con 500-1.000 γ .

6) L'ac. pantotenico è capace di far aumentare l'attivazione prodotta dalla glicina sulla fermentazione e questo avviene anche per concentrazioni di ac. pantotenico che da sole sono senza effetto.

7) All'aumento dell'attivazione prodotta dalla glicina fa riscontro un aumento della treonina sintetizzata dimostrandosi che l'ac. pantotenico favorisce la sintesi biologica della treonina. È possibile anzi che esso sia necessario o indispensabile alla sintesi stessa. Viene così indicata una nuova funzione di questa vitamina e dato un altro esempio di vitamine che intervengono nella sintesi biologica degli aminoacidi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. von EULER u. O. SWARTZ., Zeit. physiol. Chem., 1924, **140**, 146.
» K. MYRBÄCH., *Ibidem*, 1924, **141**, 297.
K. MYRBÄCH., *Ibidem*, 1924, **139** 30.
- [2] » u. H. EULER., *Ibidem*, 1928, **176** 265.
- [3] H. von EULER, E. BRUNIUS u. S. PROFF., *Ibidem*, 1928, **178**, 202
» u. JOHANSON., *Ibidem*, 1928 **178**, 209.
» E. BRUNIUS., Sv. Brugg. Manadsbl., 1928, **43**, 256.
» T. PHILIPSON., *Ibidem*, 1931, **198**, 1. Bioch. Zeit., 1932, **245**,
418, e 1932, **249**, 245.
- [4] T. PHILIPSON., Zeit. physiol. Chem., 1930, **193**, 75.
- [5] K. MYRBÄCH., Bioch. Zeit., 1933, **258**, 118.
- [6] H. BORCHARDT u. H. PRINGSHEIM., Bull. Soc. Chim. Biol. 1934, **16**, 736.
- [7] KÖGL., Naturw., 1937, 468.
- [8] H. von EULER u. H. LARSON., Zeit. physiol. Chem., 1934, **223**, 206.
- [9] T. PHILIPSON., *Ibidem*, 1930, **193**, 15.
- [10] G. H. W. LUCAS., Journ. Physiol. Chem., 1924, **28**, 1180.
- [11] C. D. von HULSEN., Dissertation. Utrecht, 16 March 1936 citato da KÖGL.
Zeit. physiol. Chem., 1941, **269**, 97.
- [12] F. KÖGL u. w. A. J. BORG., Zeit. physiol. Chem., 1941, **269**, 97.
- [13] T. PHILIPSON., *Ibidem*, 1930, **193**, 15.
- [14] R. J. BOCK a. D. BOLLING., Journ. of Biol. Chem., 1939, **130**, 365.
- [15] O. DIMROTH u. E. SCHWEIZER., Ber. d. deutsch. Chem. Gesell., 1923, **56**, 1375.
W. S. Mc. CLENAHAN, R. C. HOCKETT., Journ. Amer. Chem. Soc., 1938, **60**, 2061.
R. E. OESPER a. C. L. DEASY., *Ibiden*, 1939, **61**, 972.
- [16] R. HIRSCH., Ber. d. deutsch. Chem. Gesell., 1890, **23**, 3705.
- [17] F. KÖGL., l. c. p. 206.
- [18] R. D. WILLIAMS, W. A. MOSTER, E. ROHRMAN., Bioch. Journ., 1936, **30**, 2036.

SOPRA UN' ESTENSIONE ALLE ECLISSI PAR- ZIALI DI SOLE DEL METODO DI JULIUS PER LA DETERMINAZIONE DELL' OSCURAMENTO AL BORDO SOLARE (*)

(Con due figure)

MASSIMO CIMINO

SVMMARYM. — Rationem a JULIO concepta ad solaris marginis obscurationem determinandam Auctor ad ipsius solis minutionem applicare vult. Quod multa praestitutum est commoda, inter quae illud praecipue, quod facilius eligi possit excelsus locus ad observationes peragendas.

Haec ratio probatur, satis felici exitu, per dimensiones radiationis solaris, quas Auctor peregit in Observatorio Montis Marii, inter solis deminutionem die 9 iul. 1945.

1. GENERALITÀ SUL METODO DI JULIUS. — In occasione dell'eclisse di Sole del 9 luglio 1945, visibile a Roma soltanto come parziale, l'Osservatorio Astronomico di Monte Mario ha svolto un programma di osservazioni inteso a determinare i tempi esatti dei contatti esterni con metodi ed osservatori differenti, ed a misurare durante lo svolgersi del fenomeno la variazione della radiazione solare. Quest'ultimo compito è stato portato a termine dallo scrivente, che si era pure proposto di verificare, attraverso tali misure, fino a qual punto fosse praticamente estensibile anche ad una eclisse parziale il metodo ideato da

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini l'8 gennaio 1946.

W. H. JULIUS ⁽¹⁾ per la determinazione dell'oscuramento al bordo solare, metodo che fino ad oggi è stato applicato esclusivamente alle eclissi totali ed anulari.

Il JULIUS è stato il primo a rilevare che il fenomeno dell'oscuramento al bordo solare - vale a dire la diminuzione di splendore che si osserva sul disco apparente del Sole procedendo dal centro verso la periferia - è sensibilmente alterato dalla presenza della atmosfera terrestre. Questa infatti, col diffondere in parte la luce solare, viene a formare come un velo luminoso sul percorso dei raggi, il quale tende ad attenuare i contrasti di luminosità delle varie zone del disco solare e a mascherare perciò una parte dell'oscuramento al bordo. Per ovviare a tale inconveniente il JULIUS ebbe l'idea di utilizzare le misure della radiazione solare che sogliono effettuarsi durante le eclissi di Sole.

Suppongasì di dividere idealmente il disco solare in un certo numero n di corone circolari concentriche e di chiamare con x_1, x_2, \dots, x_n le incognite radiazioni (misurate in unità arbitrarie) che ci provengono dall'unità (pur essa arbitraria) di superficie della prima, seconda, ..., ennesima corona rispettivamente. Se chiamiamo allora con $\Delta(t)$ la diminuzione della radiazione solare riscontrata dopo l'intervallo di tempo t a partire dal primo contatto, e con $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$ le aree della prima, seconda, ..., ennesima corona che, *nello stesso istante*, risultano occultate dal disco lunare, dovrà ovviamente essere verificata l'equazione:

$$[1] \quad a_1(t)x_1 + a_2(t)x_2 + \dots + a_n(t)x_n = \Delta(t).$$

Assegnando a t valori successivi - ad es. $t=5, 10, \dots$ minuti - otterremo altrettante equazioni del tipo (1), che nel loro insieme formano un sistema lineare nelle n incognite x_1, x_2, \dots, x_n , i coefficienti delle quali sono dati dal calcolo delle fasi dell'eclisse, mentre i termini noti $\Delta(t)$ sono forniti dalle misure della radiazione. Naturalmente,

⁽¹⁾ W. H. JULIUS, *A new method for determining the rate of decrease of the radiative power from the center toward the limb of solar disc*. «Astrophysical Journal», vol. xxiii, 1906, pag. 312-323; *The total solar radiation during the annular eclipse on April 17, 1912*. Ibidem, vol. xxxvii, 1913, pag. 225-238.

la suddivisione del disco solare in corone circolari sarà fatta in modo che il numero n di queste risulti minore od uguale al numero dei successivi valori assunti per t , vale a dire al numero delle equazioni. Trovata la soluzione del sistema, si ottiene subito il rapporto delle luminosità delle varie zone concentriche in cui il disco solare è stato suddiviso, alla luminosità di una qualsivoglia di esse zone, in generale di quella centrale.

Come si vede il metodo ideato dal JULIUS toglie elegantemente di mezzo la grave difficoltà che nelle misure dell'oscuramento al bordo proviene dalla presenza del velo luminoso atmosferico. Ma non elimina completamente le influenze perturbatrici dell'atmosfera, le quali permangono sotto altri aspetti. In primo luogo, i successivi valori della radiazione misurati durante lo svolgersi del fenomeno sono alterati dalla variazione dell'assorbimento atmosferico derivante dalle variazioni di altezza dell'astro sopra l'orizzonte. In secondo luogo, poichè durante lo svolgersi del fenomeno si verifica sempre una certa variazione nella temperatura, questa a sua volta determina un cambiamento nello stato atmosferico che si ripercuote sulle misure della radiazione. W. J. MOLL e J. VAN DER BILT⁽¹⁾ hanno messo in luce questa ultima perturbazione, che agisce in modo diverso nelle diverse lunghezze d'onda e che si manifesta nella curva della radiazione con una dissimmetria attorno alla fase della totalità. Infine sono da temere le variazioni atmosferiche irregolari, a carattere accidentale, che introducono irregolarità più o meno marcate nella curva della radiazione.

Tutti questi inconvenienti hanno il loro peso e possono essere eliminati o attenuati, con opportuni accorgimenti, soltanto in parte. Per la correzione (differenziale) dell'assorbimento atmosferico in rapporto alle differenti altezze dell'astro sull'orizzonte si può ricorrere a tabelle a ciò già stabilite; ma è preferibile eseguire misure della radiazione solare per qualche giornata prima e dopo quella dell'eclisse, e ricavare dalle curve di radiazione così ottenute i coefficienti per la riduzione dei valori misurati ad una altezza fissa, che può essere quella dell'astro al primo contatto oppure al passaggio al meridiano del

⁽¹⁾ W. J. H. MOLL e J. VAN DER BILT, « Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands », vol. I, 1922, pag. 170.

luogo. Se l'eclisse ha luogo in prossimità del meridiano, le correzioni per l'altezza sono esigue e tanto più esigua sarà la loro incertezza.

Per le variazioni irregolari accidentali - qualora queste non siano tanto rilevanti e frequenti da costringere a rigettare la totalità delle misure - si è trovato conveniente e logico di disegnare la curva delle radiazioni durante l'eclisse congiungendo i punti *più elevati*. Questa norma è dettata dalla considerazione che le perturbazioni atmosferiche hanno la tendenza a far diminuire il valore misurato della radiazione, mentre gli altri errori strumentali rimangono contenuti, in tale genere di misure, entro limiti assai ristretti.

Quanto infine alla perturbazione sistematica dipendente dalla variazione della temperatura, va notato che per l'applicazione del metodo si tratta di sfruttare soltanto una parte della curva della radiazione. Nelle eclissi totali si suole sfruttare quella parte della curva che cade nell'intorno della fase della totalità, che è la più indicata per la determinazione, che maggiormente interessa, dell'oscuramento nelle zone più periferiche del disco solare. Nel corrispondente intervallo di tempo la variazione della temperatura è assai piccola; da questo punto di vista, le eclissi con cortissima durata della totalità sono da preferire.

2. APPLICAZIONE DEL METODO DI JULIUS ALLE ECLISSI PARZIALI. - La stretta dipendenza delle misure della radiazione solare dalle condizioni atmosferiche rimane comunque il punto debole del metodo di JULIUS. A ciò si aggiungano le ben note difficoltà di ordine economico e materiale che occorre affrontare nelle spedizioni scientifiche per l'osservazione delle eclissi totali di Sole, la limitata possibilità di scelta della migliore località per le osservazioni, ed infine la scarsa probabilità di osservare tali eclissi. Ma poichè d'altra parte il metodo si raccomanda anche per il modesto corredo strumentale che la sua applicazione richiede e per la esiguità degli errori strumentali, lo scrivente ha voluto indagare se, estendendone l'applicazione anche alle eclissi parziali di Sole, non fosse possibile migliorarne le condizioni di applicabilità senza troppo rinunciare ai vantaggi.

La zona della superficie terrestre dalla quale un'eclisse di Sole è visibile parzialmente è di gran lunga più vasta della zona della tota-

lità. Ciò significa, in primo luogo, che maggiore è la frequenza con cui è possibile osservare eclissi parziali. Il compito degli astronomi durante tali eventi è, in generale, piuttosto modesto, limitandosi per lo più alle determinazioni dei tempi dei contatti. Le osservazioni di radiazione possono perciò essere facilmente incluse nei programmi, mentre costituirebbero un grave onere suppletivo nelle eclissi totali. La maggiore frequenza delle osservazioni rivestirebbe un grande interesse per una conferma o meno dei risultati, fino ad oggi invero assai incerti, di C. G. ABBOT ⁽¹⁾ sulla possibile variazione dell'oscuramento al bordo in funzione del ciclo delle macchie. Anche la variazione della temperatura risulta assai minore nelle eclissi parziali, e perciò anche l'obbiezione avanzata da MOLL e VAN DER BILT sul metodo di JULIUS nelle applicazioni alle eclissi totali viene a perdere buona parte della sua efficacia. *Ma il vantaggio più importante dell'applicazione alle eclissi parziali sta, secondo noi, nella larga possibilità di scelta del luogo di osservazione.* Nella vasta zona in cui una eclisse è visibile come eclisse parziale non è difficile trovare delle località a quota elevata. Ora è superfluo illustrare i vantaggi che si ottengono, nel genere di osservazioni che ci interessa, operando ad alta quota. Intanto, tutte le perturbazioni nelle misure che derivano dalle variazioni atmosferiche sono, a parità di altre condizioni, molto meno rilevanti che non operando a bassa quota. Ciò significa che si tende a superare proprio il punto debole del metodo di JULIUS. Vi è anche la possibilità di usare strumenti più sensibili, che le continue piccole variazioni nello stato dell'atmosfera renderebbero superflui a quota non elevata. Infine è più facile estendere le ricerche dell'oscuramento al bordo anche nel campo spettrale dell'ultra-violetto, adoperando delle fotocellule come già hanno fatto W. E. BERNHEIMER ed E. MEYER ⁽²⁾ durante l'eclisse totale di Sole del 1927.

L'unico svantaggio dell'applicazione del metodo di JULIUS alle eclissi parziali starebbe in ciò: che, mentre nelle eclissi totali ed anulari il bordo lunare spazza, per così dire, il disco solare con un moto pressochè uniforme, durante una eclisse parziale invece la penetrazione

(1) C. G. ABBOT, « Smithson. Ann. », IV, 1922.

(2) W. E. BERNHEIMER und MEYER, « Göttinger Nachrichten », 1929.

del bordo lunare sul disco del Sole avviene con moto ritardato dal primo contatto (esterno) alla fase massima, e quindi con moto accelerato della fase massima al secondo contatto (esterno). Ne consegue che il minimo sulla curva della radiazione è più *largo* nelle eclissi parziali che in quelle totali od anulari. Ciò significa che, in prossimità della fase massima, è più difficile valutare gli incrementi o i decrementi della radiazione. Ma, nella maggior parte dei casi, l'inconveniente potrà portare una maggiore indeterminazione nel calcolo delle luminosità delle zone centrali del disco solare, vale a dire delle zone che meno interessano. La possibilità di operare ad alta quota con strumenti più sensibili eliminerebbe del resto tale inconveniente, mentre renderebbe assai più sicura la curva della radiazione in prossimità dei contatti, cioè proprio in quella parte che, nel caso nostro, maggiormente serve per la determinazione della luminosità delle zone più periferiche del disco solare.

3. MISURE DELLA RADIAZIONE SOLARE DURANTE L'ECLISSE DEL 9 LUGLIO 1945. — Come ho già detto al principio, ho pensato di utilizzare le misure della radiazione solare — da me eseguite all'Osservatorio Astronomico su Monte Mario durante l'eclisse parziale di Sole del 9 luglio 1945 — per mettere alla prova la prospettata applicazione del metodo di JULIUS. È però necessario avvertire: 1) che il luogo di osservazione, a soli 143 m. sul livello del mare non è il più adatto a tale genere di ricerche; 2) che l'eclisse aveva a Roma una grandezza di 0,45, ciò che significa che il bordo lunare non raggiungeva neppure il centro del disco del Sole. Ora è evidente che per la determinazione dell'oscuramento al bordo sull'intero disco solare è necessario che la grandezza dell'eclisse sia almeno uguale a 0,50, onde permettere alle zone più centrali del disco solare di entrare in giuoco negli incrementi e decrementi della radiazione. A tali condizioni di fatto, — che le note difficoltà del momento non hanno permesso di superare con la scelta di un luogo di osservazione più favorevole — vanno aggiunte le poco felici condizioni meteorologiche della giornata, che hanno ostacolato specialmente la seconda parte dell'eclisse.

Per tali ragioni i valori dell'oscuramento al bordo che ho ottenuto dalle misure della radiazione vanno riguardati soltanto come risultati

di una *prova*, e, sotto questo aspetto, possono dirsi soddisfacenti, in quanto forniscono dei valori che - indicando con 100 il raggio R del disco solare - da una distanza di $R=30$ ad una $R=85$ dal centro concordano bene con i valori ricavati dal JULIUS dalle misure della radiazione effettuate durante l'eclisse totale del 1905.

Lo strumento adoperato è stato un piroeliometro a pila termoelettrica col relativo milliamperometro di precisione costruito dalla ditta KIPP e ZONEN, di proprietà dell'Osservatorio. L'apparecchio è provvisto di una serie di 4 filtri (azzurro, giallo, rosso, rosso cupo) montati a «revolver». Il milliamperometro in cassetta ha una graduazione da -10 a 100 milliamperes; la taratura del costruttore dà per ogni divisione $0.0202 \text{ cal. gr. cm.}^{-2} \text{ min.}^{-1}$. Poichè ogni divisione è larga quasi due millimetri ed è facile stimarne con sicurezza il decimo, l'apparecchio permette di misurare anche una variazione di irradiazione di 2 millesimi di cal. gr. per cm^2 al minuto primo. In pratica, per la bassa quota alla quale si è operato e per le condizioni meteorologiche particolari della giornata non certo ideali, gli errori accidentali sono certamente superiori ai due millesimi di caloria.

Le misure furono da me effettuate nei giorni 8, 9 e 10 luglio 1945, dalle 11 del mattino al tramonto. Il milliamperometro, accuratamente livellato e protetto da ogni urto, non si toccava mai durante la giornata. Ho eseguito le misure nell'ordine seguente: lettura dello zero col milliamperometro non inserito, lettura per la radiazione totale (senza filtro) e quindi per l'azzurro, giallo, rosso e rosso cupo; quindi nuova lettura dello zero e così di seguito. Ad ogni lettura segnavo il tempo con l'approssimazione del mezzo minuto primo. Contemporaneamente alle misure della radiazione venivano effettuati continui rilievi meteorologici. Le letture dello zero hanno dimostrato la buona stabilità del milliamperometro. Eccettuata qualche incertezza al primissimo inizio delle misure, lo zero si è subito stabilizzato dimostrando soltanto oscillazioni irrilevanti ed una lentissima, ma costante tendenza a decrescere. Con i valori delle letture dello zero ho disegnato una curva della quale mi sono servito per correggere le altre letture.

La giornata dell'8 luglio (precedente a quella dell'eclisse) può, dal punto di vista meteorologico, classificarsi ottima, *specialmente per la costanza dello stato del cielo*, senza alcuna traccia di annuvolamento o di veli, con buona visibilità dell'orizzonte. La regolarità nelle mi-

sure piroeliometriche concorda con tale giudizio. Cattiva è stata invece la giornata del 10 luglio (susseguente all'eclisse), specialmente nelle ore pomeridiane, con formazione di veli costituenti, a volte, quasi degli strati. Mi sono perciò servito soltanto dei dati della prima giornata per disegnare 5 curve della radiazione (senza filtro e con filtro azzurro, giallo, rosso, rosso cupo) che mi hanno permesso di ricavare, istante per istante, il rapporto tra la radiazione osservata e quella della stessa al passaggio del Sole al meridiano. Con tali coefficienti ho corretto i risultati delle misure della giornata del 9 luglio (dell'eclisse), ottenendo in tal modo i valori della radiazione che si sarebbero osservati se l'altezza del Sole sull'orizzonte fosse rimasta costante.

Per economia di spazio mi limito a riportare soltanto, nella Tabella I, le misure della radiazione effettuate durante la giornata dell'eclisse *già ridotte al meridiano* col procedimento indicato. Dò direttamente le letture (corrette) del milliamperometro avvertendo che si ottengono subito i corrispondenti valori in calorie-grammo al cm^2 e minuto primo col moltiplicarle per il fattore 0.0202. Si noterà come — a prescindere dalla diminuzione dei valori della radiazione durante l'eclisse — che ha avuto inizio alle $14^{\text{h}} 24^{\text{m}} 49^{\text{s}}$, fase massima alle $15^{\text{h}} 32^{\text{m}}$ e termine alle $16^{\text{h}} 32^{\text{m}} 40^{\text{s}}$ di T. M. E. C. —, i valori al tramonto (sempre ridotti al meridiano) risultano più bassi di quelli del mezzogiorno, a causa del progressivo peggioramento del tempo. Dalle $16^{\text{h}} 30^{\text{m}}$ circa alle $17^{\text{h}} 15^{\text{m}}$ le misure furono interrotte per la presenza di cirri-cumuli sul disco solare.

Nella Tabella II dò un quadro meteorologico della giornata del 9 luglio. Si noterà il progressivo peggioramento del tempo e la diminuzione della temperatura, dell'ordine di $\frac{1}{2}$ grado, durante l'eclisse.

4. DETERMINAZIONE DELL'OSCURAMENTO AL BORDO SOLARE. — Per utilizzare queste misure della radiazione solare in una prova di determinazione dell'oscuramento al bordo conformemente al metodo di JULIUS già illustrato, ho disegnato su carta millimetrata un disco di 100 mm. di raggio rappresentante il disco solare e quindi ho disegnato 6 cerchi concentrici di raggi rispettivamente eguali a 10, 40, 60, 70, 80 e 90 mm., delimitando così 6 corone circolari ciascuna compresa tra le circonferenze di raggio 10 e 40, 40 e 60, 60 e 70, 70 e 80, 80 e 90, 90 e 100.

TABELLA I. — *Radiatione solare nella giornata dell'eclisse.*

Senza filtro		Azzurro		Giallo		Rosso		Rosso cupo		Note
Ora	G	Ora	G	Ora	G	Ora	G	Ora	G	
T. M. E. C.		T. M. E. C.		T. M. E. C.		T. M. E. C.		T. M. E. C.		
11 ^h 31 ^m .0	45.6	11 ^h 31 ^m .5	13.5	11 ^h 32 ^m .5	35.8	11 ^h 33 ^m .0	26.7	11 ^h 34 ^m .0	23.0	—
39.5	46.5	40.5	15.0	41.0	36.8	42.0	27.8	42.5	24.4	—
49.5	46.1	50.0	13.9	51.0	35.4	51.5	26.6	52.0	23.0	—
59.0	46.8	12 0.0	13.5	12 0.5	36.0	12 1.0	26.9	12 2.5	23.8	—
12 5.0	47.5	5.5	14.9	6.0	36.2	6.5	27.2	7.0	23.9	—
10.0	45.5	11.0	13.8	11.5	35.7	12.0	26.6	13.5	23.1	—
31.5	46.9	32.0	14.4	32.5	36.8	33.0	26.7	34.0	23.8	—
36.5	46.4	37.0	14.3	37.5	35.4	38.0	26.3	39.0	23.3	—
40.5	47.1	41.5	13.5	42.0	35.0	42.5	25.8	43.0	23.1	—
13 5.5	47.4	13 6.0	15.6	13 7.0	37.0	13 7.5	27.4	13 8.0	24.8	—
11.5	46.3	12.5	14.6	13.0	36.6	13.5	27.1	14.0	24.5	—
19.0	45.9	19.5	14.5	20.0	36.0	21.0	26.5	21.5	23.9	—
41.5	47.8	42.0	15.9	43.0	38.1	43.5	27.6	44.0	25.0	—
46.5	47.5	47.5	15.8	48.0	37.1	48.5	26.9	49.5	24.8	—
51.5	48.1	52.5	15.9	53.0	37.7	54.0	28.2	54.5	24.4	—
14 4.5	47.5	14 5.5	14.2	14 7.0	37.6	14 7.5	28.0	14 8.5	24.8	—

Segue TABELLA I. — Radiazione solare nella giornata dell'eclisse.

Senza filtro		Azzurro		Giallo		Rosso		Rosso cupo		Note
Ora	G	Ora	G	Ora	G	Ora	G	Ora	G	
T. M. E. C.		T. M. E. C.		T. M. E. C.		T. M. E. C.		T. M. E. C.		
14 ^h 10 ^m .5	49.8	14 ^h 11 ^m .5	15.4	14 ^h 12 ^m .0	37.3	14 ^h 13 ^m .0	27.3	14 ^h 13 ^m .5	24.6	—
16.0	47.7	17.0	14.2	17.5	36.7	18.0	26.0	18.5	24.6	—
21.5	46.8	22.0	14.0	22.5	36.7	23.0	26.6	23.5	24.0	—
25.5	47.0	26.5	13.7	27.0	36.0	28.0	26.1	28.5	23.7	—
30.5	46.6	31.0	13.9	31.5	35.6	32.0	26.2	32.5	23.8	—
34.0	44.8	34.5	14.6	35.0	34.8	35.5	25.2	36.0	22.6	—
38.0	45.8	38.3	14.7	39.5	35.4	40.5	25.2	41.0	22.5	—
43.0	43.7	44.0	13.7	44.5	33.8	45.0	24.9	45.5	22.0	—
49.0	42.6	49.0	12.7	49.5	32.2	50.0	22.9	50.5	20.3	—
53.5	39.5	55.0	11.3	54.5	30.2	56.0	22.2	57.5	19.2	—
59.0	38.2	15 0.0	11.7	15 0.5	29.4	15 1.0	21.2	15 1.5	16.2	—
15 5.0	35.0	6.0	10.3	7.0	27.0	7.5	17.6	8.0	17.9	(¹)
13.0	33.4	14.0	10.3	15.0	25.7	15.5	18.7	17.0	16.3	(²)
19.5	31.8	20.5	9.5	22.0	24.6	23.5	17.9	24.5	16.1	(³)
30.0	30.6	30.5	9.5	31.0	24.1	31.5	17.6	32.5	16.0	—

(¹) 16.9, veli in vicinanza del sole che non disturbano. - (²) 15.14, veli leggerissimi anche sul sole. - (³) 15.25, veli nei dintorni del sole che tendono a svanire.

Segue
TABELLA I. — *Radiazione solare nella giornata dell'eclisse.*

Senza filtro		Azzurro		Giallo		Rosso		Rosso cupo		Note
Ora	G	Ora	G	Ora	G	Ora	G	Ora	G	
T. M. E. C.		T. M. E. C.		T. M. E. C.		T. M. E. C.		T. M. E. C.		
15 ^h 33 ^m .5	30.6	15 ^h 34 ^m .5	9.2	15 ^h 35 ^m .0	23.9	15 ^h 35 ^m .5	17.5	15 ^h 36 ^m .0	15.8	—
38.5	31.1	39.5	8.1	40.5	23.6	41.5	17.5	42.0	15.0	(*)
44.0	31.2	45.0	9.6	46.0	26.1	46.5	18.9	—	—	—
52.5	34.6	53.0	10.4	54.0	26.6	54.5	19.9	55.0	17.3	—
57.5	35.4	58.5	10.6	59.0	27.3	59.5	20.8	16 0.0	18.3	—
16 2.5	37.3	16 3.5	11.0	16 4.0	28.7	16 5.0	22.5	5.5	18.9	(*)
7.5	39.9	8.5	12.1	9.5	30.6	10.5	23.1	11.0	20.5	—
14.0	42.8	14.5	12.7	16.0	32.8	17.0	25.0	17.5	22.2	(*)
19.5	43.4	20.5	13.3	21.5	33.5	22.0	25.0	22.5	22.1	—
26.0	37.3	26.5	8.7	28.0	33.9	28.5	26.0	29.5	22.7	(*)
32.0	44.1	32.5	13.3	33.0	33.8	33.5	25.6	34.5	22.4	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	(*)
17 16.5	41.0	17 17.5	11.4	17 18.0	30.5	17 19.0	23.1	17 20.0	19.2	(*)
22.5	39.7	23.5	11.2	24.5	31.4	25.0	23.8	25.5	20.5	—

(*) 15.40, i veli sembrano scomparsi. - (2) 16.5, veli leggerissimi. - (3) 16.18, grosso or. str. che si avvicina al sole. - (7) 16.28, Veli vicini e anche sul sole. - (8) 16.35, or. cu. che disturbano le misure, costringendo a sospendere. Il cielo si annuvola avanti al sole. - (9) 17.15, si riprendono le misure, ma i veli sono assai evidenti anche avanti al sole.

TABELLA I. — *Radiatione solare nella giornata dell'eclisse.**Segue*

Senza filtro		Azzurro		Giallo		Rosso		Rosso cupo		Note
Ora	G	Ora	G	Ora	G	Ora	G	Ora	G	
T. M. E. C.		T. M. E. C.		T. M. E. C.		T. M. E. C.		T. M. E. C.		
17 ^h 27 ^m .5	42.1	17 ^h 28 ^m .0	12.7	17 ^h 29 ^m .0	32.8	17 ^h 29 ^m .5	24.2	17 ^h 30 ^m .0	21.3	—
39.5	41.9	40.0	12.1	40.5	32.3	41.5	23.8	42.0	20.8	(¹⁰)
44.0	41.9	44.5	11.7	45.0	31.7	45.5	23.8	46.0	21.4	—
48.5	41.0	49.0	11.8	50.5	30.7	51.5	22.5	52.0	19.5	—
18 2.0	41.5	18 2.5	12.1	18 3.0	33.0	18 3.5	24.5	18 4.0	21.9	—
6.0	43.4	6.5	14.9	8.0	35.0	8.5	25.9	9.0	24.5	(¹¹)
11.5	46.7	12.0	15.5	12.5	35.9	13.5	26.6	14.5	23.4	—
22.0	44.3	23.0	14.3	23.5	34.7	24.5	26.0	25.0	22.9	—
27.0	45.0	27.5	15.1	28.5	34.7	29.0	25.6	29.5	22.4	(¹²)
32.0	43.4	32.5	14.2	33.5	33.4	34.0	25.0	34.5	22.4	—
41.5	43.0	42.0	14.2	42.5	34.1	43.0	25.3	44.0	22.6	—
46.5	41.9	47.0	13.6	48.0	32.2	48.5	23.9	49.5	22.0	—
51.0	43.7	51.5	14.2	52.0	31.6	53.0	24.2	53.5	21.4	—
55.5	41.5	56.0	15.5	56.5	31.3	57.0	23.7	57.5	21.0	—

(¹⁰) 17.40, cielo migliorato, ma sempre sporcio. - (¹¹) 18.10, cielo ancora migliorato, ma sempre sporcio - (¹²) 18.26, orizzonte sporcio e lattiginoso per veli.

TABELLA II. — Stato meteorologico del 9 luglio 1945.

Ora	Tempe- ratura	Umidità relativa %	Tensione del vapore mill.	Pressione (*)	Velocità del vento m/sec	Direzione del vento	Cielo	Osservazioni
T. M. E. C.								
9 ^h 0 ^m	27.0	43	11.44	747.70	0.8	NE v	sereno	La giornata s'inizia serena e calma.
10 15	27.7	43	11.83	747.25	—	—	—	Ore 10. — Caligine piuttosto densa all'orizzonte, che copre anche buona parte della pianura (più di ieri). Cielo biancastro all'orizzonte, lattiginoso per il resto. Nessuna nebulosità apparente.
11 0	29.2	40	11.91	747.20	—	—	sereno	
11 50	29.4	42	13.60	746.80	—	—	—	
12 25	28.6	50	14.71	747.30	8.7	SW v	—	
13 0	28.0	52	14.54	746.60	7.9	ESE v	cu a E	Ore 11.30 — Sempre sereno meno caligin.
13 40	27.6	54	14.97	746.50	—	—	—	Ore 11.40. — Si leva una leggera brezza.
14 0	27.5	56	15.21	746.60	7.1	WSW	4/10 cu.	Ore 12. — La caligine tende a scomparire, meno che nell'orizzonte.
15 0	27.1	55	14.75	746.50	5.5	SW	—	
15 10	27.1	55	14.75	746.55	—	—	—	Ore 12.20. — Qualche cumulo a SE, basso. Orizzonte sempre un po' caliginoso.
15 20	27.0	53	14.12	746.60	—	—	—	
15 30	27.0	56	14.81	746.50	6.3	SW	2/10 cu. str.	Ore 12.40. — La brezza è aumentata. Orizzonte più chiaro.
15 40	26.8	59	14.69	746.50	—	—	—	

TABELLA II. — Stato meteorologico del 9 luglio 1945.

Segue

Ora	Tempe- ratura	Umidità relativa %	Tensione del vapore mill.	Pressione (*)	Velocità del vento m/sec	Direzione del vento	Cielo	Osservazioni
T. M. E. C.								
15 ^h 50 ^m	26.6	58	15.05	746.50	—	—	—	Ore 13.20. — Il cielo appare meno lattiginoso allo zenit, biancastro all'orizzonte SW, con cu. str. all'orizzonte E e SE. <i>Libero a W. Brezza.</i>
16 0	26.8	59	15.46	746.50	—	—	—	
16 10	26.5	62	16.00	746.60	—	—	—	
16 20	26.6	60	15.40	746.70	2.5	SW	$\frac{3}{10}$ cu. ci. str.	Ore 14.20. — La brezza sembra aumentata.
16 30	27.0	58	15.34	746.80	—	—	—	Ore 16.20. — Il cielo ha cominciato ad annuvolarsi verso E, ed ora la nebulosità invade anche la zona occupata dal sole. Il 2° contatto è perciò assai disturbato. Invece la prima metà dell'eclisse si è svolta in condizioni discrete, come è confermato anche dalla stabilità dell'ago del milliamperometro.
16 40	27.3	56	15.16	746.85	—	—	—	
17 30	27.3	53	14.28	746.55	—	—	—	
18 0	27.2	53	14.34	746.85	1.9	S	$\frac{2}{10}$ cr. str.	
18 30	26.8	53	13.90	746.70	—	—	—	
19 0	26.4	55	13.98	746.70	2.0	SSW	$\frac{2}{10}$ str. bassi	
21 0	22.8	79	16.36	746.45	2.3	WSW	sereno	Ore 17.30. — Cr. in vicinanza del sole.

(*) A 0° e al livello del mare.

Temp. max del 9 luglio: 29° 9. Ore di sole: 10h $\frac{3}{4}$.

> min > : 19.0.

La zona interna alla prima circonferenza di raggio 10 è stata esclusa perchè il bordo lunare vi penetra appena intorno alla fase massima e la luminosità di tale zona entra perciò pochissimo in giuoco. Chiameremo con $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ la incognita radiazione che, per unità di superficie, ci perviene rispettivamente da ciascuna delle 6 corone indicate.

Nella Tabella III dò le fasi dell'eclissi di 5 in 5 minnti che ho calcolate in base agli elementi forniti dal *Berliner Jahrbuch* 1945; la

TABELLA III.

Ora	g	Ora	g	Ora	g	Ora	g
T. M. E. C.		T. M. E. C.		T. M. E. C.		T. M. E. C.	
13 ^h 25 ^m	0.000	14 ^h 00 ^m	0.317	14 ^h 35 ^m	0.450	15 ^h 10 ^m	0.248
30	0.051	05	0.350	40	0.442	15	0.197
35	0.100	10	0.384	45	0.425	20	0.146
40	0.147	15	0.408	50	0.402	25	0.090
45	0.190	20	0.431	55	0.372	30	0.032
50	0.236	25	0.445	15 00	0.335	—	—
55	0.275	30	0.452	05	0.292	—	—

quantità g indica la distanza, in diametri solari apparenti, del bordo lunare che penetra sul disco solare al bordo occultato del Sole.

Con questi dati e tenendo presente che il diametro lunare apparente era 1.00063 volte quello solare ho disegnato sul disco solare le zone d'ombra di 5 in 5 minuti dall'inizio alla fase massima, ed ho quindi calcolato i coefficienti delle 6 incognite x_1, x_2, \dots, x_6 nelle 13 equazioni lineari che qui appresso riporto. I termini noti — che rappresentano decrementi della radiazione in unità arbitrarie — li ho ricavati dal grafico della fig. 1, disegnato coi criteri già dichiarati sulla base dei dati della tabella I. I decrementi delle radiazioni, misurati in *millimetri* sul disegno, sono stati contati a partire dalla retta tratteggiata, che rappresenterebbe l'andamento della radiazione, ridotta alla altezza

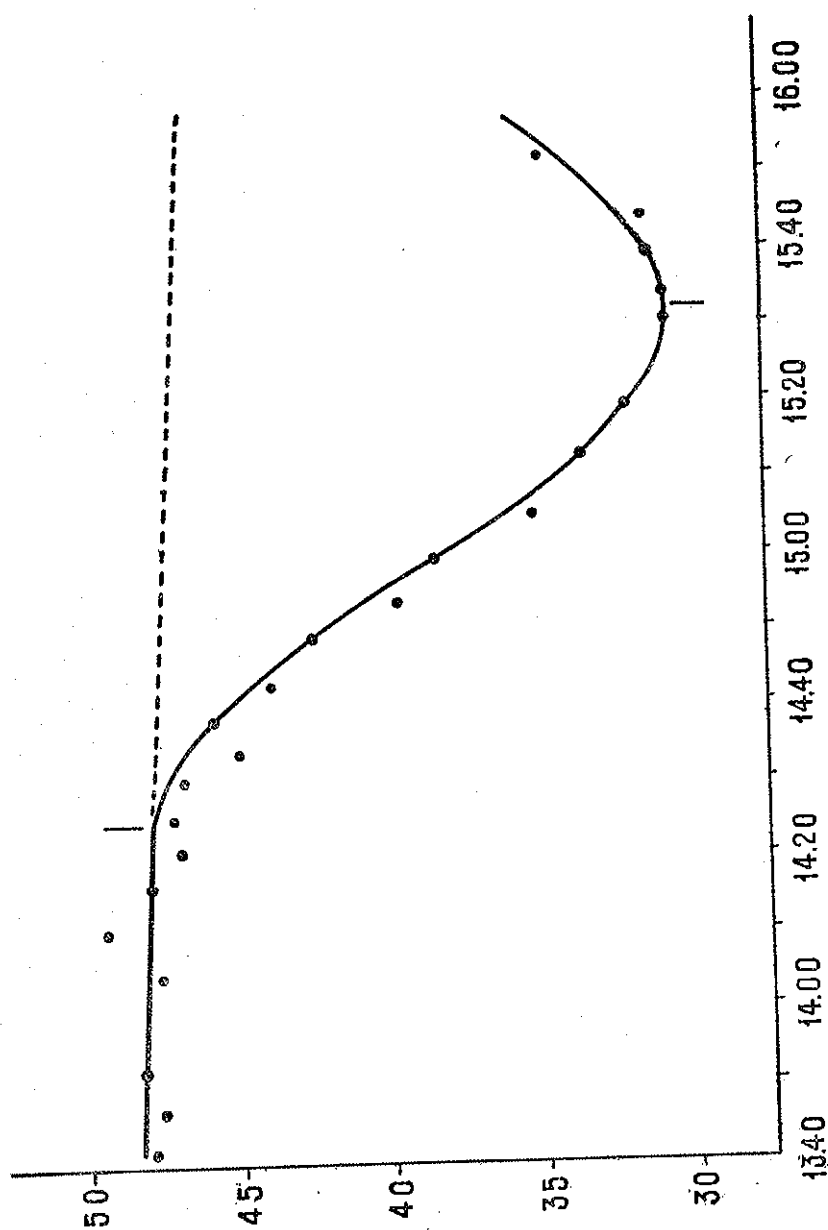


Fig. 1.

del passaggio in meridiano, in assenza di eclisse. L'inclinazione della retta sta ad indicare il riscontro peggioramento progressivo del tempo.

$$\begin{array}{lcl}
 1. & 22.x_6 & = 1 \\
 2. & 38.x_6 + 20.x_5 & = 4 \\
 3. & 49.x_6 + 37.x_5 + 18.x_4 & = 9 \\
 4. & 58.x_6 + 46.x_5 + 33.x_4 + 13.x_3 & = 14 \\
 5. & 65.x_6 + 55.x_5 + 44.x_4 + 30.x_3 + 11.x_2 & = 21 \\
 6. & 72.x_6 + 62.x_5 + 52.x_4 + 39.x_3 + 32.x_2 & = 28 \\
 7. & 77.x_6 + 68.x_5 + 60.x_4 + 48.x_3 + 60.x_2 + 3.x_1 & = 37 \\
 8. & 83.x_6 + 74.x_5 + 65.x_4 + 54.x_3 + 76.x_2 + 13.x_1 & = 44 \\
 9. & 87.x_6 + 79.x_5 + 71.x_4 + 60.x_3 + 91.x_2 + 31.x_1 & = 50 \\
 10. & 91.x_6 + 83.x_5 + 75.x_4 + 64.x_3 + 100.x_2 + 47.x_1 & = 56 \\
 11. & 94.x_6 + 86.x_5 + 78.x_4 + 68.x_3 + 107.x_2 + 61.x_1 & = 61 \\
 12. & 96.x_6 + 88.x_5 + 81.x_4 + 70.x_3 + 112.x_2 + 70.x_1 & = 64 \\
 13. & 97.x_6 + 89.x_5 + 82.x_4 + 71.x_3 + 115.x_2 + 77.x_1 & = 65
 \end{array}$$

Risolvendo il sistema ho ottenuto i seguenti valori:

$$\begin{array}{lll}
 x_6 = 0.046 & x_4 = 0.133 & x_2 = 0.153 \\
 x_5 = 0.115 & x_3 = 0.140 & x_1 = 0.170
 \end{array}$$

coi quali, sostituendo nei primi membri delle equazioni, ho avuto i seguenti scarti coi secondi membri:

Equaz.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Scarto	0.0	0.0	0.0	-0.2	-0.1	+0.3	+1.3	+1.7	-0.1	0.0	+0.1	-0.1	-1.2

Occorre tener presente che l'unità dei termini noti (millimetri) corrisponde appena ad $\frac{1}{4}$ della divisione del milliamperometro e cioè a 0.005 cal. gr. per cm^2 e min^{-1} . Si osservi che nelle equazioni 7 ed 8 che sono le peggio soddisfatte, compaiono dei divisori (coefficienti di x_1) che sono più piccoli degli altri coefficienti, e che il termine noto dell'equazione 13 è assai incerto per la vicinanza al minimo.

Poichè non è stato possibile ricavare il valore della luminosità al centro, ho riferito i valori trovati al valore x_1 , che è stato posto uguale a 0.966 volte il valore centrale assunto uguale ad 1. Con questa scelta il valore di x_4 si fa coincidere con quello trovato dal

JULIUS alla distanza di $\frac{30}{100}$ del raggio solare dal centro del disco; per gli altri valori abbiamo allora:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.966 \\ x_2 &= 0.869 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 0.798 \\ x_4 &= 0.755 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= 0.653 \\ x_6 &= 0.262 \end{aligned}$$

Nella fig. 2 la curva disegnata dà l'oscuramento al bordo trovato dal JULIUS dalle osservazioni dell'eclisse del 1905. I valori da me tro-

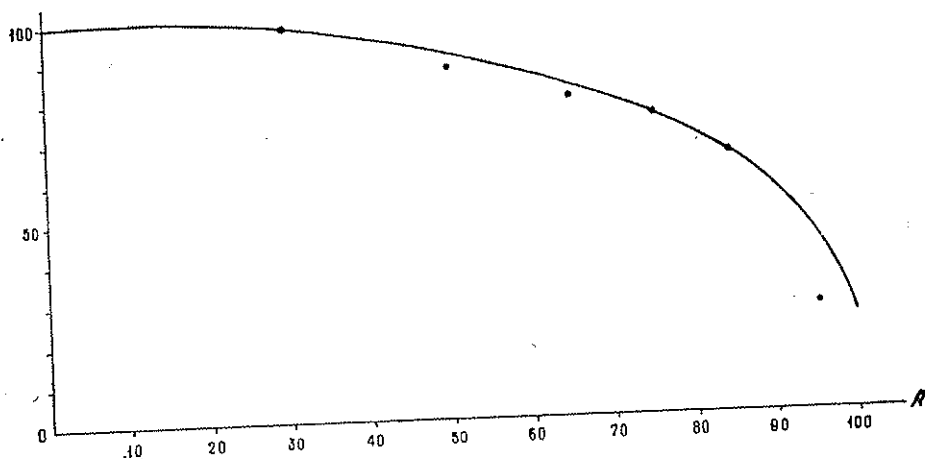


FIG. 2.

vati sono segnati con dei punti. L'accordo è soddisfacente, meno che per il valore x_6 ; per questo occorre tener presente che una piccola variazione nel termine noto dell'equazione 1 può far variare notevolmente il valore dell'incognita. Ma per la ricerca dell'oscuramento nell'immediata vicinanza del bordo occorrono misure più fini, quali possono ottenersi soltanto con più delicati strumenti ed operando a quota elevata.

SULL'EFFETTO EINSTEIN (*)

TITO FRANZINI e MARIO GALLI

SUMMARY. — Auctores conati sunt novo experimento theoriam relativitatis confirmare iuxta quam lux corpore magna vi gravitatis attracto emissa aliquantulum immutatur. Item qua de causa hoc aliaque experimenta ad eundem finem perfecta incassum cesserint explicare nituntur.

Lo spostamento delle righe spettrali di una sorgente luminosa posta in un campo gravitazionale rispetto ad un osservatore posto nello stesso campo in un punto a potenziale gravitazionale diverso da quello della sorgente, è stato oggetto di note e numerose ricerche con risultati incerti. In particolare le osservazioni eseguite sulle righe spettrali solari, secondo alcuni autori, avrebbero dimostrato l'esistenza dell'effetto Einstein, secondo altri lo escluderebbero ⁽¹⁾. Effettivamente i risultati ottenibili sono appena al di qua dei limiti degli errori sperimentali, così che è difficile poter dare un valore probativo ad essi.

Abbiamo pensato alla possibilità di mettere in evidenza l'effetto Einstein con campi di forza centrifuga, ossia osservando righe spettrali di una sorgente centrifugata con dispositivi di osservazione posti al centro della piattaforma rotante. Che un campo di forza centrifuga si comporti a tutti gli effetti come un campo gravitazionale, ci pare possa ammettersi senz'altro ⁽²⁾.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi il 29 gennaio 1946.

⁽¹⁾ Cfr. SCHWARZSCHILD, «Berl. Ber.», 1914, pag. 1201. GREBE e BACHEM, «ZS. f. Phys.», 2, 421. EVERSLED, «Observatory», 43, 158; 46, 299. ST. JOHN, «ZS. f. Phys.», 21, 159; «Mit. Wils. Contrib.», 278; «Astrophys. Journ. Julius, ZS. f. Phys.», 27, 23. PRINGSHEIM, «Physik der Sonne», pag. 273.

⁽²⁾ Cfr. EDDINGTON A., *Space, temps et Gravitation* (Versione francese), pag. 78-95.

La difficoltà di realizzare un'esperienza del genere ci ha condotti in un secondo tempo a studiare il dispositivo seguente. Un piccolo tubo di Plücker è posto, ad una trentina di centimetri dall'asse di rotazione, in un tubo di ottone, munito di opportuna finestra, rotante con frequenza superiore a 200 giri al secondo. La luce di esso è osservata parallelamente all'asse di rotazione con uno spettrografo munito di reticolo a gradinata. L'accensione del tubo di Plücker è ottenuta ponendo a massa un elettrodo, mentre l'altro striscia per circa $\frac{1}{30}$ di giro su di un contatto fisso, così che il tubo s'accende fortemente sopravoltato, quando passa davanti alla fenditura del collimatore dello spettrografo.

La gradinata usata come strumento interferenziale è quella grande dell'Istituto Fisico di Arcetri, costruita da HILGER e composta da 40 lastre dello spessore di 8,466 mm. ciascuna. Le osservazioni sono state fatte su diverse righe spettrali. Le frange riprodotte nella seguente nota sono relative alla riga verde del mercurio ($0,5461 \mu$). Fotografando nella stessa lastra le frange ottenute con il tubo di Plücker fermo e quelle ottenute con il tubo di Plücker rotante, non si riscontra nessun apprezzabile spostamento delle frange.

Il dispositivo non è scevro da critiche. Infatti non osiamo affermare che l'asse di rotazione possa costituire un ponte di passaggio fra il sistema rotante (sorgente). Se il sistema fisso (osservatore), così che si possa parlare di una differenza di potenziale centrifugo fra di essi e porre il valore di tale differenza di potenziale nella consueta formola dell'effetto Einstein.

Indipendentemente da questa e da altre considerazioni, ci pare però che il risultato negativo dell'esperienza sia perfettamente giustificato da una osservazione fatta da GIORGI⁽¹⁾ a proposito di esperienze sullo spostamento di righe di origine stellare. Se il cronometro stellare (atomo emittente), è trattenuto nel campo gravitazionale, esso dovrà risentire in pieno la forza di gravitazione e quindi ritardare. Se esso invece cade liberamente, per il principio di equivalenza, deve considerarsi sottratto all'azione del campo gravitazionale e quindi dovrà andare d'accordo con il cronometro terrestre. Nel caso di atomi dell'atmosfera stellare è evidente che fra un urto e l'altro, essi cadono, ossia hanno

⁽¹⁾ GIORGI G., « Rend. Linc. », 23, 824, a. 1936.

un'accelerazione in direzione del campo gravitazionale del sole che annulla l'influenza del campo stesso.

Analogamente nel nostro Plücker centrifugato gli atomi emittenti non sono solidali con il sistema rotante: fra un urto e l'altro contro le pareti e contro atomi essi si muovono in linea retta, ignorando completamente lo sforzo centripeto al quale è sottoposto l'insieme del tubo, e quindi sono sottratti all'eventuale azione di ritardamento temporale per effetto Einstein.

Si potrebbe pensare ad un possibile effetto Einstein degli atomi emittenti negli istanti in cui urtando contro le pareti o contro gli altri atomi, ricevono da questi degli impulsi aventi una componente centripeta media del valore $m\omega^2 r \frac{T}{n}$, ma di durata molto minore di T/n , essendo m la massa di un atomo emittente, n il numero medio di urti durante il tempo T (periodo della rotazione). E poichè la durata effettiva di ciascuno di questi impulsi è assai piccola rispetto al tempo T/n che interviene fra due urti consecutivi, l'energia della radiazione osservata a frequenza diminuita risulta del tutto trascurabile rispetto all'energia emessa dall'oscillatore atomico fra un urto e l'altro e osservata con frequenza inalterata.

Sentiamo il dovere di ringraziare sentitamente i professori GIORGI e STRANO, che più volte da noi interpellati ci sono stati cortesi di schiarimenti e consigli.

SULLA FORMA DI AVVOLGIMENTO E DI SVOLGIMENTO DI UNA FUNE DOTATA DI RIGIDEZZA ANELASTICA (*)

E. PISTOLESI
Accademico Pontificio

SUMMARY. — Quam formam sumat funis mere anelasticae rigiditatis, qui trochleae involvatur vel ex ea evolvatur, Auctor perquirat, legem experimentalem adhibens secundum quam a momento oneris erga funis axem pendet variatio curvaturae ipsius axis.

Si suole spiegare la rigidezza anelastica degli organi flessibili come una tendenza a conservare la curvatura originaria, dal che segue che il ramo che si avvolge resta discosto dal centro della carrucola di una distanza $R + \varepsilon_1 > R$ e quello che si svolge di una distanza $R - \varepsilon_2 < R$.

Vogliamo qui vedere quale forma assumono i due rami nell'ipotesi di rigidezza puramente anelastica. Per far questo occorre conoscere la legge che lega la variazione di curvatura al momento che la produce.

Riferendosi alle esperienze del GIOVANNOZZI ⁽¹⁾, che forniscono la misura della rigidezza globale (allo svolgimento e all'avvolgimento) si ha che questa può essere posta con buona approssimazione nella forma:

$$X = X_1 + X_2 = mQ \left(\frac{d}{D} \right)^{4/3}$$

(*) Nota presentata l'8 marzo 1946.

(1) R. GIOVANNOZZI, *Prove sulla rigidezza anelastica delle funi metalliche*, « Ricerche d'Ingegneria », Anno VIII, n. 4, luglio-agosto 1940.

dove Q è la forza applicata alla fune, d il diametro di questa, $D = 2R$ il diametro della carrucola, X_1 la rigidezza all'avvolgimento, X_2 quella allo svolgimento, X la rigidezza complessiva, m un coefficiente dipendente dal materiale e dalla struttura della fune (diametro dei fili elementari, tipo di avvolgimento). Ne risulta un momento complessivo (astruendo dalla differenza fra la forza motrice P e la resistenza Q):

$$(X_1 + X_2)R = mQ \left(\frac{d}{D} \right)^{4/3} R = (k_1 + k_2) QR^{-1/3}.$$

Ammesso che un'espressione di questo tipo valga per le due rigidezze separatamente considerate si avrà:

$$[1a] \quad \varepsilon_1 = k_1 R^{-1/3}$$

$$[1b] \quad \varepsilon_2 = k_2 R^{-1/3}$$

Introdotta la curvatura $c = -\frac{1}{r}$ dell'asse della fune, si può adottare come legge plausibile che lega la variazione di curvatura al momento la seguente:

$$[2] \quad M = kQ(c - c_0)^{1/3}.$$

Consideriamo dapprima il ramo che si avvolge. Inizialmente la curvatura è nulla: $c_0 = 0$; perciò:

$$c = \left(\frac{M}{kQ} \right)^3.$$

Disposti gli assi come in figura 1 (a destra):

$$c = \left(\frac{Qy}{kQ} \right)^3 = 2 \frac{y^3}{\alpha^4}$$

avendo posto $\alpha^4 = 2k^3$ (α ha le dimensioni di una lunghezza) e, adottando la consueta approssimazione $c = y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$[3] \quad y'' = 2 \frac{y^3}{\alpha^4}.$$

Moltiplicando per y' ambedue i membri e integrando si ha:

$$\frac{y'^2}{2} = \frac{y^4}{2\alpha^4} + \frac{C^2}{2}$$

dove la costante arbitraria C è il valore che y' ha per $y = 0$. Se ne deduce:

$$y' = \sqrt{C^2 + \frac{y^4}{\alpha^4}}$$

e quindi:

$$[4] \quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{C^2 + \frac{y^4}{\alpha^4}}} = \alpha^2 \int \frac{dy}{\sqrt{\alpha^4 C^2 + y^4}}.$$

La [4] conduce ad un integrale ellittico di prima specie. Se si pone come limite inferiore dell'integrale lo zero e si pone l'origine nel capo della fune, resta da determinare la costante C con la condizione che la fune abbia la curvatura $c_1 = \frac{1}{R}$ nel punto in cui è tangente alla puleggia.

Senza svolgere il caso generale, limitiamoci per semplicità al caso in cui il ramo pendente è lunghissimo (infinito) nel quale caso y' per $y = 0$ si può porre uguale a zero. Si ha allora $C = 0$ e

$$y' = \frac{y^2}{\alpha^2}$$

da cui, integrando:

$$y(x - C_1) = -\alpha^2$$

cioè la forma della fune è un'iperbole di cui l'asse x è un asintoto, mentre l'altro è parallelo all'asse y . Se facciamo passare l'asse y per il punto di contatto della fune con la puleggia, si ha per $x = 0$:

$$\delta = y = -\frac{\alpha^2}{C_1}.$$

Ma per $y = \delta$ deve la curvatura c essere uguale a $c_1 = \frac{1}{R}$; perciò:

$$\frac{1}{R} = 2 \frac{\delta^3}{\alpha^4}, \quad \delta = \sqrt[3]{\frac{\alpha^4}{2R}} = k R^{-1/3}$$

e confrontando con la formula precedente:

$$\frac{1}{R} = 2 \frac{\alpha^2}{C_1^3}$$

$$C_1^3 = 2\alpha^2 R.$$

Il valore di y' risulta:

$$y' = \frac{\delta^2}{\alpha^2} = \sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{4R^2}}.$$

Si ha infine: $\varepsilon_1 = \delta - \mu$ (v. figura), dove $\mu = R(1 - \cos \Theta) = 2R \sin^2 \frac{\Theta}{2} \cong \frac{1}{2} R \Theta^2$ dove per Θ si può mettere y' e quindi:

$$\mu = \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{\alpha^4}{2R}}$$

ossia:

$$\mu = \frac{1}{4} \delta$$

$$\varepsilon_{1\infty} = \frac{3}{4} \delta = \frac{3}{4} k R^{-1/3}$$

dove l'indice ∞ sta a ricordare che si tratta del valore di ε_1 quando il ramo pendente della fune ha lunghezza infinita.

Confrontando con la [1a] si vede che occorre prendere $k = \frac{4}{3} k$

In generale si ha: per $y = \delta$,

$$y' = \sqrt{C^2 + \frac{\delta}{\alpha^4}}, \quad y'' = \frac{1}{R} = 2 \frac{\delta^3}{\alpha^4}$$

e quindi:

$$y' = \sqrt{C^2 + \frac{\delta}{2r}}$$

e posto nuovamente $\mu \cong \frac{1}{2} R y'^2$:

$$\varepsilon_1 = \delta - \mu = \frac{3}{4} \delta - \frac{1}{2} r C^2$$

(si ricordi che $C = y'$ per $y = 0$).

Per lo studio del ramo che si svolge occorre fare due casi distinti. Il primo si ha quando all'inizio dello svolgimento il ramo pendente è di lunghezza nulla. Allora la curvatura iniziale sarà $c_1 = \frac{1}{R}$ e la variazione di curvatura sarà effetto del momento secondo la [2].

Tenuto conto del segno della curvatura in relazione alla disposizione degli assi (fig. 2); si avrà (considerando le curvature in valore assoluto):

$$Qy = k Q(c_1 - c)^{1/3}$$

$$\frac{1}{R} - c = 2 \frac{y^3}{\alpha^4}$$

e infine, posto per approssimazione $c = -y''$:

$$[5] \quad y'' = 2 \frac{y^3}{\alpha^4} - \frac{1}{R}$$

Col solito procedimento di integrazione si avrà:

$$\frac{y'^2}{2} = \frac{y^4}{2\alpha^4} - \frac{y}{R} + \frac{K^2}{2}$$

$$y' = \pm \sqrt{\frac{y^4}{\alpha^4} - 2 \frac{y}{R} + K^2}$$

(K è il valore di y' per $y = 0$) equazione che, integrata, conduce nuovamente ad integrali ellittici. Nella [6] il segno $+$ vale per il tratto in cui y è crescente, il segno $-$ per il tratto in cui y è decrescente, i due tratti risultando simmetrici rispetto all'ordinata passante per il punto in cui y è massimo.

Un caso particolare notevole si ha ponendo $y'' = 0$ per $y' = 0$. Si ha allora, posto $y = \delta$:

$$\delta^3 = \frac{\alpha^4}{2R} ; \quad \delta = \sqrt[3]{\frac{\alpha^4}{2R}}$$

$$0 = \frac{\delta}{2R} - 2 \frac{\delta}{R} + K^2$$

$$K^2 = \frac{3\delta}{2R}$$

e quindi, limitandosi al tratto in cui vale per il radicale il segno $+$:

$$y' = \frac{\sqrt{y^4 - 4\delta^3 y + 3\delta^4}}{\alpha^2}.$$

Il numeratore si può decomporre e scrivere:

$$y' = \frac{(y - \delta)}{\alpha^2} \sqrt{y^2 + 2\delta y + 3\delta^2}$$

e quindi:

$$x = \alpha^2 \int_0^y \frac{dy}{(y - \delta) \sqrt{y^2 + 2\delta y + 3\delta^2}}.$$

Si vede che se l'integrale è esteso fra 0 e δ , x diventa infinito. La fune è composta di due metà simmetriche di lunghezza infinita. Questa soluzione può valere, per approssimazione, per fune molto lunga. L'integrale che dà la x è facilmente esprimibile con logaritmi.

Per $y = 0$, $y' = \sqrt{\frac{3\delta}{2R}}$. Si ha poi:

$$\varepsilon_2 = \mu$$

dove:

$$\mu \cong \frac{1}{2} R y'^2 = \frac{3}{4} \delta$$

perciò:

$$\varepsilon_{2\infty} = \frac{3}{4} \delta_{\infty} = \varepsilon_{1\infty}.$$

In generale si ha che per $y=0$, cioè nel punto di contatto della fune con la carrucola, $y' = K$ e quindi:

$$\varepsilon_2 = \mu \cong \frac{1}{2} R y'^2 = \frac{1}{2} R K^2$$

e poichè il massimo di K si ha precisamente nel caso precedentemente considerato ⁽¹⁾, segue:

$$\varepsilon_2 \leq \frac{3}{4} \delta_{\infty}$$

$$\varepsilon_2 \leq \varepsilon_{1\infty}.$$

Il secondo caso è quello in cui inizialmente alla fune avvolta sulla carrucola fa seguito un tratto pendente rettilineo. Nel punto di raccordo dei due tratti si ha una discontinuità nella curvatura (da $\frac{1}{R}$ a zero) che si conserva nel seguito del movimento e la fune assume l'andamento indicato in figura 1 (a sinistra). Per il tratto BC vale la trattazione fatta per il ramo che si avvolge, ossia (tenuto conto dei segni in relazione ai sensi stabiliti sugli assi):

$$y' = -\sqrt{C^2 + \frac{y^4}{\alpha^4}}; \quad y'' = 2 \frac{y^3}{\alpha^4}.$$

⁽¹⁾ Infatti per $y=\delta$, $y'' \leq 0$ e quindi $\delta^3 \leq \frac{\alpha^4}{2R}$; ma si ha pure $y'=0$ da cui

$$K^2 = \frac{2\delta}{R} - \frac{\delta^4}{\alpha^4}.$$

Il massimo di K^2 si ha per $\delta^3 = \frac{\alpha^4}{2R}$, cioè quando $y''=0$ per $y=\delta$.

Per $y = \delta_1$ (punto B)

$$y_1' = -\sqrt{C^2 + \frac{\delta_1^4}{\alpha^4}} ; \quad y_1'' = 2 \frac{\delta_1^3}{\alpha^4} .$$

Per il tratto BA valgono invece le formule [5] e [6]:

$$y_1' = -\sqrt{\frac{\delta_1^4}{\alpha^4} - 2 \frac{\delta_1}{R} + K^2} ; \quad \bar{y}_1'' = 2 \frac{\delta_1^3}{\alpha^4} - \frac{1}{R} .$$

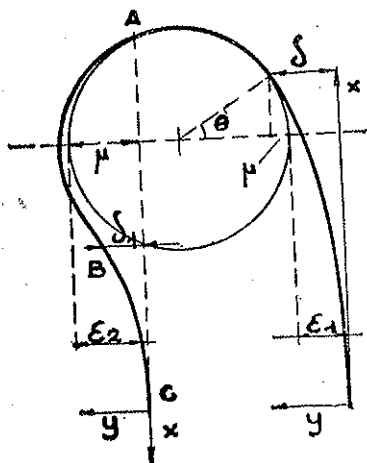


FIG. 1.

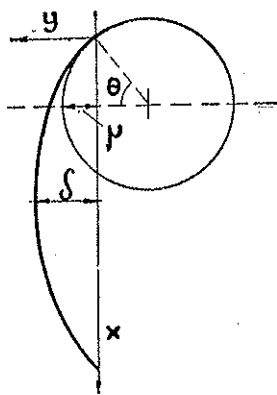


FIG. 2.

Poichè i due valori di y_1' debbono coincidere, segue:

$$K^2 = C^2 + 2 \frac{\delta_1}{R} .$$

Questo è pure il valore di y'^2 per $y = 0$ e quindi:

$$\epsilon_2 = \mu \cong \frac{1}{2} R y'^2 = \frac{1}{2} R C^2 + \delta_1 .$$

La fune si trova nelle condizioni del caso precedente con $K^2 = C^2 + 2 \frac{\delta_1}{R}$. Se il tratto pendente inizialmente rettilineo è infinitamente lungo, $C = 0$ ed $\epsilon_2 = \delta_1$, cioè il punto B dista di R dalla verticale condotta per il centro della puleggia.

SULL'ORIGINE DEGLI ELEMENTI LEGNOSI NEL CAULE (*)

F. M. GEROLA

SVMMARIVM. — Postquam breviter exposuit quid plantarum texturae efficere possint quod attinet ad novam ipsarum texturarum generationem, Auctor perpendit ea quae necessaria sunt ut lignum in caule nascatur, et ostendit quam naturam et quas conductionis vias habeat stimulus differentians xilematis.

Da circa un secolo si è ricercato di spiegare il meccanismo della formazione degli elementi legnosi nelle piante. Alle prime ricerche di carattere puramente anatomico, vennero in seguito a sostituirsi altre anatomo-fisiologiche: SACHS afferma la presenza negli organi giovani delle piante di particolari sostanze organo formative (presumendo naturalmente l'esistenza anche di sostanze determinanti la formazione dei vari tipi di tessuti); in seguito da vari autori vennero emesse diverse ipotesi, tendenti a dar valore, per la formazione del legno, a questo o quel fattore di natura fisica o chimica, influente sul metabolismo della pianta. Nell'ultimo ventennio, corrispondentemente allo sviluppo delle teorie ormonali, si è verificato un ritorno alle primitive ipotesi di SACHS, dando valore, riguardo alla differenziazione degli elementi legnosi, a particolari sostanze stimolanti.

Si è ancora lontani però da una soddisfacente spiegazione del modo di formazione e differenziazione degli elementi legnosi nelle piante, sebbene alcuni lavori portino un notevole contributo verso la sua definizione.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Gola il 24 giugno 1946.

Anche ammettendo la natura ormonale di un tale stimolo, resta tuttavia da chiarire se effettivamente si tratta di sostanze di natura auxinica o di altre differenti da questa; rimane ancora incognita la via di diffusione di un tale stimolante (specialmente per il modo della sua diffusione da cellula a cellula o lungo gli elementi conduttori), come pure la sua maniera di azione.

Per portare un contributo alla risoluzione di questi problemi legati alla differenziazione del tessuto legnoso nelle piante, allestii numerose esperienze già dall'anno 1939.

La maggior parte delle mie osservazioni vertono su trattamenti eseguiti su piante legnose, in parte minore su piante erbacee. Sia alle une che alle altre furono arrecati traumi di differente specie, per poter cercare dall'esame dei processi rigenerativi riscontrati, una soluzione alle numerose incognite più sopra prospettate. Non riferirò qui, nemmeno per sommi capi, i trattamenti eseguiti alle piante e le osservazioni che ho potuto trarre dall'esame dei risultati alle singole esperienze: tutto ciò sarà compito di un lavoro (che spero poter prossimamente pubblicare sul «Nuovo Giornale Botanico Italiano»), mi limiterò invece a fare una rapida scorsa sui dati di fatto più notevoli da me messi in evidenza.

Dall'esame delle capacità neoproduttive dei singoli tessuti delle piante, ho potuto rilevare come ben diversa sia tale capacità a seconda che i tessuti siano essi isolati o in connessione con altri tipi di tessuti. Nel primo caso solo pochi possono manifestare una notevole ed attiva proliferazione; anche il meristema cambiale, se completamente isolato, va soggetto precocemente alla morte. Altri tessuti (xilema, midollo, tessuto corticale) del fusto sono capaci di attive mitosi solo se uniti al cambio. In complesso ho potuto notare che le assise più giovani del libro ed il cambio sono i tessuti più attivi (se uniti fra loro). All'infuori degli organi assili della pianta, si ha nelle foglie il massimo di capacità neoproduttive, ed è all'epidermide fogliare che si deve tale capacità. Mentre isolando la corteccia dal fusto o la epidermide fogliare dalla foglia (con uniti alcuni elementi del mesofillo parenchimato sottostante) si può ottenere la formazione di un nuovo apice caulinare, gli altri tessuti non posseggono tale facoltà, ma, se isolati, si limitano unicamente alla produzione di alcuni elementi indifferenti.

Per quanto riguarda più propriamente la differenziazione di elementi legnosi nelle piante, ho potuto mettere in evidenza una netta distinzione esistente tra tracheidi da ferita da un lato ed elementi legnosi normali dall'altro, e ciò sia dal lato morfologico, sia funzionale, sia riguardo al modo di formazione; tra questi due gruppi estremi, occupa posizione intermedia il legno da ferita.

Le tracheidi da ferita sorgono per lo più per diretta trasformazione di cellule parenchimatiche; spesso non si riconosce nessuna norma che regoli il luogo della loro origine; funzionalmente esse rappresenterebbero degli elementi di riserva dell'acqua.

Gli elementi legnosi normali, per potersi differenziare, abbisognano invece di determinati fattori, in assenza dei quali è compromessa la loro origine. Questi fattori sono:

1° presenza di un tessuto meristematico secondario attivo, che dia origine alle cellule sulle quali possano agire poi gli stimoli differenzianti;

2° presenza di elementi giovani funzionanti;

3° necessità del collegamento con organi crescenti, almeno per un determinato tempo;

4° necessità della continuità cellulare tra le cellule prodotte dal meristema secondario e gli elementi xilematici giovani, o i meristemi primari.

Negli organi in sviluppo lo stimolo differenziante sarebbe prodotto dai meristemi primari; alla loro presenza è da riferirsi l'importanza delle gemme per la crescita in spessore. Nelle gemme però, come pure nelle foglie giovani, viene anche prodotto un ormone auxinico, che ha importanza per stimolare l'attività cambiale, e che favorisce la crescita in spessore del fusto, determinando una maggior produzione di elementi da parte del cambio, di quegli elementi cioè sui quali possa agire in seguito lo stimolo più propriamente differenziante.

Sulla natura dello stimolo xilema-differenziante non posso attualmente esprimermi ancora con sicurezza: avrei comunque dimostrato che esso non può essere una sostanza di tipo ormonale, essendo esso trasmissibile da cellula a cellula solo quando vi sia integra la continuità dei rapporti tra le cellule, e non essendosi mai riusciti ad estrarre l'ipotetico ormone. Anche la presenza di « organizzatori ve-

getali » del tipo di quegli animali deve essere accolta con un certo riserbo. È da escludere per il legno adulto la capacità di centro organizzatore, ed è invece riconoscibile un tale attributo ai meristemi primari (organizzatore primario) o ai giovani vasi funzionanti (organizzatore secondario). Questi centri induttori, per il loro modo di azione, devono essere tenuti ben distinti però da quelli messi in evidenza dallo SPEEMAN nel regno animale.

Lo stimolo proveniente dai centri organizzatori può essere trasmesso per brevi tratti in ogni direzione, la sua maggior capacità di diffusione è però in senso basipeto. Tale stimolo può trasmettersi attraverso i vasi giovani (che sarebbero capaci di indurre solo gli elementi a loro sottostanti) e attraverso le cellule giovani del parenchima (trasmissione possibile in ogni senso).

Per la formazione del legno da ferita non è affatto necessaria la presenza di un meristema secondario, nè quella di altri elementi legnosi. La sua produzione è da riferirsi a modificazioni di proprietà morfologiche, fisiologiche o di semplice orientamento delle cellule. Esso ha massimo sviluppo in corrispondenza dei luoghi lesi, ed, allontanandosi da tale zona, i tessuti che ne risultano assumono carattere sempre più normale. La sua formazione perdura fino a quando non siano riprese nell'organo le normali connessioni tra le cellule e i regolari rapporti tra i tessuti.

Non tutto il legno che si ritrova in un determinato punto è formato per lo stimolo differenziante proveniente dalle cellule vicine: oltre a tale processo normale, ho potuto mettere in evidenza la insinuazione di nuovi vasi dai tessuti superiori a quelli inferiori già formati.



CONSIDERAZIONI SU TALUNE DISPOSIZIONI ARCHITETTONICHE E STRUTTURALI DEI VASI DELLO STOMACO (*)

VINCENZO LEONE

SVMMARIVM. — Breviter de stomachi vasis agens, apud hominem nonnullaque animalia mammata, Auctor demonstrat peculiare artificiosas eorum dispositiones in variis eius partis tunicis, et describit quomodo in vascula abeant parvuli ganglii mienterici plexus in gastrico districtu, et parietum venarum structuram, quae mucosae sanguinem colligunt, qui parietes notabiles habent coartationes.

Nel corso di un recente studio da me eseguito, nell'Istituto Anatomico di Palermo sotto la direzione del prof. Luna, sulla vascolarizzazione dello stomaco ho potuto constatare che, sebbene moltissimo sia stato scritto sui vasi dello stomaco, pure alcune particolari disposizioni architettoniche e strutturali sin ora non sono state messe in sufficiente rilievo o sono del tutto ignorate. Poichè le attuali contingenze rendono difficile la pubblicazione del lavoro *in extenso*, mi sono deciso ad anticipare in questa Nota quei dati che mi sembrano degni di essere conosciuti e posti in debita luce.

Ho condotto il mio studio su preparati in sezione e per delaminazione di porzioni di stomaci umani e di stomaci di cani e di gatti; in essi avevo praticata l'iniezione intravasale di blu di Prussia sospeso in gelatina o la doppia iniezione. Inoltre, su stomaci *in toto*, anch'essi iniettati e induriti in alcole, ho potuto seguire sotto il microscopio

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Umberto Pierantoni il 10 novembre 1945.

binoculare il decorso dei singoli vasi, sino alle più fini ramificazioni, disseccando accuratamente le varie tuniche dell'organo che il vaso andava attraversando.

Per quanto riguarda la tunica sierosa ho potuto notare che il piano architetonico dei suoi vasi è fundamentalmente simile a quello delle altre sierose. La distribuzione di essi su due piani, uno superficiale costituito da scarsi ed esili vasellini, ed uno profondo formato da vasi più robusti e più numerosi, mi sembra, d'altra parte, possa confortare l'opinione di quegli Autori che nella tunica peritoneale distinguono due strati: uno più interno, connettivale, detto sottosieroso, ed uno superficiale costituito dall'epitelio della sierosa e dal suo corion, che rappresenta lo strato sieroso propriamente detto.

Dei vasi della tunica muscolare mi sembra degna d'essere messa in rilievo la loro ricchezza e la molteplicità delle fonti da cui essi originano. La muscolare dello stomaco riceve infatti sangue principalmente dalla rete intermuscolare, posta nel connettivo che unisce lo strato longitudinale a quello circolare; ma è irrorata anche dalle collaterali che ad essa lascia il tronco primario nell'attraversarla per recarsi alla sottomucosa. In particolare, allo strato longitudinale arrivano inoltre ramoscelli che originano dalla rete sottosierosa e allo strato circolare le collaterali dei rami che, con decorso ricorrente, dalla rete sottomucosa vanno a formare la rete intermuscolare. Tale ricchezza di vasi e la provenienza da sì diversi sistemi consente i più ampi vicariamenti, assicurando il massimo di nutrizione alla tunica che compie un notevole lavoro durante la digestione. Non è da escludere pertanto che le vie secondarie si rendano pervie solo nei momenti in cui la richiesta di sangue è maggiore.

Degno di rilievo mi sembra anche il fatto che i tronchi primari, i quali come è noto attraversano la muscolare per raggiungere la sottomucosa, decorrono sempre obliquamente rispetto alle fibrocellule muscolari. Ciò era stato notato anche da DJORUP (1921), il quale poneva un parallelo tra l'obliquità dei rami primari nel loro decorso nella muscolare dello stomaco e quella della porzione intramurale del coledoco nel duodeno e degli ureteri nella vescica. A me sembra che siffatta disposizione debba ritenersi come la più adatta a rispondere alle esigenze di resistenza meccanica di fronte alla contrazione delle fibre muscolari le quali, durante l'attività dell'organo in questione, ten-

derebbero a restringere e ad occludere i vasi e, rispettivamente, gli sbocchi del coledoco e degli ureteri.

Nel connettivo che unisce i due strati della muscolare, là dove si trovano i ganglietti del plesso mienterico e decorrono i tronchi dell'innervazione estrinseca dello stomaco, mi fu dato notare una caratteristica formazione vascolare che non mi risulta sia stata descritta sin'ora da nessun Autore.

Nelle vicinanze di un ganglio o di un tronco nervoso decorrono uno o più sottili rami arteriosi, che provengono dalla rete intermuscolare e sono in generale accompagnati da venuzze satelliti. Dal ramoscello arterioso si staccano direttamente numerosi capillari che circondano la formazione nervosa, penetrandovi nell'interno se si tratta di un ganglio (in alcuni casi si coglie l'immagine di una rete o « panier » vascolare che avvolge il ganglietto alla superficie), avvolgendolo soltanto a manicotto se si tratta di un tronco nervoso. I vasellini che penetrano nei ganglietti hanno decorso caratteristicamente ondulato; spesso si anastomizzano tra loro formando una rete capillare a maglie strette.

Deve essere rilevato che queste formazioni vasali derivano direttamente dalla rete intermuscolare, vale a dire che quei delicatissimi ed importanti organi nervosi hanno una irrorazione in rapporto con quella della tunica muscolare e tuttavia indipendente da quella dei singoli strati.

La tunica sottomucosa dal punto di vista vascolare assume un significato particolare che non ha dal punto di vista funzionale, non partecipando direttamente alla digestione. Essa infatti deve essere considerata come la centrale di distribuzione dei vasi, perchè, come è noto da lungo tempo, dalla rete sottomucosa prendono origine i rami per la mucosa e quelli per la muscolare. Si deve inoltre rilevare che nella sottomucosa si trovano due tipi di vasi:

1° vasi principali, provenienti direttamente dai tronchi del circolo perigastrico, quali ramificazioni dei grossi tronchi primari, che formano la rete principale sottomucosa; essa dà origine ai ricordati vasi per le altre due tuniche;

2° vasi propri, destinati alla nutrizione del connettivo sottomucoso e delle guaine dei grossi tronchi della rete principale, e che pertanto si esauriscono nella tunica stessa.

Un altro particolare ho potuto notare nella sottomucosa: la presenza in questo strato, ed in questo soltanto - infatti non ne ho incontrato nelle altre tuniche dell'organo -, di *anastomosi arterovenose*. Esse sono inserite tra i vasi della rete propria, sicchè mi sembra si possa ritenere che costituiscano un mezzo di abbreviazione del decorso del sangue e di riduzione dell'afflusso sanguigno al tessuto proprio della tunica sottomucosa che ha scarsa attività funzionale, a tutto vantaggio degli strati più attivi e che hanno quindi maggiori esigenze nutritive.

Riguardo ai vasi della mucosa lo studio accurato di questa tunica mi ha permesso di rilevare alcuni particolari nuovi. Le arteriole che originano dalla rete sottomucosa, dopo avere attraversata la *muscularis mucosae* - a cui lasciano sottili collaterali - si piegano al di sopra di questa e, anastomizzandosi frequentemente tra di loro, formano una rete che si stende nel corion della mucosa, quasi a contatto della *muscularis (rete arteriosa sottoghiandolare)*. Tali vasi hanno calibro relativamente cospicuo, e notevoli sono pure i tratti anastomotici che li uniscono concorrendo a formare le maglie della detta rete sottoghiandolare. Non mi pare giustificato quindi, in base ai miei reperti, parlare di « sottili anastomosi » come si trova in tutti i lavori in cui sono descritti questi vasi della mucosa.

Dalla rete sottoghiandolare si staccano brevi ramoscelli precapillari, diretti verso i corpi delle ghiandole gastriche; tali ramoscelli, prima di raggiungere i fondi ghiandolari, si ripiegano e si anastomizzano fra loro, costituendo una elegante rete (*rete secondaria precapillare*) stesa anch'essa nel corion della mucosa, al di sopra della rete venosa sottoghiandolare. Dalla rete precapillare alla loro volta traggono origine i capillari che avvolgono a rete i corpi delle ghiandole gastriche, sino al colletto.

Non mi risulta che sin ora altri Autori abbiano fatto cenno alla rete precapillare da me descritta; ciò forse per il fatto che nei preparati in sezione essa non può vedersi data la sottigliezza di questi vasi e perchè non si ha una visione panoramica dello strato connettivale in cui essa è collocata, mentre nei preparati per delaminazione viene facilmente mascherata dalla fittissima rete capillare perighiandolare.

Io ho potuto osservarla bene in sezioni oblique, nelle quali quindi erano eliminati i detti inconvenienti.

La esistenza di queste due reti, secondaria precapillare e arteriosa sottoghiandolare, esclude quindi il carattere di terminalità che si attribuiva alle arterie della mucosa gastrica.

Sul concetto della non terminalità anatomica tuttavia vi è oggi accordo ed è stato confermato anche ampiamente da recente (TONDO, 1941 e 1944).

Il sangue della rete capillare perighiandolare, raccolta dalle radici venose, confluisce in grossi canali verticali o collettori, che presentano un carattere assai spiccato non sufficientemente rilevato fin ora: essi, man mano che dalla superficie della mucosa ci si avvicina alla *muscularis mucosae*, presentano delle strozzature che vanno sempre più accentuandosi. Due se ne notano quasi costantemente nel collettore venoso prima che questo si immetta nella rete situata nel corion sottoghiandolare (*rete venosa sottoghiandolare*). Anche la rete venosa a sua volta è costituita da vasi moniliformi nei quali le strozzature sono molto evidenti. Questi vasi sono simili alle « drossel-venen » degli Autori tedeschi.

Nell'intento di approfondire lo studio delle pareti dei caratteristici vasi che presentano le descritte strozzature, ho colorato col metodo di MALLORY-AZAN sezioni di stomaco di cane ed ho potuto rilevare i seguenti particolari. I vasi sono come scavati nello spessore degli interstizi connettivali interghiandolari; non si nota infatti un ispessimento avventiziale del connettivo perivasale e la tunica muscolare è costituita dalle fibrocellule, in prevalenza longitudinali, che provengono dalla *muscularis mucosae* e sono comunemente descritte tra le fibre del connettivo interghiandolare.

I fascetti muscolari, in sezioni longitudinali del vaso, appaiono ondulati, sì da determinare slargamenti e restringimenti nel canale vasale, e sono ispessiti nei punti più larghi di questo.

Sebbene sia difficile dare una esatta interpretazione funzionale di questo particolare carattere dei vasi venosi della mucosa gastrica, pure mi pare si possa pensare che la disposizione a fibre longitudinali della componente muscolare della parete di questi vasi, col meccanismo di una diminuzione dell'altezza di essi per contrazione delle fibrocellule muscolari, favorisca lo scarico del sangue e consenta una più attiva circolazione nel territorio mucoso.

SULL'ANDAMENTO DELLA TENSIONE IN UNA CINGHIA DI TRASMISSIONE TENUTO CONTO DELLA DIPENDENZA DEL COEFFICIENTE D'ATTRITO DALLA VELOCITÀ^(*)

E. PISTOLESI
Accademico Pontificio

SVMMARIVM. — Determinat Auctor qua lege mutetur tensio cinguli transmissionis in arcu qui circa trochleam versatur, rationem habens relationis inter coefficientem attritus et velocitatem relativam (quae relatio lege, cuius specimen est $f = av^n$, exprimitur), et deducens ea quae ex huiusmodi investigationibus consequuntur.

Nella trattazione ordinaria del problema delle tensioni nelle cinghie di trasmissione si suppone un coefficiente d'attrito f costante. In realtà l'esperienza dimostra che il coefficiente d'attrito f è funzione crescente della velocità relativa v fra la cinghia e la fascia della puleggia (salvo che in un brevissimo tratto nell'intorno di $v = 0$) con una legge che si può in molti casi mettere per approssimazione nella forma:

$$[1] \qquad f = av^n \qquad (n < 1).$$

Consideriamo dapprima il caso della puleggia condotta.

Se indichiamo con T la tensione generica, con T_0 la tensione nel ramo meno teso, che si avvolge sulla puleggia, con u la velocità della

(*) Nota presentata l'8 marzo 1946.

cinghia, con v_0 la velocità di scorrimento fra cinghia e puleggia nel punto in cui la cinghia si avvolge sulla puleggia (velocità di scorrimento iniziale) e si considera la cinghia come un solido elastico, si ha nel punto generico dell'arco abbracciato dalla cinghia una velocità di scorrimento:

$$v = \frac{T - T_0}{ES} u + v_0$$

e quindi:

$$f = a \left(\frac{T - T_0}{ES} u + v_0 \right)^n$$

Introducendo la tensione efficace

$$T^v = T - \frac{g}{g} v^2$$

dove g indica il peso per unità di lunghezza della cinghia, si ha poi la nota equazione

$$d\varphi = \frac{dT^v}{fT^v}$$

e quindi:

$$d\varphi = \frac{dT^v}{T^v a \left(\frac{T^v - T_0'}{ES} u + v_0 \right)^n}.$$

Abolendo per semplicità l'apice, con che T indicherà d'ora innanzi la *tensione efficace*, e ponendo $T_0 - ES \frac{v_0}{u} = T_i$, si può scrivere:

$$d\varphi = \frac{dT}{aT \left(\frac{T - T_i}{ES} u \right)^n} = \frac{d\tau}{A\tau(\tau - 1)^n}$$

avendo posto:

$$\tau = \frac{T}{T_i}, \quad A = a \left(\frac{T_i u}{ES} \right)^n = a \left(\frac{T_0 u}{ES} - v_0 \right)^n$$

e quindi:

$$[2] \quad \varphi = \frac{1}{A} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau(\tau-1)^n}$$

dove il limite inferiore $\tau_0 = \frac{T_0}{T_i}$ è l'unità se $v_0 = 0$, mentre è > 1 se $v_0 > 0$. Se poniamo:

$$F(\tau) = \int_1^{\tau} \frac{d\tau}{\tau(\tau-1)^n}$$

si avrà

$$\varphi = \frac{1}{A} \left\{ F(\tau) - F(\tau_0) \right\}.$$

La funzione $F(\tau)$ si può calcolare in via grafica o numerica. Per il caso particolare, desunto dalla fig. 7 del trattatello di W. VELISCH: *Der Treibriemen*, per il quale caso $a = 0,8$ ed $n = 0,23$ (velocità espressa in metri), si ha per $F(\tau)$ il diagramma riportato in figura.

Il valore di A si può porre nella forma:

$$A = a \left(\frac{T_0 u}{ES} \right)^n \cdot \frac{1}{\tau_0^n}$$

con

$$\tau_0 = \frac{1}{1 - \frac{ES}{T_0} \cdot \frac{v_0}{u}};$$

perciò:

$$[3] \quad \varphi = \frac{\tau_0^n}{a \left(\frac{T_0 u}{ES} \right)^n} \left\{ F(\tau) - F(\tau_0) \right\}.$$

Nel caso in cui *non* vi sia scorrimento iniziale ($v_0 = 0$) si ha più semplicemente:

$$[4] \quad \varphi = \frac{F\left(\frac{T}{T_0}\right)}{a \left(\frac{T_0 u}{ES} \right)^n}$$

e per $T = T_1$ (tensione nel ramo più teso):

$$[5] \quad \varphi_1 = \frac{F\left(\frac{T_1}{T_0}\right)}{a\left(\frac{T_0 u}{ES}\right)^n}.$$

Nel caso che l'angolo φ_1 risultante dalla [5] sia maggiore dell'angolo θ abbracciato dal cingolo, interviene lo scorrimento iniziale v_0 , da cui dipende τ_0 ; e poichè $\frac{\tau_1}{\tau_0}$ è costante ed uguale a $\frac{T_1}{T_0}$, φ_1 , calcolato mediante la [3] col porre

$$\tau = \tau_1 = \tau_0 \frac{T_1}{T_0}$$

diviene una funzione di τ_0 ; funzione decrescente fino ad un minimo a cui tende asintoticamente per τ_0 tendente all'infinito, come risulta dall'andamento della funzione

$$[6] \quad \tau_0^n \left\{ F\left(\tau_0 \frac{T_1}{T_0}\right) - F(\tau) \right\}$$

(vedasi figura per i casi $\frac{T_1}{T_0} = 1,3; 1,5; 2$). Si può anzi calcolare il valore asintotico della funzione [6], che si presenta sotto la forma $\infty \cdot 0$, e si trova (applicando la regola di De l'Hôpital dopo avere posto τ_0^{-n} a denominatore):

$$[7] \quad \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} a\left(\frac{T_0 u}{ES}\right)^n \varphi_1 = \frac{1}{n} \left\{ 1 - \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^n \right\}.$$

Giova osservare che τ_0 diviene infinito per $T_1 = 0$, ossia per

$$[8] \quad v_0 = \frac{T_0 u}{ES}$$

e poichè $\frac{T_0}{ES}$ è dell'ordine di $\frac{1}{100}$, si vede che lo slittamento iniziale possibile per $T_1 > 0$ è una piccola frazione della velocità gene-

rale del cingolo, u . L'abbassamento nel valore di φ_1 che essa può produrre si desume confrontando l'espressione al secondo membro della [7] con $F\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$. Si ha:

$\frac{T_1}{T_0}$	1,2	1,5	2
$F\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$	0,3450	0,6326	0,9428
$\frac{1}{n} \left\{ 1 - \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^n \right\}$	0,177	0,387	0,637

Si vede così che la riduzione nell'angolo φ_1 , che è del 49% per $\frac{T_1}{T_0} = 1,2$, si riduce al 33% per $\frac{T_1}{T_0} = 2$, cioè l'effetto percentuale di uno slittamento iniziale è tanto più sentito quanto più piccolo è il rapporto $\frac{T_1}{T_0}$, vale a dire quanto più alte sono le tensioni T_1 e T_0 rispetto alla loro differenza Q , che è la forza periferica da trasmettere ⁽¹⁾.

Ma v_0 può superare il valore dato dalla [8]. In tal caso T_1 diviene negativa e l'integrale [2] non può calcolarsi. Occorre allora porre $T_1' = -T_1 = ES \frac{v_0}{u} - T_0$ e $\tau = \frac{T}{T_1'}$. Segue ancora la [3] in cui peraltro

$$F(\tau) = \int \frac{d\tau}{\tau(\tau+1)^n}.$$

⁽¹⁾ Si può mettere la Q in evidenza scrivendo la [5] sotto la forma:

$$[I] \quad \varphi_1 = \frac{F\left(1 + \frac{Q}{T_0}\right) \cdot \left(\frac{Q}{T_0}\right)^n}{a \left(\frac{Qu}{ES}\right)^n}$$

e la [3] sotto la forma:

$$[II] \quad \varphi_1 = \frac{\left(\frac{Q}{T_0}\right)^n}{a \left(\frac{Qu}{ES}\right)^n} \cdot \tau_0^n \left\{ F\left[\tau_0\left(1 + \frac{Q}{T_0}\right)\right] - F(\tau_0) \right\}.$$

Quando v_0 è molto grande, e quindi τ molto piccolo, τ si può trascurare di fronte all'unità e allora si ha semplicemente:

$$\varphi_1 \cong \frac{1}{av_0^n} \ln \frac{T_1}{T_0}$$

formula che è quella medesima che vale per coefficiente d'attrito costante e uguale a quello che compete allo slittamento iniziale v_0 , di fronte al quale risulta trascurabile lo slittamento elastico. Naturalmente v_0 non può superare u . Tuttociò ha valore puramente teorico, in quanto supporre che la legge $f = av^n$ valga anche per valori molto elevati di v , mentre essa vale essenzialmente per piccoli valori.

La [5] è molto istruttiva, in quanto mette in evidenza sia l'influsso di T_0 (aumentando T_0 il denominatore della [5] aumenta, mentre il numeratore diminuisce, perchè $\frac{T_1}{T_0} = 1 + \frac{Q}{T_0}$; vedasi anche la formula [I] della nota alla precedente pagina), sia quello della velocità u del cingolo (aumentando u diminuisce φ_1), sia quello della rigidezza a trazione ES della cinghia (aumentando la rigidezza aumenta l'angolo φ_1 necessario alla trasmissione; per $ES \rightarrow \infty$ il coefficiente d'attrito diventa quello che compete allo slittamento iniziale v_0). Per quanto riguarda l'influsso della velocità si ha dalla [5] la giustificazione più plausibile della nota regola pratica che le cinghie veloci possono trasmettere con un medesimo angolo di avvolgimento forze periferiche maggiori delle cinghie lente⁽¹⁾, ciò che trova la sua ragione nel fatto che la velocità di scorrimento è proporzionale alla u , e quindi un aumento di questa porta ad un aumento del coefficiente di attrito. Al quale proposito è peraltro da osservare che tale influsso risulterà in effetti meno sentito di quanto risulterebbe dalle formule, in quanto, all'aumentare della velocità, diminuisce il tempo concesso alle deformazioni e da ciò, data la natura delle cinghie e il loro modo di deformarsi progressivamente nel tempo, deriva una diminuzione delle deformazioni stesse, ossia un aumento virtuale del modulo elastico E.

(1) Dato T_1 , scelto in relazione alla resistenza del cingolo, e fermo restando φ_1 , un aumento di u porta ad una diminuzione di T_0 e quindi ad un aumento della forza periferica Q .

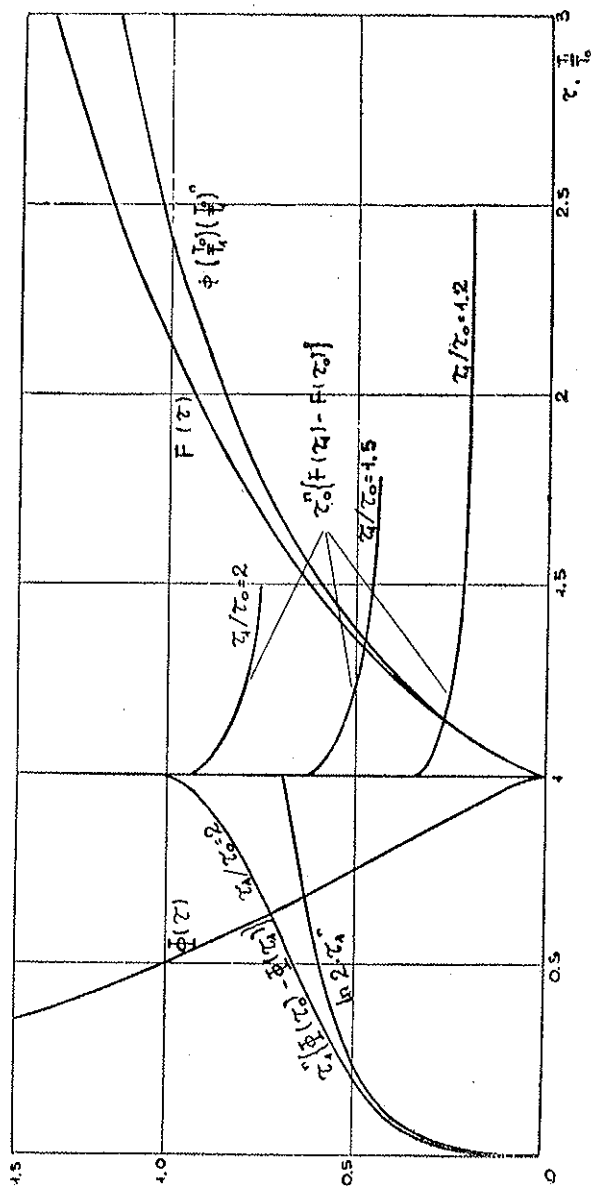


FIG. 1.

Per la puleggia conduttrice si hanno naturalmente formule analoghe:

$$f = a \left(\frac{T_i - T}{ES} u + v_i \right)^n$$

da cui, posto:

$$T_i + ES \frac{v_i}{u} = T_j$$

$$\tau = \frac{T}{T_j}$$

$$B = a \left(\frac{T_j u}{ES} \right)^n = a \left(\frac{T_i u}{ES} + v_i \right)^n$$

segue:

$$\varphi = -\frac{1}{B} \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^n} = \frac{1}{B} \int_{\tau}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^n} \quad (\tau < 1)$$

Posto:

$$\Phi(\tau) = \int_{\tau}^1 \frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^n}$$

si ha quindi:

$$\varphi = \frac{1}{B} \left\{ \Phi(\tau) - \Phi(\tau_1) \right\}$$

con:

$$\tau_1 = \frac{1}{1 + \frac{ES}{T_i} \cdot \frac{v_i}{u}} \quad ; \quad B = a \left(\frac{T_i u}{ES} \right)^n \cdot \frac{1}{\tau_1^n}$$

e quindi:

$$[9] \quad \varphi = \frac{\tau_1^n}{a \left(\frac{T_i u}{ES} \right)^n} \left\{ \Phi(\tau) - \Phi(\tau_1) \right\}.$$

In assenza di scorrimento iniziale ($v_i = 0$)

$$[10] \quad \varphi = \frac{\Phi\left(\frac{T}{T_i}\right)}{a \left(\frac{T_i u}{ES} \right)^n}$$

e per $T = T_0$:

$$[11] \quad \varphi_0 = \frac{\Phi\left(\frac{T_0}{T_1}\right)}{a\left(\frac{T_1 u}{ES}\right)^n}.$$

È interessante notare che, contrariamente a quanto si verifica nella trattazione ordinaria, non è $\varphi_1 = \varphi_0$, cioè gli archi attivi sulle due pulegge, condotta e conduttrice, non sono uguali.

Ciò si constata ponendo:

$$\varphi_0 = \frac{\Phi\left(\frac{T_0}{T_1}\right)}{a\left(\frac{T_0}{ES}\right)^n} \cdot \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^n$$

Pertanto il confronto va effettuato fra $F\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$ e $\Phi\left(\frac{T_0}{T_1}\right)\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^n$. Vedasi in figura l'andamento della funzione $\Phi(\tau_0)$, essendo qui $\tau_0 = \frac{T_0}{T_1}$ ($= \frac{T_0}{T_1}$ in assenza di scorrimento iniziale), come pure l'andamento di $\Phi\left(\frac{T_0}{T_1}\right) \cdot \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^n$ in funzione di $\frac{T_1}{T_0}$. Si vede dal confronto con la $F\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$, che φ_0 è sempre minore di φ_1 e la differenza è tanto maggiore quanto più elevato è il rapporto $\frac{T_1}{T_0}$.

Se ne deduce che uno slittamento iniziale si verificherà prima sulla puleggia condotta che su quella conduttrice, se l'angolo abbracciato dal cingolo è uguale sulle due pulegge.

Occorre ora vedere l'effetto di uno slittamento iniziale sulla puleggia conduttrice. A questo serve la [9]. Occorre cioè investigare l'andamento della funzione

$$[12] \quad \tau_1^n \left\{ \Phi\left(\tau_1 \frac{T_0}{T_1}\right) - \Phi(\tau_1) \right\}$$

in funzione di τ_1 . Si veda in figura l'andamento della [11] per $\frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{2}$.

Essa è funzione decrescente al decrescere di τ_1 e tende a zero per τ_1

tendente a zero. È anzi facile vedere che per τ_1 molto piccolo $\Phi(\tau_1)$ tende a $-\ln \tau_1$ e quindi l'espressione [12] a $\ln \frac{T_1}{T_0} \cdot \tau_1^n$, e quindi

$$\varphi_0 \cong \frac{1}{av_1^n} \ln \frac{T_1}{T_0}$$

come nel caso della puleggia condotta, valendo anche in questo caso l'osservazione che il coefficiente d'attrito può considerarsi costante e uguale a quello che compete alla velocità v_0 , di fronte alla quale può trascurarsi la velocità addizionale derivante dallo slittamento elastico.

Tanto per la puleggia condotta quanto per la puleggia conduttrice lo slittamento iniziale può assumere qualunque valore, da 0 al massimo u (puleggia ferma nel caso della puleggia condotta, cinghia ferma nel caso della puleggia conduttrice). Se chiamiamo *slittamento globale* quello che interviene quando la cinghia non può trasmettere la forza periferica richiesta, si può dire che si ha slittamento globale quando l'angolo θ abbracciato dal cingolo è inferiore al minimo di φ_1 o di φ_0 che si ottiene dando a v_0 il suo massimo possibile valore u . Quando invece la trasmissione è possibile, sia pure con forte perdita di velocità, ossia $v_0 < u$, si ha *slittamento iniziale*. Peraltro, come già si è osservato, queste conclusioni hanno carattere puramente teorico, giacchè la legge di variazione di f con la velocità non può essere estesa agli alti valori di questa, talchè in pratica si raggiunge presto per f un massimo al quale compete pure la massima coppia trasmissibile. Se la coppia da trasmettere è superiore a questa, interviene lo slittamento globale.

A conclusione delle precedenti considerazioni, notiamo che non sempre sarà possibile porre la legge di dipendenza fra coefficiente d'attrito e velocità di scorrimento sotto la forma [1]. Tuttavia i risultati trovati conservano in ogni caso dal punto di vista qualitativo il loro valore, il quale deriva dall'essere il coefficiente d'attrito f crescente con la velocità di scorrimento.

SULL'ESISTENZA DI SOLUZIONI PER UN SISTEMA DI n EQUAZIONI IN n INCOGNITE^(*).

G. SCORZA DRAGONI

SVMMARIVM. — Nova eaque simplici ratione Auctor demonstrat solutiones exstare systematis n aequationum, n incognita habentis; haec nova demonstrandi ratio e topologico quodam theoremate deducta est, quod praecipue a Lebesgue inventum est.

In questa Nota mi propongo di dare un'altra dimostrazione del seguente

TEOREMA A): *Se le funzioni reali di variabili reali $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ sono continue nel cubo $C: 0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq x_n \leq 1$ e se inoltre $f_i(x_1, \dots, x_n)$ è non positiva sulla faccia di C contenuta nell'iperpiano $x_i = 0$ e non negativa su quella contenuta nell'iperpiano $x_i = 1$ ($i=1, \dots, n$), esiste almeno un punto di C in cui le $f_i(x_1, \dots, x_n)$ sono simultaneamente nulle;*

cioè: se sulle faccie di C sono soddisfatte le condizioni

$$[1] \quad \begin{aligned} f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) &\leq 0, \\ f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) &\geq 0 \end{aligned}$$

(le f_i essendo continue in C), in C esiste almeno una soluzione del sistema

$$[2] \quad f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_n(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi il 21 febbraio 1946.

L'idea che mi ha condotto a costruire questa dimostrazione è sempre quella che ha servito di guida già a ZWIRNER⁽¹⁾ ed a me⁽²⁾ per dare altre dimostrazioni del teorema A); e precisamente, eccola: MIRANDA ha riconosciuto⁽³⁾ che il teorema A) è equivalente a quello classico di BROUWER⁽⁴⁾ sull'esistenza di punti uniti nelle trasformazioni continue dell'elemento n -dimensionale in sue parti; epperò è presumibile che quegli stessi mezzi che sono sufficienti per stabilire quello di BROUWER debbano anche permettere di dare una giustificazione diretta del teorema A).

Ed infatti, nel primo dei suoi lavori citati, ZWIRNER dimostra la proposizione in discorso, riconducendola ad un teorema di POINCARÉ-BOHL ed a proprietà classiche della caratteristica o indice di KRONECKER di un sistema di funzioni, mezzi questi sufficienti anche per dimostrare il teorema di BROUWER.

Nel mio lavoro citato per primo io dò una dimostrazione del teorema A) ancora più rapida e snella, ricorrendo agli stessi mezzi.

Nel secondo dei miei lavori citati, ne dò un'altra, nel caso dei polinomi⁽⁵⁾, avvalendomi appunto di quello stesso lemma, di cui si servono BIRKHOFF e KELLOGG⁽⁶⁾ per dimostrare il teorema di Brou-

(¹) G. ZWIRNER, *Sulle radici dei sistemi di equazioni non lineari* [*« Rend. del Seminario Matematico della Università di Padova »*, vol. XV, in corso di stampa].

Nel caso $n = 2$, ZWIRNER aveva implicitamente dimostrato il teorema in discorso già in *Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali del quarto ordine* [*ibidem*, vol. IX (1938), pagg. 150-155], pagg. 152-154.

(²) G. SCORZA DRAGONI, *Un'osservazione sulle radici di un sistema di equazioni non lineari*, [*ibidem*, vol. XV, in corso di stampa]; G. SCORZA DRAGONI, *A proposito di un teorema sui sistemi di equazioni algebriche* [*« Rend. della Accademia Nazionale dei Lincei »*, in corso di stampa].

(³) C. MIRANDA, *Un'osservazione su un teorema di Brouwer* [*« Boll. dell'Unione Matematica italiana »*, serie II, vol. III (1940-41), pagg. 5-7].

(⁴) L. E. J. BROUWER, *Ueber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, [*« Mathematische Annalen »*, vol. 71 (1912), pagg. 97-115], pag. 115.

(⁵) Nel qual caso il teorema A) è stato giustificato anche da L. BRUSOTTI in *Dimostrazione di un lemma algebrico utile in quistioni d'analisi* [*« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa »*, serie II, vol. XI (1942), pagg. 211-215]. Vovamente BRUSOTTI suppone soddisfatte le [1] nel senso forte. Ma questa ipotesi si elimina facilmente in un secondo tempo, in conformità di quanto ha osservato MIRANDA nella Nota citata in (³).

(⁶) G. D. BIRKHOFF e O. D. KELLOGG, *Invariant points in function space* [*« Transactions of the American Mathematical Society »*, vol. 23 (1922), pagg. 96-115], nn. 1 e 2.

WER⁽⁷⁾, per trasformazioni che si possano rappresentare mediante polinomi, alle quali essi riconducono poi il caso generale previo l'uso del teorema classico di WEIERSTRASS sull'approssimazione delle funzioni continue⁽⁸⁾.

Orbene, in questa Nota mi propongo di giustificare il teorema A) ricorrendo a quegli stessi mezzi di cui si sono serviti KNASTER, KURATOWSKI e MAZURKIEWICZ⁽⁹⁾ per dare del teorema di BROUWER una dimostrazione, *die sehr kurz und insofern besonders elementar ist, als sie keine spezielle Kenntnisse aus der Theorien voraussetzt, in welche dieser Satz gehört*⁽¹⁰⁾.

La dimostrazione attuale si basa su di un teorema che formulerò nel modo seguente, seguendo SPERNER⁽¹¹⁾, a cui se ne deve una dimostrazione molto semplice⁽¹²⁾:

Siano: Σ il simpleso a n dimensioni che ha come vertici l'origine U_0 ed i punti unità U_1, \dots, U_n degli assi coordinati; σ_j la faccia a $n-1$ dimensioni di Σ opposta ad U_j , per $j=0, 1, \dots, n$; $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ porzioni chiuse di Σ , tali che sia $\Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_n = \Sigma$, $\Gamma_j \cdot U_j = U_j$, $\Gamma_j \cdot \sigma_j = 0$,

(7) Per altre dimostrazioni dello stesso teorema, oltre a quella che ricorderò nella successiva nota (9), si veda: J. W. ALEXANDER, *On transformations with invariant points* [ibidem, pagg. 89-95], pag. 94; G. FEIGL, *Fixpunktsätze für spezielle n -dimensionale Mannigfaltigkeiten* [«Mathematische Annalen», vol. 98 (1927), pagg. 355-398], pag. 369.

(8) Naturalmente — e la cosa peraltro è stata già rilevata in modo esplicito da S. CINQUINI in *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie* [«Rend. del Seminario Matematico e Fisico di Milano», vol. XIV (1940), pagg. 157-170], nota (12) a piè delle pagg. 168 e 169 — anche per il teorema A) si presenta una circostanza analoga: basta cioè dimostrarlo per i polinomi perchè lo si possa ritenere acquisito anche per le funzioni continue {prima supponendo le [1] soddisfatte nel senso forte, e poi tenendo conto dell'osservazione di MIRANDA ricordata nella nota (5)}.

(9) B. KNASTER, C. KURATOWSKI, S. MAZURKIEWICZ, *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n -dimensionale Simplexe* [«Fundamenta Mathematicae», vol. 16 (1929), pagg. 132-137].

(10) Cfr. ALEXANDROFF e HOPF, *Topologie*, I [Springer, Berlino (1935)], pag. 376.

(11) E. SPERNER, *Ueber die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene* [«Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität», vol. 10 (1934), pagg. 1-47], § 1.

(12) E. SPERNER, *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes* [ibidem, vol. 6 (1928), pagg. 265-275], §§ 2 e 3.

per $j = 0, 1, \dots, n$. Allora esiste almeno un punto (di Σ) che appartiene a tutti gli insiemi $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ ⁽¹³⁾.

Per procedere più speditamente, darò prima al teorema di SPERNER una forma già interessante di per sé e più adatta allo scopo a cui tendo, deducendone il seguente corollario:

Se E_1, \dots, E_n sono n porzioni chiuse del cubo $C: 0 \leq x_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$), tali che i punti della faccia S_i di C contenuta nell'iperpiano $x_i = 0$ siano tutti esterni ad E_i , mentre invece siano interni ad E_i , rispetto a C ⁽¹⁴⁾, tutti i punti di quella, S_i , contenuta nell'iperpiano $x_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$), esiste un punto interno a C che appartiene sia alla frontiera di E_1 , che a quella di E_2, \dots , che a quella di E_n .

La dimostrazione di questo corollario è data nel n. 1 di questa Nota. Nel n. 2 segue la deduzione, ormai facile, del teorema A).

Ma innanzi tutto desidero porre in rilievo che il corollario del teorema di SPERNER non è da considerarsi come nuovo. Mi spiego.

Il teorema di SPERNER si presta ⁽¹⁵⁾ a dimostrare molto semplicemente il così detto *Pflastersatz* di LEBESQUE ⁽¹⁶⁾, che può essere formulato come segue:

Sia G un insieme limitato (dello S_n reale euclideo), dotato di punti interni, ed ogni punto di G appartenga ad uno degli insiemi chiusi M_1, \dots, M_p (p intero positivo). Se i diametri di questi ultimi sono abbastanza piccoli (il numero finito p supera n ed) almeno un punto di G appartiene ad $n + 1$ degli insiemi M_1, \dots, M_p .

Il LEBESQUE ne abbozza una dimostrazione in una Nota pubblicata nei *Mathematische Annalen* ⁽¹⁷⁾; e ritorna sulla sua dimostrazione, correggendola e completandola, in una Memoria comparsa nei *Fundamenta*

⁽¹³⁾ Nel loro lavoro citato, KNASTER, KURATOWSKI e MAZURKIEWICZ sostituiscono le $\Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_n = \Sigma$, $\Gamma_j \cdot U_j = U_j$, $\Gamma_j \cdot \sigma_j = 0$ con la seguente ipotesi meno restrittiva: la faccia r -dimensionale ($r = 0, 1, \dots, n$) di Σ di vertici $U_{j_0}, U_{j_1}, \dots, U_{j_r}$ è contenuta, per ogni scelta di j_0, j_1, \dots, j_r , in $\Gamma_{j_0} + \Gamma_{j_1} + \dots + \Gamma_{j_r}$.

⁽¹⁴⁾ Un punto R di E_i è interno ad E_i rispetto a C , se appartengono ad E_i tutti i punti di C sufficientemente prossimi ad R .

⁽¹⁵⁾ Cfr. loc. cit. ⁽¹²⁾, § 1.

⁽¹⁶⁾ Cfr. loc. cit. ⁽¹⁰⁾, cap. IX, § 2, n. 2; § 3, n. 1; appendice.

⁽¹⁷⁾ H. LEBESQUE, *Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces à n et $n + p$ dimensions* [*Mathematische Annalen*], vol. 70 (1911), pagg. 166-168].

Mathematicae ⁽¹⁸⁾. Orbene, come ho già avuto occasione di dire altrove ⁽¹⁹⁾, nella sostanza i ragionamenti di LEBESQUE forniscono anche una dimostrazione del teorema A). E le considerazioni di LEBESQUE conducono in sostanza proprio al lemma che qui stabilisco nel n. 1.

Un lemma analogo è dato anche da BROUWER ⁽²⁰⁾. Ma i ragionamenti di LEBESQUE e BROUWER non sono così semplici come quelli con cui SPERNER ha stabilito il suo teorema.

Non intendo qui approfondire questi punti, mi basta aver rilevato che la prima dimostrazione del teorema A), nella direzione seguita in questa Nota, risale in sostanza a BROUWER-LEBESQUE. Anzi, a questo proposito, non sarà inopportuno rammentare ancora una volta ⁽²¹⁾ che la prima dimostrazione del teorema A) è stata data implicitamente da BROUWER nel § 1 della sua Nota: *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl* ⁽²²⁾.

1. DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA. — Riprendiamo le ipotesi fatte e le notazioni introdotte nel corollario del teorema di SPERNER.

E sia E_0 l'involucro chiuso dell'insieme dei punti di C che non appartengano a nessuno degli insiemi E_1, \dots, E_n .

Per le ipotesi fatte, l'origine U_0 è interna ad E_0 , rispetto a C ; mentre i punti unità $U_1 \equiv (1, 0, \dots, 0), \dots, U_n \equiv (0, \dots, 0, 1)$ sono ordinatamente interni ad E_1, \dots, E_n , sempre rispetto a C . I punti di $S_1 + \dots + S_n$, e quindi in particolare U_1, \dots, U_n , sono esterni ad E_0 .

Consideriamo ora il semplice Σ , che ha come vertici U_0, U_1, \dots, U_n , e definiamo una trasformazione biunivoca e bicontinua T di C in Σ nel modo seguente.

⁽¹⁸⁾ H. LEBESQUE, *Sur les correspondances entre le points de deux espaces* [*« Fundamenta Mathematicae »*, vol. 2 (1921), pagg. 256-285], nn. 3-8.

⁽¹⁹⁾ G. SCORZA DRAGONI, *A proposito di alcuni teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie* [*« Rend. del Seminario Matematico della Università di Padova »*, in corso di stampa], nota ⁽²⁰⁾.

⁽²⁰⁾ L. E. J. BROUWER, *Ueber den natürlichen Dimensionsbegriff* [*« Journal für die reine und angewandte Mathematik »*, vol. 142 (1913), pagg. 146-152; per una *Berichtigung*, se ne veda il vol. 153 (1924), pag. 253], pagg. 150-152.

⁽²¹⁾ Cfr. *loc. cit.* ⁽¹⁹⁾, nota ⁽²⁷⁾, e *loc. cit.* ⁽²⁾.

⁽²²⁾ *« Mathematische Annalen »*, vol. 70 (1911), pagg. 161-165.

Accanto a C consideriamo il cubo $D: |x_1| \leq 1, \dots, |x_n| \leq 1$ ed accanto a Σ l'involucro convesso⁽²³⁾ A dei punti U_1, \dots, U_n e dei loro simmetrici rispetto all'origine U_0 . Diciamo P il punto corrente del contorno di D ; Q il punto in cui il segmento U_0P incontra la frontiera di A .

La trasformazione t di D in A definita dalle condizioni di mutare linearmente il segmento U_0P nel segmento U_0Q , lasciando fermo U_0 , è biunivoca e continua.

Ebbene, la T sarà appunto la trasformazione di C in Σ subordinata da t .

I punti U_0, U_1, \dots, U_n sono uniti nella T .

Inoltre, se $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ sono rispettivamente le immagini di E_0, E_1, \dots, E_n , dalle proprietà di E_j e di T segue che Γ_j è chiuso, contiene U_j e non contiene nessun punto della faccia σ_j di Σ opposta ad U_j , per $j = 0, 1, \dots, n$.

Quindi, pel teorema di SPERNER, $\Gamma_0 \cdot \Gamma_1 \cdot \dots \cdot \Gamma_n$ non è vuota, e se H' è un punto di questa intersezione, la sua immagine H nella T^{-1} è un punto comune ad E_0, E_1, \dots, E_n .

Attesa la definizione di E_0 , il punto H in quanto punto di $E_0 \cdot E_1 \dots E_n$ è punto frontiera per E_1, \dots , per E_n ; mentre è esterno ad $S_1 + \dots + S_n$, data la $(S_1 + \dots + S_n) \cdot E_0 = 0$. D'altra parte è anche $E_i \cdot s_i = 0$, per $i = 1, \dots, n$; epperò H è esterno anche ad $s_1 + \dots + s_n$.

Ed il lemma è completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE I. — Se si tien conto dell'estensione che KNASTER, KURATOWSKI e MAZURKIEWICZ hanno dato per il teorema di SPERNER, non dovrebbe essere difficile sostituire nel lemma precedente le ipotesi fatte su E_i, S_i ed s_i con delle condizioni meno restrittive. Il che dovrebbe permettere di dimostrare il teorema A), senza supporre dapprima le [1] soddisfatte nel senso forte, come invece faremo nel numero successivo.

OSSERVAZIONE II. — Il lemma dimostrato dice, in sostanza, che, dati in C n continui K_1, \dots, K_n in tal guisa che K_i separi (in C) le

(23) Cfr. *loc. cit.* (10), pag. 602.

due faccie opposte S_i ed s_i , esiste un punto di C comune a tutti i continui K_1, \dots, K_n .

2. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. - Come si è già detto, e come è evidente, basta dimostrare il teorema A) nell'ipotesi ulteriore che le [1] siano soddisfatte nel senso forte⁽²⁴⁾.

Sotto questa condizione suppletiva, sia $E_i (i=1, \dots, n)$ l'involucro chiuso dell'insieme dei punti di C che possono essere congiunti col punto unità dell'asse x_i mediante una curva di JORDAN sulla quale f_i si mantenga sempre positiva.

Dalle [1], soddisfatte nel senso forte, e dalla continuità delle f_i segue subito che gl'insiemi E_i soddisfanno alle ipotesi del lemma dimostrato nel numero precedente.

Indi esiste un punto H interno a C e comune a tutte le frontiere di E_1, \dots, E_n .

Ma nei punti della frontiera di E_i , interni a C , la f_i è manifestamente identica a zero. Quindi il sistema [2] è soddisfatto in H .

OSSERVAZIONE I. - Naturalmente, il lemma dimostrato nel n. 1 si presta anche a dare una dimostrazione immediata del teorema di BROUWER, anche se formulato come alla pag. 480 della *Topologie* di ALEXANDROFF e HOPF citata. Ma la dimostrazione così ottenuta non differisce concettualmente da quella di KNASTER, KURATOWSKI e MAZURKIEWICZ e ancor meno da quella data da MIRANDA a partire dal teorema A).

OSSERVAZIONE II. - Dal teorema A) si può dedurre il lemma dimostrato nel n. 1. Infatti si riprendano le ipotesi e le convenzioni di quell'enunciato e si ponga $E'_i = C - E_i$ e si dica e_i l'intersezione delle frontiere di E_i ed E'_i . I tre insiemi S_i , s_i ed e_i sono chiusi e privi a due a due di punti comuni (per ogni valore di i prescelto fra i numeri $1, 2, \dots, n$). Epperò, se $P \equiv (x_1, \dots, x_n)$ è il punto corrente di C e se $\rho(P, S_i)$, $\rho(P, s_i)$ e $\rho(P, e_i)$ sono le distanze di P da S_i , s_i ed e_i rispet-

(24) Cfr. MIRANDA, *loc. cit.* (3).

tivamente, le somme $\rho(P, S_i) + \rho(P, e_i)$, $\rho(P, s_i) + \rho(P, e_i)$ non sono mai nulle in C . Si ponga ora

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{\rho(P, e_i)}{\rho(P, e_i) + \rho(P, S_i)}, \text{ se } P \text{ è in } E_i,$$

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{-\rho(P, e_i)}{\rho(P, e_i) + \rho(P, s_i)}, \text{ se } P \text{ è in } E'_i.$$

La funzione $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ è allora continua in C ⁽²⁶⁾; vale zero in e_i ed in e_i soltanto; vale 1 in S_i e -1 in s_i . Pel teorema A) esiste quindi un punto (interno a C) in cui le $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ sono simultaneamente nulle. Questo punto appartiene perciò all'intersezione di e_1, \dots, e_n , cioè alla frontiera di E_1, \dots , alla frontiera di E_n . Donde il lemma.

Le considerazioni del n. 1 si prestano ad essere invertite. Quindi sono equivalenti anche il teorema A) e quello di SPERNER.

⁽²⁶⁾ Cfr., p. es., ALEXANDROFF e HOPF, *loc. cit.*, ⁽¹⁰⁾, cap. I, § 6, n. 11.



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. X - N. 13
pag. 135-142

SULLE SUPERFICIE ILLUMINATE UNIFORMEMENTE DA UN'ONDA CILINDRICA (*)

GIULIANO TORALDO DI FRANCIA

SUMMARIVM. — Auctor aequationem differentialem partialem cuiusvis superficiei, quae ab unda luminifera cylindrica aequalem ubique luminis quantitatem accipit, integrat.

1. — Risale alla fine del secolo decimottavo il problema delle superficie egualmente illuminate da una sorgente puntiforme, ovvero da un'onda luminosa sferica.

La questione è ormai completamente risolta sia per via geometrica (1), sia per via analitica (2). La presente nota ha per scopo la trattazione del problema analogo per un'onda cilindrica.

Nel caso dell'onda sferica i raggi luminosi formano una stella col centro sulla sorgente e l'illuminamento in un punto della superficie è proporzionale al coseno dell'angolo formato dal raggio con la normale alla superficie e inversamente proporzionale al quadrato della distanza del punto dalla sorgente. Poichè questo illuminamento è costante, ne viene che l'area di una porzione qualsiasi della superficie è proporzionale all'angolo solido sotto cui essa è vista dalla sorgente.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi il 14 aprile 1946.

(1) L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, Pisa, 1903, II, pag. 269.

(2) G. SANSONE, *Sulle superficie ugualmente illuminate da una sorgente luminosa*, «Act. Pont. Ac. Scient.», IX, pag. 127. Si vedano in questa nota gli interessanti ragguagli storici.

Invece nel caso dell'onda cilindrica i raggi sono rappresentati da tutte le normali all'asse dell'onda e l'illuminamento è proporzionale al coseno dell'angolo formato dal raggio con la normale alla superficie e inversamente proporzionale alla prima potenza della distanza dall'asse. Le superficie d'illuminamento costante sono pertanto caratterizzate dalla proprietà che l'area di una *zona* (cioè di una regione compresa fra due piani perpendicolari all'asse dell'onda) è proporzionale all'altezza della zona; e in una stessa zona l'area compresa fra due piani uscenti dall'asse è proporzionale al diedro da essi formato. Questa proprietà è posseduta manifestamente dai cilindri circolari coassiali con l'onda e dalle sfere aventi il centro sull'asse.

Il problema non sembra solubile con le eleganti considerazioni geometriche che valgono nel caso dell'onda sferica. Lo affronteremo quindi per via analitica, seguendo il metodo tracciato da G. SANSONE⁽¹⁾.

2. - Riferiamoci da prima ad un sistema di assi cartesiani ortogonali dei quali z coincida con l'asse dell'onda cilindrica.

Sia $z = z(x, y)$ l'equazione della superficie. La distanza del punto $(0, 0, z)$ dell'asse dal piano tangente alla superficie in (x, y, z) è:

$$\frac{\left| x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}}$$

Pertanto l'illuminamento sarà proporzionale a

$$\frac{\left| x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right|}{(x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}}$$

Dato poi che, trovata una superficie soddisfacente al problema, se ne ottengono infinite altre per mezzo di omotetie rispetto all'ori-

⁽¹⁾ G. SANSONE, *loc. cit.*

gine, potremo porre semplicemente la condizione

$$\frac{\left| x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right|}{(x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}} = 1$$

Questa è l'equazione differenziale delle nostre superficie.

Passando alle coordinate cilindriche con la trasformazione

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

l'equazione per $z = z(\rho, \varphi)$ diviene

$$[1] \quad (1 - \rho^2) \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 = \rho^2$$

Si tratta dunque di un'equazione del primo ordine non lineare.

3. - Dalla [1] risulta evidentemente che ρ (essenzialmente positiva) deve mantenersi sempre ≤ 1 . Pertanto il primo termine sarà sempre positivo ed esisterà un $\lambda = \lambda(\rho, \varphi)$ tale che

$$[2] \quad \frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \cosh \lambda, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \rho \sinh \lambda$$

La condizione d'integrabilità di questo sistema ci dà l'equazione differenziale per λ

$$[4] \quad \frac{\rho \sinh \lambda}{\sqrt{1 - \rho^2}} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} - \rho \cosh \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} = \sinh \lambda$$

Il sistema differenziale ordinario associato con questa equazione lineare è

$$[5] \quad \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\rho \sinh \lambda} d\varphi = - \frac{1}{\rho \cosh \lambda} d\rho = \frac{1}{\sinh \lambda} d\lambda$$

La eguaglianza fra il secondo e terzo membro fornisce

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{d\lambda}{\tanh \lambda}, \quad \text{ovvero} \quad d(\log \rho \sinh \lambda) = 0$$

da cui

$$[6] \quad \rho \sinh \lambda = c_1$$

con c_1 costante arbitraria.

Considerando poi l'eguaglianza fra il primo e il secondo membro della [5] e tenendo conto della [6], si ha

$$\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{c_1} d\varphi = - \frac{1}{\sqrt{c_1^2 + \rho^2}} d\rho$$

per cui

$$\varphi + c_1 \int_1^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2} \sqrt{c_1^2 + \rho^2}} = c_2$$

essendo c_2 una costante arbitraria.

Con la trasformazione $\rho = \cos \theta$ si ha

$$\varphi - \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} \int_0^{\arccos \rho} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{1+c_1^2} \sin^2 \theta}} = c_2$$

Chiamando allora $F(\theta, k)$ l'integrale ellittico di prima specie

$$F(\theta, k) = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (k \leq 1)$$

si può scrivere

$$\varphi - \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} F\left(\arccos \rho, \frac{1}{\sqrt{1+c_1^2}}\right) = c_2$$

e, ricordando la [6]

$$[7] \quad \varphi - \frac{\rho \sinh \lambda}{\sqrt{1+\rho^2 \sinh^2 \lambda}} F\left(\arccos \rho, \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2 \sinh^2 \lambda}}\right) = c_2$$

Allora l'integrale generale dell'equazione [4] ha la forma

$$[8] \quad f(c_1, c_2) = 0$$

essendo f una funzione arbitraria dei suoi argomenti e rappresentando c_1 e c_2 non più delle costanti, ma i primi membri della [6] e della [7] rispettivamente.

Infine, una volta fissata la f e ricavata λ dalla [8] in funzione di ρ e φ , le [2] forniscono per z

$$[9] \quad z = \rho \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sinh \lambda(\rho, \varphi) + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \cosh \lambda(\rho, \varphi_0) d\rho$$

con φ_0 e ρ_0 costanti arbitrarie.

È questa l'equazione di una superficie avente la proprietà richiesta.

4. - Vediamo come si determina la f quando si prescrive che la superficie passi per la curva $z = \Phi(\varphi)$, tracciata sul cilindro $\rho = \rho_1$ con ρ_1 costante. Convienne allora scegliere la costante d'integrazione ρ_0 eguale a ρ_1 . Così ponendo $\rho = \rho_1$ nella [9], si ottiene

$$\rho_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sinh \lambda(\rho_1, \varphi) d\varphi = \Phi(\varphi)$$

e derivando rispetto a φ

$$[10] \quad \rho_1 \sinh \lambda(\rho_1, \varphi) = \Phi'(\varphi)$$

Si ricava in questo modo la funzione di φ $\lambda(\rho_1, \varphi)$. Sostituendola nella [6] e nella [7] e ponendo in esse $\rho = \rho_1$, si ottiene per ogni valore di φ un valore di c_1 e un valore di c_2 . Ciò equivale a conoscere c_1 in funzione di c_2 , cioè a conoscere la funzione f della [8]. Il problema è così risolto. In particolare le cose sono molto semplici se $\rho_1 = 1$, perchè in tal caso la [7] dà $c_2 = \varphi$ e dalla [6] e dalla [10] si ricava $c_1 = \Phi'(\varphi)$. Risulta allora $c_1 = \Phi'(c_2)$ e questa rappresenta la relazione [8].

Con un analogo ragionamento si potrebbe trovare la f quando si assegni il passaggio della superficie per una data curva del piano $\varphi = \varphi_1$.

5. - Interessante è il caso particolare in cui la f non dipende da c_2 ed è quindi $c_1 = \text{costante}$. Ora dalla [6] si ha

$$\cosh \lambda = \sqrt{1 + \frac{c_1^2}{\rho^2}}$$

Sostituendo questa e la [6] nella [9] e prendendo, senza perdere in generalità, $\varphi_0 = 0$, $\rho_0 = 1$ si ottiene

$$z = c_1 \varphi + \int_1^\rho \frac{\sqrt{c_1^2 + \rho^2}}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho$$

che, ponendo $\rho = \cos \theta$ può scriversi

$$[11] \quad z = c_1 \varphi - \sqrt{1 + c_1^2} \int_0^{\arccos \rho} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + c_1^2} \sin^2 \theta} d\theta$$

Allora, se chiamiamo $E(0, k)$ l'integrale ellittico di seconda specie

$$E(0, k) = \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (k \leq 1)$$

si ha in definitiva

$$z = c_1 \varphi - \sqrt{1 + c_1^2} E\left(\arccos \rho, \frac{1}{\sqrt{1 + c_1^2}}\right)$$

È questa l'equazione della superficie in termini finiti. Ponendo $\rho = \text{costante}$ ci si convince subito che la superficie è generata da infinite eliche cilindriche col passo costante $2\pi c_1$. Ponendo invece $z = \text{costante}$, si vede che le sezioni della superficie con i piani perpendicolari all'asse sono tutte eguali e ruotate l'una rispetto all'altra attorno all'asse. Si tratta di una superficie *elicoide* ⁽¹⁾.

(1) L. BIANCHI, *op. cit.*, I, pag. 295.

Per $c_1 = 0$ poi la [11] fornisce

$$z = \pm \sqrt{1 - \rho^2}$$

cioè l'equazione di una sfera col centro sull'asse. Sapevamo di dover trovare anche questa superficie.

6. - Avendo posto inizialmente $z = z(\rho, \varphi)$, abbiamo escluso dalla ricerca le eventuali superficie cilindriche con le generatrici parallele all'asse z . Bisogna quindi esaminare a parte questo caso, ponendo che la sezione normale del cilindro abbia l'equazione $\rho = \rho(\varphi)$.

Si sa che l'angolo formato dal raggio vettore con la normale alla superficie ha per tangente ρ'/ρ ; pertanto il suo coseno sarà

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}}}$$

Dividendo per ρ si ottiene una quantità proporzionale all'illuminamento, che porremo eguale a 1. Abbiamo così

$$\frac{1}{\rho \sqrt{1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}}} = 1$$

Questa equazione differenziale ammette in primo luogo il semplice integrale $\rho = 1$, cioè un cilindro circolare coassiale con l'onda luminosa. Si tratta di un integrale singolare. Inoltre si ha l'integrale:

$$\rho = \sin(\varphi + c)$$

con c costante arbitraria, che rappresenta dei cilindri circolari, aventi una generatrice coincidente con l'asse dell'onda ⁽¹⁾.

Nel terminare è mio gradito dovere ringraziare il Chiar.mo Prof. G. Sansone per l'interessamento a questo lavoro e per gli utili consigli.

⁽¹⁾ È curiosa la proprietà di queste ultime superficie che, qualora si pensino riflettenti specularmente, vengono illuminate uniformemente anche dai raggi che hanno subito 1, 2, ..., n riflessioni. La cosa può dimostrarsi facilmente con considerazioni geometriche.



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. X - N. 14
pag. 143-154

SULLE ONDE DI RAYLEIGH IN UN MEZZO ELASTICO, FIRMO-VISCOSO INDEFINITO (*)

(Con due figure)

PIETRO CALOI

SUMMARIVM. — Cum Auctor investigaverit quid efficiat firmo-viscositas in undarum Rayleigh propagationem per aliquam solidam substantiam, demonstrat, inter alia, interiorum attritum vim suam exserere in verticalem motus componentem, quam valde reducit, praesertim si periodus adeo parva sit ut relatio inter verticalem et horizontalem componentes ad unitatis ordinem pertineat. Haec conclusio magis cum observatis congruit, quam doctrina Rayleigh-Lamb, quae respicit ad propagationem per substantiam omnino elasticam. Animadvertendum est undas Rayleigh in substantia omnino elastica constanti velocitate propagari; in substantiis autem firmo-elasticis mutata periodo velocitas quoque mutatur, ita ut, ex velocitate quae nulla esset si periodus nulla esse posset, mox tendat ad eam velocitatem quae propria est substantiarum elasticarum, si periodus augeatur (quoque magis elasticitas vincit firmitatem eo magis velocitas crescit).

Com'è noto, una delle maggiori difficoltà che si oppongono alla identificazione delle onde superficiali costituenti la così detta fase principale di un sismogramma (generalmente indicata con M) con le onde superficiali studiate da RAYLEIGH, è costituita dalla sensibile disparità fra i valori osservati per il rapporto della componente verticale a quella orizzontale e quelli calcolati con la teoria di RAYLEIGH. Quest'ultima [1] prevede un valore costante per detto rapporto, mentre l'osservazione fornisce valori variabili entro larghi limiti. I valori osservati generalmente risultano inoltre, e in modo sensibile, inferiori a quello richiesto dalla teoria, che è dell'ordine di 1,47 (fatto uguale a 0,25 il coefficiente di Poisson).

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Vercelli il 15 giugno 1946.

Le modificazioni ed estensioni portate alla teoria di RAYLEIGH non hanno risolto che in parte la questione, anche se hanno chiarito altri aspetti, in apparenza contrastanti, fra teoria ed osservazione. La variabilità dei valori del rapporto Z/H fra spostamenti in senso verticale e in senso orizzontale, è stata così giustificata anche in teoria, se si considera il fenomeno in un mezzo stratificato, anziché in uno indefinito [2].

Le ricerche finora compiute sull'argomento si sono limitate a considerare un mezzo puramente elastico. È noto però che la materia costituente la Terra non è esclusivamente elastica: essa presenta, in proporzioni più o meno notevoli, altre caratteristiche, particolarmente sensibile quella derivante dall'azione dell'attrito interno, nota sotto il nome di *firno-viscosità* [3].

Mi propongo qui di vedere a quali conclusioni conduce l'introduzione nella classica teoria di RAYLEIGH — propagazione alla superficie di un solido elastico indefinito, limitato da una superficie piana — dei termini richiesti dall'azione della *firno-viscosità*.

1. — Consideriamo il caso di un solido *firno-viscoso* semi-infinito, limitato dal piano $z=0$ e giacente dal lato positivo di questo piano.

Il fenomeno interessa il solo piano verticale xz . Siano u, w le componenti dello spostamento in detto piano. Sarà, al solito,

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad , \quad 2\eta = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad ,$$

ϑ ed η esprimendo rispettivamente la dilatazione e l'angolo di distorsione nel piano di propagazione. Siano λ, μ le costanti di LAMÉ ed indichiamo con λ', μ' i coefficienti dell'attrito interno di volume ed equivoluminale. Le componenti delle tensioni normale e tangenziale assumono le espressioni:

$$\begin{aligned} N_1 &= \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda' \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + 2\mu' \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \quad , \\ [1] \quad N_3 &= \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda' \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + 2\mu' \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \quad , \\ T_2 &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad , \end{aligned}$$

Le equazioni del moto in un mezzo isotropo elastico firmo-viscoso, di densità ρ , divengono allora (limitatamente al piano xz)

$$[2] \quad \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left\{ (\lambda + 2\mu) + (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial \eta}{\partial x} - 2 \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} , \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \left\{ (\lambda + 2\mu) + (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial \xi}{\partial z} - 2 \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} . \end{aligned}$$

Queste equazioni sono soddisfatte da

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} , \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} ,$$

dove Φ è funzione caratteristica per le onde longitudinali e ψ per quelle trasversali. Con questi valori di u , w le [2] conducono alle equazioni

$$[3] \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} + \frac{\lambda' + 2\mu'}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Delta_2 \Phi , \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \left\{ \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Delta_2 \psi , \end{aligned}$$

dove Δ_2 è l'operatore di LAPLACE.

In caso di moto armonico semplice, essendo e^{ipt} il fattore tempo (p , pulsazione), le [3] assumono la forma

$$\begin{aligned} \left(\Delta_2 + \frac{p^2}{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} + ip \frac{\lambda' + 2\mu'}{\rho}} \right) \Phi &= 0 , \\ \left(\Delta_2 + \frac{p^2}{\frac{\mu}{\rho} + ip \frac{\mu'}{\rho}} \right) \psi &= 0 ; \end{aligned}$$

oppure, posto

$$[4] \quad h^2 = \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu + ip(\lambda' + 2\mu')} ; \quad k^2 = \frac{\rho p^2}{\mu + ip\mu'} ,$$

$$[5] \quad \begin{cases} (\Delta_2 + h^2) \Phi = 0 \\ (\Delta_2 + k^2) \psi = 0 . \end{cases}$$

In forza delle [5], le [1] si possono scrivere

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (\mu + ip\mu') \left\{ -k^2 \Phi - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right\} \\
 [6] \quad N_3 &= -(\mu + ip\mu') \left\{ k^2 \Phi + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right\} \\
 T_2 &= (\mu + ip\mu') \left\{ 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - k^2 \Psi' \right\}
 \end{aligned}$$

Date queste premesse, possiamo senz'altro seguire, con le opportune modifiche, la teoria sviluppata da LAMB sulla propagazione di oscillazioni alla superficie di un solido elastico [4]. Poniamo, a meno del solito fattore tempo,

$$\Phi = A e^{-\alpha z} \cdot e^{i\xi x}, \quad \psi = B e^{-\beta z} \cdot e^{i\xi x}$$

dove A, B sono costanti i cui valori vengono determinati mediante le [6], in base alle condizioni stabilite per le tensioni sul contorno. Ad ogni soluzione di particolari problemi, legati a determinati valori assegnati alle tensioni, possiamo sovrapporre un sistema di onde libere superficiali, aventi lunghezza d'onda determinata dall'imposto periodo $2\pi/p$. Sono queste le onde studiate da RAYLEIGH. Seguendo un procedimento analogo a quello stabilito da LAMB, arriviamo alla seguente espressione dell'equazione di RAYLEIGH:

$$[7] \quad 1 - 8 \frac{\xi^2}{k^2} + \left(24 - 16 \frac{h^2}{k^2} \right) \frac{\xi^4}{k^4} - 16 \left(1 - \frac{h^2}{k^2} \right) \frac{\xi^6}{k^6} = 0.$$

Questa equazione, di terzo grado in ξ^2/k^2 , ammette certamente una radice reale fra 1 e ∞ , essendo (limitatamente alla parte reale) $k^2 > h^2$; Le così dette onde di RAYLEIGH corrispondono a soluzioni reali della [7], comprese fra 1 e ∞ .

Studiando il caso di forze concentrate verticali e orizzontali applicate alla superficie, LAMB perviene a determinare, in forma esplicita, le espressioni spettanti alle corrispondenti onde di RAYLEIGH. A noi interessa qui limitarci alla considerazione del rapporto delle ampiezze

degli spostamenti verticali e orizzontali, relativi a queste onde. Il rapporto in questione è del tipo

$$\frac{K + K'}{H + H'} ,$$

K, K' riguardando gli spostamenti verticali dei due diversi tipi di sollecitazione; H, H' quelli orizzontali. È

$$H = \frac{\left(2 \frac{\xi_1^2}{k^2} - 1\right)^3}{16 \frac{\xi_1^2}{k^2} \left\{1 - \left(6 - 4 \frac{h^2}{k^2}\right) \frac{\xi_1^2}{k^2} + 6 \left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right) \frac{\xi_1^4}{k^4}\right\}} ;$$

$$K = \frac{\sqrt{1 - \frac{h^2}{k^2} \frac{\xi_1^2}{k^2}} \left(2 \frac{\xi_1^2}{k^2} - 1\right)^2}{8 \left\{1 - \left(6 - 4 \frac{h^2}{k^2}\right) \frac{\xi_1^2}{k^2} + 6 \left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right) \frac{\xi_1^4}{k^4}\right\}} ;$$

$$H' = \frac{\sqrt{1 - \frac{k^2}{\xi_1^2}} \left(2 \frac{\xi_1^2}{k^2} - 1\right)^2}{8 \left\{1 - \left(6 - 4 \frac{h^2}{k^2}\right) \frac{\xi_1^2}{k^2} + 6 \left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right) \frac{\xi_1^4}{k^4}\right\}} ; \quad K' = H ,$$

dove $\frac{\xi_1^2}{k^2}$ è la soluzione della [7] corrispondente alle onde di RAYLEIGH.

2. - Prima di passare alle applicazioni, vediamo che espressione assume la velocità delle onde di RAYLEIGH in un mezzo elastico firmo-viscoso. Analogamente alle [4], poniamo

$$\xi_1 = \frac{p}{c} ;$$

c è la velocità di propagazione delle onde di RAYLEIGH. Ricordando l'espressione di k^2 e limitandoci alla parte reale si ottiene

$$[9] \quad c = \frac{k}{\xi_1} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} k^2 \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \frac{\mu^2}{\rho^2} \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^3 \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^6 + \dots \right\} .$$

Quando $\mu' = 0$ si ha per c l'espressione che la velocità assume nella teoria RAYLEIGH-LAMB. Poichè $k^2 \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2$ è sempre minore dell'u-

nità (escluso il caso $T=0$), l'espressione tra parentesi rappresenta una serie totalmente convergente. Pertanto, la velocità, da un valore teoricamente infinito (per $T=0$), tende rapidamente, per periodi crescenti, al valore che le compete in un mezzo puramente elastico; tanto più rapidamente, quanto maggiore è il valore del rapporto μ/μ' .

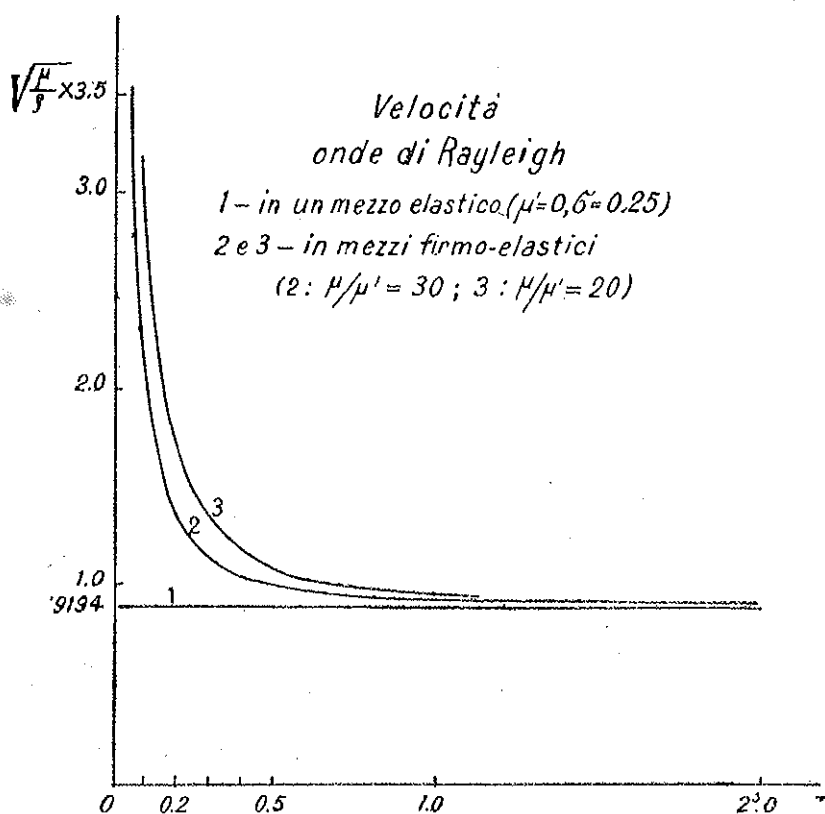


Fig. 1

La fig. 1 - dove si prescinde dall'assorbimento del mezzo - dà l'andamento del fenomeno per i casi $\mu/\mu' = 30$, $\mu/\mu' = 20$. Per l'uso della [9] si osservi che

$$k^2 \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^2 = \frac{p^2}{p^2 + \left(\frac{\mu}{\mu'} \right)^2}$$

Nei calcoli si è fatto il coefficiente σ di Poisson uguale a 0,25. È allora, come è noto, $\lambda = \mu$. Si dimostra inoltre che [5]

$$\lambda' = -\frac{2}{3}\mu'.$$

Consegue per il rapporto k^2/h^2 , limitatamente alla parte reale,

$$[10] \quad \frac{k^2}{h^2} = 3 \left\{ 1 - \frac{5}{9} \frac{p^2}{\frac{9}{4} \left(\frac{\mu}{\mu'} \right)^2 + p^2} \right\}$$

Il valore di k^2/h^2 dipende quindi anche dal periodo, sia pure in misura rapidamente decrescente al crescere di questo.

Furono assegnati al rapporto μ/μ' i seguenti valori: 2, 3, 7, 20, 30.

I valori più elevati sembrano esprimere in modo attendibile il rapporto μ/μ' , relativamente agli strati superficiali della crosta terrestre [6].

L'unita tabella contiene i valori ottenuti per ξ_1^2/k^2 , determinati risolvendo la [7], tenuto conto della [10] - assegnando al rapporto μ/μ' uno dei valori su riportati - e facendo variare opportunamente il periodo $T = 2\pi/p$. Le [8] consentono di ottenere i corrispondenti valori del rapporto $\frac{K + K'}{H + H'}$.

3. - Dall'esame dei risultati (parzialmente diagrammati nella fig. 2), si possono trarre le seguenti conclusioni.

Per p tendente all'infinito ($T \rightarrow 0$), k^2/h^2 tende al valore costante 1,3333. Tendono quindi a valori costanti le grandezze ξ_1^2/k^2 , $\frac{K + K'}{H + H'}$, indipendentemente dal variare del rapporto μ/μ' . Per p tendente a zero ($T \rightarrow \infty$), k^2/h^2 tende a 3, valore che assume nell'equazione classica di RAYLEIGH, propria di un mezzo isotropo indefinito, puramente elastico. Per valori intermedi del periodo, l'azione della firma-viscosità è tanto maggiore quanto più piccolo è il periodo: massima per periodi prossimi allo zero, essa tende ad annullarsi per periodi tendenti ad aumentare oltre ogni limite, giusto il contrario di quanto si verifica per l'azione della viscosità.

La firmo-viscosità determina una sensibile riduzione della componente verticale del moto, riduzione che è tanto maggiore quanto più piccoli sono il rapporto μ/μ' e il periodo proprio dell'onda: per onde originanti con grossi periodi, l'azione della firmo-viscosità sul rapporto

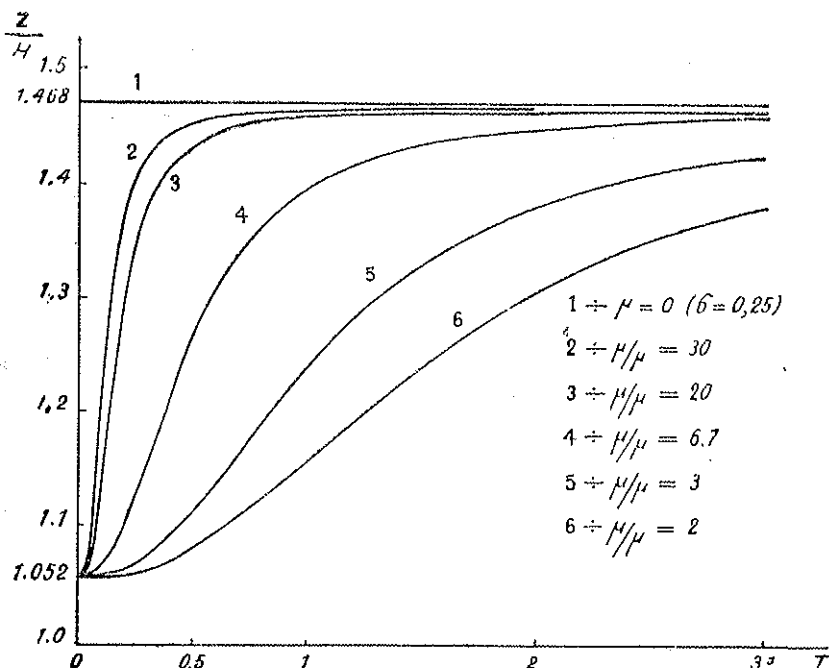


FIG. 2.

Valori del rapporto Z/H in funzione del periodo per $\mu' = 0$ (1), $\mu/\mu' = 30$ (2), $\mu/\mu' = 20$ (3), $\mu/\mu' = 7$ (4), $\mu/\mu' = 3$ (5) o $\mu/\mu' = 2$ (6), fatto $\sigma = 0,25$.

delle ampiezze è pressocchè nulla e il mezzo si comporta come puramente elastico⁽¹⁾.

L'azione della firmo-viscosità può quindi far variare il rapporto delle ampiezze Z/H da un valore prossimo all'unità a 1,47, valore che la teoria RAYLEIGH-LAMB assegna a quel rapporto per $\sigma = 0,25$.

(¹) Per quanto riguarda i periodi, è bene tener presente che essi sono relativi alle onde considerate nella loro origine. È noto infatti che un'altra azione della firmo-viscosità è quella di far aumentare, con la distanza, il periodo dell'onda [7]: aumento che, per una larga gamma di valori del periodo, è sensibile. In generale, quindi, i periodi osservati sono, in misura più o meno apprezzabile, più lunghi di quanto non siano all'origine.

TABELLA

$\frac{\mu}{\rho}$ T	2		3		7		20		30	
	ξ^2/κ^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ^2/κ^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ^2/κ^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ^2/κ^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ^2/κ^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$
0*	2.1072	1.0522	2.1072	1.0522	2.1072	1.0522	2.1072	1.0522	∞	1.0522
0.05	—	—	—	—	—	—	1.8216	1.0808	8.5 $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$	1.1145
0.1	2.09165	1.0583	2.0730	1.0547	1.9560	1.0648	1.4940	1.15705	2.000	1.2420
0.2	2.0478	1.05665	1.9824	1.0622	1.6980	1.1017	1.2767	1.6465 $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$	1.8076	1.3802
0.3	—	—	—	—	1.4973	1.1558	1.2255	1.8901	—	1.4245
0.4	—	—	—	—	1.3779	1.2166	1.2070	1.4144	—	—
0.5	1.8216	1.0808	1.6324	1.1145	1.3090	1.2720	—	—	0.9939	1.4518
0.6	—	—	—	—	1.2769	1.3066	1.1937	1.4426	—	—
0.7	—	—	—	—	1.2519	1.3890	—	—	0.9581	1.4594
0.8	—	—	—	—	1.23605	1.3627	1.1890	1.4534	—	—
1.0	1.4940	1.15705	1.8405	1.2420	1.2171	1.3950	1.1869	1.4585	—	—

Segue: TABELLA

$\frac{w}{h^2}$ T	2		3		7		20			20		
	ξ_1^2/k^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ_1^2/k^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ_1^2/k^2	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ_1^2/k^2	c	$\frac{K+K'}{H+H'}$	ξ_1^2/k^2	c	$\frac{K+K'}{H+H'}$
1.5	1.3480	1.2420	—	—	1.1983	1.4326	—	—	—	—	—	—
2.0	1.2767	1.3068	1.2255	1.3802	1.1916	1.4474	—	—	—	1.1834	0.9243	1.4669
2.5	1.2438	1.3507	—	—	1.1901	1.4509	—	—	—	—	—	—
3.0	1.2255	1.3801	1.2021	1.4245	1.1869	1.4586	—	—	—	—	—	—
4.0	1.2070	1.4144	—	—	1.1852	1.4625	1.1833	0.9221	1.4672	—	—	—
5.0	—	—	1.1897	1.4518	—	—	—	—	—	—	—	—
6.0	1.1937	1.4426	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7.0	—	—	1.1865	1.4594	—	—	—	—	—	—	—	—
8.0	1.1890	1.4534	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10.0	1.18685	1.4585	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
∞	1.1880	1.4679	1.1880	1.4679	1.1880	1.4679	1.1830	$0.9194 \sqrt{\frac{2}{e}}$	1.4679	1.1880	$0.9194 \sqrt{\frac{2}{e}}$	1.4679

Come si è detto l'osservazione mostra tutta una serie di valori per quel rapporto. GALITZIN, in una ventina di osservazioni, ottenne 0,90: MAINKA [8], come media di 80 valori, 0,91 e, in una serie di 413 osservazioni microsismiche, 0,83 ⁽¹⁾. Lo stesso MAINKA, esaminando 280 sismogrammi, ottenne 534 valori singoli, così classificati: il 31% compresi fra 0,91 e 1,00; e il 28% fra 1,21 e 1,50; altri valori furono compresi fra un minimo di 0,5 e un massimo di 2,0. Successive osservazioni confermarono la grande varietà dei risultati, con prevalenza fra 0,9 e 1,2.

L'azione della firno-viscosità in un mezzo elastico indefinito è quindi sufficiente a render ragione del variare del rapporto Z/H , conformemente ai dati dell'osservazione; non basta però a spiegare i valori di detto rapporto sensibilmente inferiori all'unità, forniti dall'osservazione.

In un prossimo lavoro mi propongo di vedere se il problema trova completa soluzione considerando la propagazione in un mezzo elastico, firno-viscoso stratificato.

⁽¹⁾ Relativamente ai microsismi, una precedente ricerca [9] avrebbe provato il pieno accordo fra teoria di RAYLEIGH e osservazione. Tale risultato è però reso illusorio da un'erronea impostazione dei calcoli.

BIBLIOGRAFIA

- [1] RAYLEIGH LORD, *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid.*
«Scientific Papers», II, pag. 441-447.
- [2] SUZUKI T., *Amplitude of Rayleigh waves on the surface of a stratified medium.*
«Bulletin of the Earthquake Research Institute», Tokyo Imperial University, vol. XI, 1933.
- [3] SEZAWA K., *On the decay of waves in visco-elastic solid bodies.* «Bull. Earth. Res. Inst.», Tokyo, vol. III, 1927.
- [4] LAMB H., *On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid.*
«Philosophical Transactions» vol. CCIII-A.-1904.
- [5] GUTENBERG B., *Die Viskosität und die innere Reibung im Erdinnern.* «Handbuch der Geophysik», Band II, Lief. 1^o.
- [6] — *Internal Constitution of the Earth.* «Mc Graw-Hill Book Company», 1939.
CALOI P., *Sull'attrito interno nella crosta terrestre.* «La ricerca scientifica», Anno XIV, n. 1, 1943.
- [7] — *Sopra alcuni nuovi sistemi di onde sismiche, oscillanti nel piano principale.* «Rendiconti Accademia d'Italia», Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, serie VII, vol. II, 1940.
- [8] MAINKA K., *Physik der Erdbebenwellen.* «Borntraeger», Berlin, 1923, pag. 44-45.
- [9] ANDREOTTI G., *Azione dinamica del moto ondoso dell'Adriatico sulla costa.*
«Atti Istituto Veneto», Tomo XCI - Parte seconda, 1932.

AVANZI MORENICI PREWÜRMIANI
ALLO SBOCCO DELLA VALLE DEL BRENTA
PRESSO BASSANO (*)

(Con una figura)

GIORGIO DAL PIAZ
Accademico Pontificio

SVMMARIVM. — Auctor ostendit reliquias morenicas prewürmianas ad os vallis Medoaci Maioris fluminis Bassanum prope extare.

Il prof. TREVISAN ⁽¹⁾ in un recente ed interessante studio sul Glacialismo dei Sette Comuni passa in rapida rassegna anche la letteratura concernente l'espansione glaciale della Valle del Brenta vera e propria. Come egli osserva, oggidì geologi e geografi sono ormai d'accordo nel ritenere che durante il periodo Würmiano (periodo degli anfiteatri morenici dei vecchi autori) il ghiacciaio del Brenta non sia mai arrivato alla pianura bassanese. Infatti, se noi prescindiamo dal conglomerato di Bresagge presso Solagna che il Sacco ⁽²⁾ giudica un avanzo di apparato morenico frontale, ma che a nostro avviso ha piuttosto le caratteristiche di un deposito fluvio-glaciale, e sulla cui natura ed età persistono però ancora pareri discordi, in nessun punto

(*) Nota presentata il 6 agosto 1946.

(1) TREVISAN L., *Il glacialismo quaternario nell'Altipiano dei Sette Comuni* (Vicenza). « Bollettino del Comitato Glaciologico Italiano », n. 19, Torino, 1939.

(2) SACCO F., *Anfiteatri morenici del Veneto*. « Annali della R. Accademia di Agricoltura », vol. XLI, Torino, 1898.

della Bassa Valle del Brenta vennero fino ad ora segnalati avanzi di morene, rivestimenti morenici e tanto meno apparati frontali che possano essere interpretati come sicure ed indiscutibili testimonianze di formazioni glaciali würmiane. La vecchia ipotesi di un'espansione glaciale del periodo degli anfiteatri raggiungente la pianura quale è rappresentata graficamente nella Carta geologica degli antichi ghiacciai dell'Alta Italia dello STOPPANI⁽¹⁾, venne ben presto abbandonata, per ammettere invece che il ghiacciaio del Brenta, durante questa fase, arrestasse la sua fronte entro l'angusta valle in posizione non molto discosta da Solagna⁽²⁾.

Le varie rappresentazioni grafiche date infatti dal TARAMELLI, dal PENCK, da KLEBELSBERG, da SACCO ed infine da TREVISAN, ne indicano tutte la fronte in posizioni poco diverse fra loro, ma tutte contenute entro la Valle del Brenta.

Come è ormai comunemente ammesso, contrariamente alle opinioni del FRATTINI⁽³⁾, del DE STEFANI⁽⁴⁾, dello SCHWINNER⁽⁵⁾ ed altri, il ghiacciaio del Brenta, durante il periodo würmiano, attraverso le depressioni di Arsie e di Fonzaso, mandava invece un cospicuo ramo verso oriente, il quale fondendosi con quello del Cismon, si univa poi con la massa principale del ghiacciaio del Piave contribuendo alla formazione dell'anfiteatro morenico di Quero⁽⁶⁾,⁽⁷⁾.

Maggiori incertezze, dipendenti dalla scarsità delle documentazioni fino ad ora raccolte, esistono invece per la storia di questo ghiacciaio durante i periodi che precedono quello würmiano.

(1) STOPPANI A., *L'Era Neozoica*. F. Vallardi, Milano, 1880. *Carta geologica degli antichi ghiacciai dell'Alta Italia nel periodo degli anfiteatri morenici*.

(2) PENCK A. e BRÜCKNER E., *Die Alpen im Eiszeitalter*. Leipzig, 1909, tavola a pag. 960.

(3) FRATTINI F., *Sugli antichi ghiacciai del Feltrino*. « Annuario della Società degli alpinisti Tridentini », vol. X, Rovereto, 1884.

(4) DE STEFANI C., *Il ghiacciaio del Brenta e gli altri ghiacciai dei Sette Comuni*. « Bollettino del C. A. I. », vol. XLI, Torino, 1913.

(5) SCHWINNER R., *Die oberflächengestaltung des östlichen Suganer Gebietes*. « Ostalpine Formenstudien ». Abt. 3, H. 2, Berlin, 1923.

(6) ROSSI A., *Sulla Chiusa di Quero e l'Epoca glaciale del Piave e del Brenta*. « Bollettino della Società Veneto-Trentina di Scienze Naturali », Padova, 1881.

(7) DAL PIAZ G., *Note sull'Epoca glaciale nel Bellunese*. « Atti della Società Veneto-Trentina di Scienze Naturali », serie II, vol. II, Padova, 1895.

Per l'attiguo altipiano dei Sette Comuni dobbiamo ricordare però che il NEGRI⁽¹⁾ aveva già segnalata la presenza di materiali morenici appartenenti ad età fra loro diverse, quando del tutto recentemente il TREVISAN⁽²⁾ ebbe la ventura di scoprire numerosi avanzi di morene di tipo prewürmiano seguite talvolta da alluvioni cementate fluvio-glaciali riferibili alla stessa fase.

Per la Valle del Brenta, e le aree che vi fanno seguito, le nostre cognizioni si limitano soltanto a vaghi e sporadici accenni del ROSSI⁽³⁾ riguardanti i colli fra S. Zenone e Romano, del SECCO⁽⁴⁾ e del TARAMELLI, pure per Romano, il piede meridionale del collo del Grado e le falde delle altre piccole colline mioceniche che lo precedono verso oriente, sulla destra del Brenta, presso lo sbocco della valle in pianura.

Ma mentre il Rossi è incline a riferire i materiali da lui segnalati fra Romano e S. Zenone al periodo della massima espansione glaciale, anteriore al periodo degli anfiteatri morenici, ed accetta le opinioni del TARAMELLI⁽⁵⁾ che l'immane colata di ghiaccio del Brenta anastomizzandosi al piano con quella scendente dalla valle del Piave arrivasse fino al mare, il Secco non fa alcuna distinzione nè cronologica nè di costituzione dei vari depositi segnalati, ed associa i vari materiali dell'alta e media valle del Brenta, sicuramente würmiani, con quelli indicati allo sbocco della valle presso Bassano, in un unico complesso morenico di età non precisata.

In una successiva pubblicazione comparsa nel 1883 il Secco⁽⁶⁾, nel capitolo in cui tratta degli avanzi morenici della Valle del Brenta, ricorda nuovamente i materiali di Enego, di Incino, dei Martinotti, ecc., ma non fa più alcun cenno a quelli citati tre anni prima per la destra della valle presso lo sbocco del Brenta nella pianura, tralasciando inoltre qualsiasi indicazione grafica (usata invece nello schizzo geolo-

(1) NEGRI A., *L'anfiteatro morenico dell'Astico e l'Epoca glaciale dei Sette Comuni*. «Atti del R. Istituto Veneto di S. L. A.», serie VI, tomo V, Venezia, 1887.

(2) TREVISAN L., *Op. cit.*

(3) ROSSI A., *Op. cit.*, pag. 7.

(4) SECCO A., *Guida geologica alpina di Bassano e dintorni*. Stabilimento Roberti, Bassano, 1880.

(5) TARAMELLI T., *Geologia delle provincie Venete*. «Atti della R. Accademia dei Lincei», serie III, vol. VIII, Roma, 1881.

(6) SECCO A., *Note geologiche sul Bassanese*. Stabilimento S. Pozzato, Bassano, 1883.

gico della pubblicazione precedente) nella cartina geologica che accompagna la nuova e più ampia descrizione del Bassanese. Col passare degli anni, rivedendo le vecchie località, l'autore aveva evidentemente modificato le sue convinzioni sul precedente riferimento a materiale morenico dei vari depositi di Col di Grado e delle altre colline circostanti presso lo sbocco della Valle del Brenta.

Le osservazioni sia pure generiche ed occasionali esposte dal Secco nella sua guida geologico-alpina di Bassano e dintorni, successivamente ripudiate in parte dall'autore stesso, furono a torto confutate o contraddette dal BALESTRA ⁽¹⁾ e poi dallo stesso BRUCKNER nel capitolo in cui parla della parte terminale del ghiacciaio del Brenta a pag. 964 della celebre opera pubblicata col PENCK sulle Alpi durante l'Epoca glaciale. Esse caddero perciò completamente nell'oblio senza che nel lungo lasso di tempo trascorso da quando furono esposte nel 1880, vi fosse alcuno che le riprendesse in esame scaverando l'erroneo da quello che poteva costituire invece un prezioso indizio, un filo conduttore per ulteriori e più fortunate ricerche.

Venne confermata così l'opinione dominante che nessun avanzo non solo di età würmiana, ma neppure prewürmiana esistesse allo sbocco della Valle del Brenta quale residuo e testimonianza di un antico apparato morenico frontale.

Nel 1915 il collega FABIANI in occasione degli scavi eseguiti per le fondazioni del ponte nuovo di Bassano, alla profondità di circa sette metri dalla superficie del terreno, raccolse vari ciottoli di granito, di porfido, di scisti e di arenarie, tutti in uno stato di profonda alterazione. Il materiale venne depositato nel Museo geologico dell'Università di Padova e non fu più possibile esaminare col necessario dettaglio le sue originarie condizioni di giacitura, giacchè lo scavo venne immediatamente chiuso dalle operazioni di riempimento per la costruzione della spalla del ponte. Per quanto l'esame dei vari ciottoli mi avesse fatto nascere il sospetto che si trattasse di materiale appartenente ad un'antica morena di fondo, la segnalazione attendeva sempre qualche altro rinvenimento che permettesse di chiarire meglio la cosa, allorchè nello scorso maggio, il collega BATTAGLIA ebbe ad accennarmi alla pre-

⁽¹⁾ BALESTRA A., *Sullo sviluppo dell'antico ghiacciaio di Brenta*. « Bollettino annuale del Club alpino bassanese », vol. 1, Bassano, 1893-94.

senza, presso la chiesa della S. Trinità di Bassano sulla destra del Brenta, di un terreno giallo-rossastro, nel quale sono contenuti dei ciottoli che si sgretolano con grande facilità.

Recatomi immediatamente sul sito non tardai a rendermi ragione che eravamo davanti ad un effettivo deposito morenico antico (prewürmiano), il quale ammantava gran parte della collinetta che fa immediatamente seguito, sul lato orientale, al ben noto colle del Grado presso Angarano.

Per poter esaminare meglio la struttura del terreno il prof. SACCHI, proprietario della collinetta ricoperta dal deposito morenico, ebbe la cortesia di permettere che sulla sommità si aprisse una trincea abbastanza profonda e poi sul versante orientale qualche altro piccolo e saltuario saggio. Ecco i risultati tratti dagli scavi eseguiti e dall'esame del terreno che si estende tutto all'ingiro della località.

Il materiale morenico della collinetta del prof. SACCHI forma una specie di grosso mantello che incappuccia il sottostante basamento roccioso costituito da grossi strati di un'arenaria sabbiosa, giallastra accompagnati a banchi di puddinga calcarea. Le stratificazioni sono disposte verticalmente ed il loro orientamento è da nord-est a sud-ovest. Trattasi della ben nota formazione che fa passaggio dal Tortoniano al Pontico a *facies* litoranea, nella quale, specialmente nell'attiguo colle del Grado, non è infrequente rinvenire grossi esemplari di *Ostrea crassissima*, *Ostrea gingensis*, ecc.

Il deposito morenico, che ricopre il dorso della collina, si adatta come un mantello alle irregolarità del sottostante terreno in posto estendendosi con maggiore potenza sul lato di sud e di est, mentre lungo la base del lato di nord lascia scoperta la roccia dello zoccolo in posto.

Caratteristica costante di questo deposito morenico prewürmiano e di quanti altri consimili io ebbi occasione di esaminare, è la presenza, sulla superficie del terreno, di numerosissimi ciottoli di quarzite, generalmente piccoli, che tappezzano l'intera area del giacimento, il quale, a prima impressione, si direbbe un giacimento di terra rossa cosparsa di ciottoletti di quarzite. Questi ciottoletti di quarzite, talvolta ammassati dalle acque piovane in brevi allineamenti o piccoli accumuli nelle depressioni del terreno, rappresentano l'ultimo residuo del processo di alterazione che ha trasformato tutti i materiali rocciosi meno

quelli di natura silicea, i quali spiccano sulla superficie del terreno con molta evidenza specialmente dopo il dilavamento della terra rossa superficiale determinato dalle precipitazioni meteoriche.

Particolarmente interessante è riuscito l'esame delle pareti dello scavo, dove i ciottoli di svariate dimensioni di granito, di porfidi, di arenarie, di scisti cristallini e di quarziti si presentano comunque distribuiti, senza traccia di stratificazione, accompagnati da sabbia quarzosa e da terra rosso-giallastra. L'estrazione dalle pareti dello scavo di qualche ciottolo di granito o di porfido nella sua forma originaria non riesce sempre facile, giacchè la più piccola pressione è sufficiente a disgregarlo e a ridurlo in un materiale sabbioso-argilloso. Un poco meno intensamente alterati, per quanto sempre profondamente attaccati, sono certi scisti cristallini, specialmente se di tipo arteritico.

Assai più fresche, ma non totalmente immuni da fenomeni di corrosione, sono in fine, come si è detto, le quarziti, provenienti in gran parte dal disfacimento delle filladi quarzifere. Del tutto mancanti sono invece i ciottoli calcarei e quelli dolomitici completamente spappolati e distrutti per decalcificazione, ciò che può dare un'idea dell'intensità dei processi di alterazione e dell'antichità del fenomeno stesso. Lo stato di alterazione è così intenso e generale che nell'operazione di scavo l'operaio addetto al lavoro esplorativo poteva affondare la vanga nel terreno e sezionare l'intero deposito morenico, compresi i ciottoli di granito, di porfido, ecc. come si trattasse di praticare un taglio attraverso un banco di comune argilla. Solo nei casi in cui la vanga non poteva continuare nel taglio per la resistenza opposta dal terreno voleva dire che essa aveva incontrato qualche grosso ciottolo di quarzite, messo poi in luce da un ulteriore allargamento della trincea.

A breve distanza verso nord dal colle del prof. SACCHI, sempre nei pressi della chiesa della S. Trinità, sorge un'altro colle, che nella tavoletta topografica al 25.000 di Bassano è indicato col nome del Colle del Boschetto, mentre gli abitanti del sito, e lo stesso SECCO nella guida geologico-alpina di Bassano e dintorni, lo distinguono col nome di Colle dei Marangonsei. Comunque, anche questa collina è in buona parte ricoperta di materiali morenici profondamente alterati in terra rossa. Il punto più interessante per l'esame del colle del Boschetto si trova sul lato di nord-est, dove il taglio praticato per una via cam-

pestre mette in piena evidenza la struttura del terreno, il quale risulta costituito da una massa di terra rossa inglobante elementi di quarzite e ciottoli d'altre rocce eruttive e scistose profondamente alterati allo stesso modo di quanto si riscontra nell'attigua collinetta del prof. SACCHI.

I materiali morenici provenienti da tutte queste località trovano a loro volta perfetto riscontro per varietà petrografiche e per intensità di alterazione con quelli che vennero raccolti in occasione dello scavo eseguito per le fondazioni del nuovo ponte di Bassano. In tutti questi casi si constata l'assenza assoluta di calcari, la presenza di ciottoli granitici, porfirici, scistosi ed arenacei tutti intensamente alterati e la persistenza invece di ciottoli di quarzite assai più freschi, per quanto leggermente intaccati lungo le linee di fratturazione.

La scoperta dei depositi morenici antichi della collina del Boschetto, di quella del prof. SACCHI e del colle del Grado permette di interpretare giustamente la natura dei materiali incontrati con lo scavo delle fondazioni del nuovo ponte di Bassano, i quali non rappresentano che un brandello del deposito fluvio-glaciale del settore di fondo di un unico apparato.

Ci conforta in questa interpretazione il fatto che anche nel recente scavo eseguito subito a valle del ponte nuovo, lungo il fianco sinistro dell'alveo del Brenta per il canale del Medoaco, condotto adduttore alla centrale idroelettrica della Società Adriatica, superato un certo spessore di ghiaie sciolte, fresche, s'incontrò un deposito di terra rossa con ciottoli granitici e porfirici così intensamente alterati da disgregarsi al più piccolo urto. Allo stesso modo lungo la scarpata fiancheggiante sul lato orientale la strada che dalla passerella sul Brenta sale lungo il fianco sinistro dell'alveo verso S. Vito, un chilometro circa a monte di Bassano, si può osservare con molta evidenza come al di sotto dei banchi della conoide alluvionale würmiana di Rivoltella-S. Vito, affiori un deposito di terra rossa con ciottoli di graniti, di porfidi e di scisti, che, come di consueto, si presentano profondamente alterati. Tutti questi giacimenti che si susseguono regolarmente lungo l'alveo del Brenta (scarpata della strada fra S. Vito e la passerella; fondazioni del ponte nuovo e scavo del canale del Medoaco), si collegano in perfetta continuità e fanno parte integrante del deposito fluvio-morenico di fondo dell'apparato prewürmiano del Brenta, il quale

fa passaggio e si continua poi sulla destra nei descritti depositi laterali delle colline del Boschetto e delle altre località circostanti.

È naturale che dopo queste constatazioni si presentasse spontanea la domanda: e sul lato di sinistra dello sbocco della valle in pianura, cioè sui colli che si elevano ad oriente dei terrazzi del Brenta esistono documentazioni comprovanti che i depositi morenici prewurmiani di destra e del fondo valle hanno la loro prosecuzione anche su questo lato? Anche qui le nostre cognizioni fino ad ora erano molto vaghe e contraddittorie.

Il Secco, nella sua più volte citata guida geologico-alpina di Bassano e dintorni, parla dell'esistenza di un'anfiteatro morenico a ridosso del versante nord delle colline mioceniche di Romano, costruito dalla vedretta che scendeva a suo parere lungo la prospiciente valle di S. Felicità, profonda incisione torrentizia del versante meridionale del M. Grappa. Le opinioni del Secco, per quanto erroneo nella visione di un anfiteatro morenico e nella sua attribuzione all'opera di un ghiacciaio scendente lungo la valle di S. Felicità, ghiacciaio che non è mai esistito, contenevano però dei germi di verità, che non vennero riconosciuti neppure dal Rossi⁽¹⁾ e poi combattuti nottamente dal BALESTRA⁽²⁾.

Il Rossi a pag. 7 della sua nota sulla Chiusa di Quero e l'Epoca glaciale del Piave e del Brenta accenna tuttavia, come si è detto, alla possibilità che nella fase di massima espansione il ghiacciaio del Brenta potesse svilupparsi ad oriente di Bassano sui colli di Romano e S. Zenone, d'onde, anastomizzandosi con le propaggini del ghiacciaio del Piave, si sarebbe esteso fino al mare, come opinava il TARAMELLI. Le prove citate dal Rossi a sostegno di una tale opinione consistono nella presenza di ciottoli e massi di porfido quarzifero ed arenarie sulle falde e lungo il versante settentrionale dei colli di S. Zenone e di Romano, mentre attribuisce sempre ad alterazioni del sottosuolo le terre rosse più o meno sabbiose presenti in molti punti della regione esaminata. La presenza di ciottoli gneissici e porfirici nelle colline

(1) Rossi A., *Contribuzione alla geologia della provincia di Treviso. Note sull'Epoca glaciale*. «Bollettino della Società Veneto-Trentina di Scienze Naturali», Tomo II, Padova, 1883.

(2) BALESTRA A., *Op. cit.*

di Romano venne ricordata anche dal SACCO⁽¹⁾ nel suo studio sugli anfiteatri morenici del Veneto, ma purtroppo senza alcuna precisazione topografica.

Comunque, nelle gite ch'io ebbi occasione di compiere nel territorio che si stende sulla sinistra del Brenta, lungo il versante settentrionale della Crocetta a sud-est di Romano di sopra, potei constatare la presenza, a ridosso delle arenarie mioceniche costituenti il nucleo del piccolo colle, di un abbondante deposito di terra rossa inglobante frequentissimi ciottolotti di quarzite e assai meno frequenti ciottoli di rocce cristalline, in condizioni di alterazione così profonda, da rendere quanto mai difficile il loro riconoscimento petrografico.

Materiali del tutto simili, rispondenti pei loro caratteri strutturali ai depositi morenici antichi della collina della Crocetta or ora citati, si trovano anche immediatamente a nord-ovest dell'abitato di Romano di sopra. Qualche piccolo scavo, come si è praticato nella collina presso la chiesa della S. Trinità, potrà mettere meglio in evidenza la costituzione interna di questi depositi, che all'aspetto esterno, causa la profonda alterazione subita, presentano, come si è accennato, l'aspetto di un comune sedimento argilloso. Sulla loro origine non vi può essere però dubbio, data anche la piena corrispondenza coi materiali consimili segnalati sul lato di destra dello sbocco della valle in pianura.

Tenendo conto di tutti gli affioramenti cui abbiamo fatto menzione, noi possiamo dire di trovarci davanti a numerose testimonianze dell'antico fenomeno glaciale della regione, testimonianze che sono fra loro corrispondenti e legate di perfetta unità genetica. Esse, a guisa di frammenti di un unico quadro, ci permettono di fornirci un'idea abbastanza precisa della posizione e dell'entità dell'apparato morenico frontale prewürmiano del Brenta, che successive azioni distruttive e di alluvionamento hanno poi profondamente intaccato e quindi sepolto sotto vaste conoidi ghiaiose.

Finora, trattando di questi depositi morenici antichi, abbiamo parlato sempre di formazioni prewürmiane, giacchè maggiori precisazioni presentano inevitabili difficoltà ed incertezze. I criteri differenziali basati sui caratteri morfologici a linee depresse e appiattite dei depositi antichi rispetto quelli più recenti, e le deduzioni che si pos-

(1) SACCO F., *Op. cit.*, pag. 44.

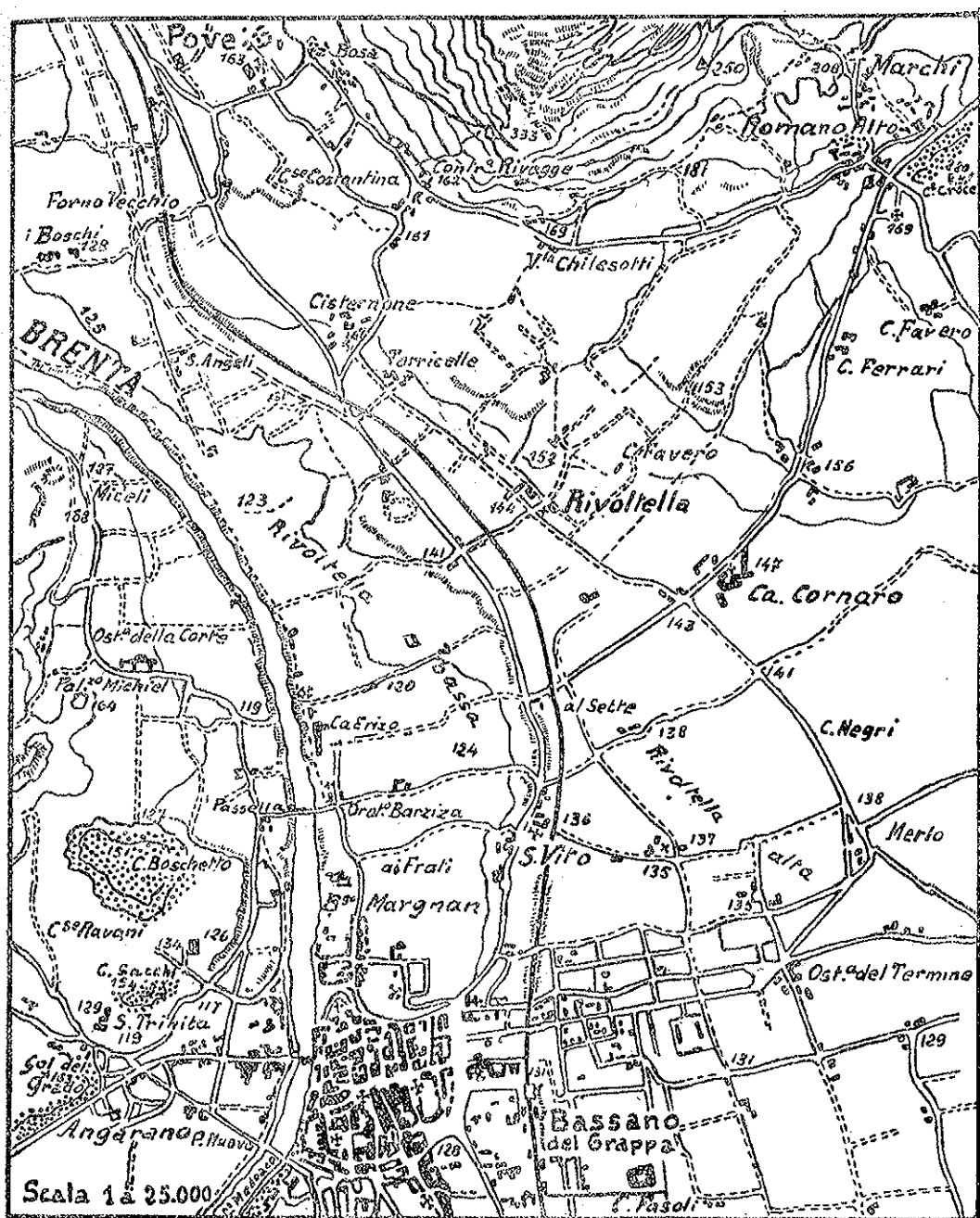
sono ricavare dal grado più o meno avanzato dell'alterazione degli elementi costituenti un determinato deposito morenico, quando non ci si trovi davanti al caso eccezionalmente favorevole di nette sovrapposizioni di materiali o non si abbia a che fare con apparati morenici frontali bene conservati e tali da permettere l'individuazione delle varie fasi di sviluppo glaciale, hanno sempre un valore relativo. Tuttavia, facendo un confronto coi vari tipi di depositi morenici del grandioso apparato del Garda e con quelli da me rinvenuti a Curogna, a Cornuda e sul Montello allo sbocco della valle del Piave in pianura alcuni chilometri a sud dell'anfiteatro morenico di Quero⁽¹⁾, appare evidente che i materiali dell'apparato prewürmiano passati in rassegna nel territorio di Bassano, presentano, per quanto riguarda l'intensità della degradazione subita, le maggiori e più strette affinità con quelli che altrove vennero riferiti al periodo Mindeliano.

Il ghiacciaio scendente lungo la valle del Brenta durante la fase mindeliana avrebbe avuto quindi la sua fronte in corrispondenza a Bassano, nelle immediate vicinanze dello sbocco della valle in pianura, ciò che, per analogia con quanto si riscontra nei rapporti di posizione di altri depositi morenici e specialmente di quelli della vicina valle del Piave, viene ad avvalorare l'opinione espressa da vari studiosi, che durante il periodo würmiano il ghiacciaio del Brenta non uscisse dalla valle, ma si arrestasse alquanto più a monte dell'attuale suo sbocco in pianura.

Istituto di Geologia dell'Università di Padova - Giugno 1946.

(1) DAL PIAZ G., *L'Età del Montello*. « Pontificia Academia Scientiarum, Commentationes », vol. VI, n. 8, Città del Vaticano, 1942.

CARTINA TOPOGRAFICA DI BASSANO E DINTORNI



Materiali morenici prewürmiani.

(Col del Grado, C. Sacchi, C. Boschetto, dalla Passarella a S. Vito, Ponte nuovo di Bassano, Canale del Medoaco, Collo della Croce, Romano Alto).

SULLA DETERMINAZIONE DELLA VERTICALE DURANTE UNA EVOLUZIONE IN VOLO CIECO^(*).

PIETRO TEOFILATO

SVMMARIVM. — Ad determinandam verticalem in coeco volatu, pro gyroscopio, quod instrumentum debile et magni est pretii, adhiberi potest perpendiculum, dummodo tempus observationis adeo sit breve, ut campus virium, quae propter velivoli flexum e centro fugiunt, paene uniformis et magnitudine et directione haberi possit.

1. GENERALITÀ SULL'ESPLORAZIONE PENDOLARE DELLA VERTICALE. — La determinazione della verticale durante la virata in volo cieco si ottiene notoriamente a mezzo del giroscopio. Senonchè la delicatezza di questo dispositivo induce a pensare all'adozione di altri strumenti che, se pure meno precisi, consentano una maggiore semplicità di costruzione e minor costo, qualità non trascurabili quando l'installazione debba eseguirsi a bordo di velivoli ai quali non si richiedano speciali acrobazie.

Ora il pendolo, che è sensibile alla gravità e alle forze centrifughe, può essere efficacemente adoperato come mezzo di esplorazione. Effettivamente, se il periodo d'oscillazione del pendolo è molto breve rispetto al tempo τ occorrente a compiere sia pure un piccolo angolo di virata, le forze centrifughe, le quali sono proporzionali alle distanze dei punti dall'asse, molto lontano, della virata, si possono considerare parallele e proporzionali alla massa, ed allora il pendolo, nell'accennato tempo τ si può pensare come soggetto ad un campo uniforme risultante di due campi uniformi di direzione fissa, quello della gra-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. G. Armellini il 20 luglio 1946.

vità e quello delle forze centrifughe; l'angolo di virata durante le oscillazioni del pendolo viene così a essere considerato come un parametro molto lentamente variabile. A rigore, invece, l'asse del pendolo che oscilla dentro un velivolo il quale compia una virata con velocità angolare ω e raggio R nel piano inclinato di α sull'orizzonte, ha, nell'ipotesi di una velocità costante, un'accelerazione verticale: $R\omega^2 \sin \alpha \cdot \cos \omega(t-t_0)$ ed una orizzontale: $R\omega^2 [1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \omega(t-t_0)]^{1/2}$; e queste accelerazioni influiscono sul moto del pendolo anche durante una sola oscillazione. Esse provengono dalla composizione della gravità e delle forze centrifughe, quali forze di massa, e inoltre dalle forze areodinamiche.

Orbene se ci si ferma alla approssimazione in cui è consentito ammettere il parallelismo delle forze centrifughe, si mostrerà qui appresso che basta servirsi di un contatore delle poche oscillazioni compiute dal pendolo a partire dall'istante in cui esso venga sbloccato (istante che deve essere successivo a quello dell'ingresso in virata) fino al momento in cui per l'attrito il pendolo si ferma, per leggere immediatamente la posizione della verticale.

2. PENDOLI DI MINIMO PERIODO. — Esaminiamo anzitutto la possibilità di ottenere pendoli di piccolo periodo, quali si richiedono per rimanere entro i limiti di approssimazione del parallelismo delle forze. Sospendendo un pendolo per un asse situato alla distanza l dal baricentro, la lunghezza del pendolo semplice equivalente sarà: $L = l + \frac{k_0^2}{l}$ dove k_0 è il raggio d'inerzia baricentrico.

Ora il prodotto dei due termini $l, \frac{k_0^2}{l}$, che formano L , è uguale a k_0^2 e quindi è costante qualunque sia l , pertanto il minimo di L si avrà quando quei due termini saranno eguali, cioè quando:

$$l = k_0^2/l \quad \text{ossia} \quad l = k_0, \quad L = 2k_0.$$

Se il pendolo è costituito da un disco di raggio a , avremo allora: $k_0 = a/\sqrt{2}$, $L = a\sqrt{2}$. In un certo senso questo minimo può anche riguardarsi come un minimum minimorum; si consideri infatti una

piastra omogenea e simmetrica rispetto all'origine; essa abbia come contorno una linea la cui equazione in coordinate polari sia espressa da:

$$a = a(\theta) \quad (0 < \theta < \pi)$$

Il momento d'inerzia baricentrico I rispetto all'origine (baricentro) sarà:

$$I = 2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{a(\theta)} r^3 dr ,$$

e di questo si avrà il minimo per un'area data A :

$$H = 2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{a(\theta)} r dr ,$$

annullando la variazione:

$$\delta(I + \lambda A) = 0 ,$$

cioè ponendo:

$$\int_0^\pi d\theta [a^3(\theta) + \lambda a(\theta)] \delta a = 0 .$$

Di qui risulta:

$$a^3(\theta) + \lambda a(\theta) = 0$$

E quindi $a = \text{costante}$. La piastra omogenea di momento inerziale baricentrico minimo è dunque un disco circolare. Il disco non è che il caso particolare di un cilindro: ed allora, a titolo di esempio, si consideri un pendolo costituito da un corpo cilindrico lungo 50 mm. ed avente un diametro di 4 mm. e da un indice di forma rombica, solidale col cilindro, situato nella sezione normale mediana del medesimo ed avente le diagonali rispettivamente di mm. 4 e 30 e lo spessore di 0,2 mm. Il corpo cilindrico sia munito di due piccoli appendici a coltello che permettono al pendolo di oscillare intorno ad una retta

parallela all'asse del cilindro, che è asse baricentrico del pendolo, e situato da quest'ultimo alla distanza di mm. 3,02. Il periodo di una oscillazione completa di va e vieni sarà:

$$T = \frac{15,4}{100} \text{ secondi}$$

e la frequenza sarà di 6,65 oscillazioni complete al secondo. Ora una virata molto rapida comporta normalmente un giro completo in 90 secondi con una velocità angolare di virata $\omega = \frac{1}{14}$ rad/sec.; perciò un pendolo che faccia 4 oscillazioni complete in un secondo, compirà una oscillazione completa mentre il velivolo avrà ruotato appena di un grado. È lecito dunque, in questo ordine di approssimazione considerare l'angolo di virata come parametro lentamente variabile.

3. RETTE DI MAGGIOR PENDIO. - Si consideri un piano σ , connesso solidalmente col velivolo, e che nell'istante t , rispetto ad un sistema d'assi fissi col suolo, abbia l'equazione:

$$ax + by + cz = 0$$

dove a, b, c siano i coseni direttori della normale n_σ al piano, per modo che:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Si consideri una direzione R di coseni λ, μ, ν . Chiameremo retta r di maggior pendio rispetto ad R , la proiezione di R sul piano σ . Il piano σ_1 di equazione:

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

passante per R e perpendicolare a σ avrà una normale n_{σ_1} i cui coseni direttori saranno:

$$a_1 = \frac{\mu c - \nu b}{\widehat{\text{sen } R n_\sigma}}, \quad b_1 = \frac{a \nu - \lambda c}{\widehat{\text{sen } R n_\sigma}}, \quad c_1 = \frac{\lambda b - a \mu}{\widehat{\text{sen } R n_\sigma}}.$$

I piani σ e σ_1 si incontreranno secondo la retta r di maggior pendio i cui coseni MNP sono proporzionali ai minori della matrice:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Ed allora, secondo che la direzione R coinciderà con quella della gravità oppure con quella delle forze centrifughe, si avrà sopra σ la retta di maggior pendio rispetto alla gravità, oppure rispetto alle forze centrifughe. Beninteso che questa seconda direzione può ritenersi fissa solo per piccole variazioni dell'angolo di virata, ossia fin tanto che il moto del pendolo possa considerarsi governato da due campi uniformi. Denoteremo con R_1 la direzione della gravità e con R quella delle forze centrifughe; con r_1 ed r le rispettive rette di maggior pendio. Se l'asse z è parallelo ad R_1 , avremo $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 1$ e quindi:

$$M_1 = \frac{ac}{\widehat{\text{sen } R_1 n_\sigma}}, \quad N_1 = \frac{bc}{\widehat{\text{sen } R_1 n_\sigma}}, \quad P_1 = -\frac{a^2 + b^2}{\widehat{\text{sen } R_1 n_\sigma}}$$

Inoltre il coseno dell'angolo $\widehat{rr_1}$ sarà:

$$\cos \widehat{rr_1} = MM_1 + NN_1 + PP_1 = [(a^2 + b^2)\nu - \lambda ac - \mu bc] : \sqrt{a^2 + b^2}$$

4. EQUAZIONE DEL MOTO DEL PENDOLO. - Si pensi adesso il piano σ solidale col velivolo ed in esso oscillante un pendolo. Sia φ l'angolo che questo fa con la direzione r_1 , di maggior pendio della gravità e sia $\Phi = \widehat{rr_1}$.

Durante il tempo nel quale σ si può considerare mobile con moto traslatorio uniforme, ossia nel tempo di poche (e molto frequenti) oscillazioni, l'equazione del moto sarà:

$$[1] \quad I\ddot{\varphi} = -Mgl \widehat{\text{sen } R_1 n_\sigma} \cdot \text{sen } \varphi + MR\omega^2 l \widehat{\text{sen } R n_\sigma} \cdot \text{sen } (\varphi + \Phi),$$

con ovvio significato dei simboli, e dove si sono trascurate le forze destinate dall'accelerazione complementare a_c per ragioni che apprezzeremo tra poco e, per il momento, si sono trascurati anche gli attriti.

Suppongasi la distanza ρ di un punto del pendolo dal suo asse di sospensione minore di 20 mm., e la velocità angolare $\dot{\phi}$ del pendolo minore di $\frac{1}{8} : \frac{1}{16} = 2$ rad/sec. (quale risulterebbe se il pendolo facesse lo sbalzo di $\frac{1}{8}$ rad in $\frac{1}{4}$ di periodo, essendo, il periodo $= \frac{1}{4}$ sec). Ne risulta una velocità relativa massima $v_r = \rho \dot{\phi} < \frac{20}{100} \cdot 2$, e quindi un'accelerazione complementare massima:

$$a_c < v_r \omega = \frac{20}{1000} \cdot 2 \cdot \frac{1}{14} = 29 \cdot 10^{-4},$$

donde un rapporto:

$$\frac{a_c}{g} < 29 \cdot 10^{-5}.$$

Tanto basta per essere autorizzati a trascurare, come si è fatto nella [1], l'effetto delle forze d'inerzia derivanti da a_c .

5. PENDOLI OCCORRENTI IN UNA VIRATA OBLIQUA. - Vedremo nei paragrafi seguenti come sia possibile determinare l'angolo $\bar{\phi}$ che fissa la posizione d'equilibrio relativo del pendolo nel piano σ solidale col velivolo in riferimento alla retta r_1 , di maggior pendio. Annullando nella [1] l'accelerazione $\ddot{\phi}$, si ha:

$$[2] \quad \tan \bar{\phi} = \frac{R\omega^2 \cdot \widehat{\text{sen}} R\hat{n}_\sigma \cdot \widehat{\text{sen}} \Phi}{g \widehat{\text{sen}} R_1 \hat{n}_\sigma - R\omega^2 \widehat{\text{sen}} R\hat{n}_\sigma \cdot \widehat{\text{cos}} \Phi},$$

equazione contenente le quattro incognite:

$$[3] \quad \Phi, \quad \widehat{\text{sen}} R\hat{n}_\sigma, \quad \widehat{\text{sen}} R_1 \hat{n}_\sigma, \quad R\omega^2.$$

Si considerino adesso k piani, $\sigma \sigma' \sigma'' \dots$ solidali col velivolo e formanti fascio, aventi ad esempio come asse del fascio l'asse alare del velivolo od una parallela ad esso. Potremo scrivere altrettante equazioni come la [2] nelle quali, a norma di quanto poi diremo, i rispettivi angoli $\bar{\phi} \bar{\phi}' \bar{\phi}'' \dots$ sono da ritenere conosciuti. Vi compariranno in

totale $3k + 1$ incognite cioè, anzitutto l'incognita $R\omega^2$ e poi, per ogni piano, le rispettive incognite:

$$[3 \text{ bis}] \quad \text{sen } \widehat{Rn_\sigma}, \quad \text{sen } \widehat{R_1 n_\sigma}, \quad \Phi$$

Naturalmente sono da ritenere dati gli angoli:

$$\alpha' = \widehat{\sigma\sigma'}, \quad \alpha'' = \widehat{\sigma\sigma''} \dots,$$

per modo che, supposte per un momento note le sole incognite [3 bis] relative al primo piano σ , si possono facilmente calcolare le analoghe quantità per σ' , σ'' , ...

Per i k piani avremo dunque k equazioni come la [2], contenenti le uniche quantità incognite fondamentali [3], e perciò alla determinazione di queste ultime occorreranno e basteranno 4 piani soltanto (4 equazioni). Non ci indugeremo ad esplicitare Φ' , Φ'' , ... $\text{sen } Rn_{\sigma'}$, ... $\text{sen } Rn_{\sigma''}$, ... $\text{sen } R_1 n_{\sigma'}$, $\text{sen } R_1 n_{\sigma''}$, ... mediante le [3] e gli angoli $\alpha' \alpha''$..., nè a risolvere il sistema delle 4 equazioni relative alle [3] e passeremo subito al caso di una virata orizzontale, che è il caso più semplice e più frequente.

6. VIRATA ORIZZONTALE. ATTRITO. — Il oircolo descritto dal bari-centro G del velivolo è orizzontale, l'asse ω di virata è verticale; l'assetto del velivolo è lateralmente inclinato rispetto all'orizzonte, cioè l'asse alare HK fa col raggio OG , perpendicolare all'asse ω , un angolo tale, che la risultante GC delle forze centrifughe e il peso risultante GP equilibrano la portanza GA .

Il pendolo, situato nel piano verticale $HKP \equiv \sigma$, solidale col velivolo, in assenza di attrito, prenderà la direzione opposta alla portanza GA , che è normale all'asse alare HK . Queste particolarità riguardano evidentemente la virata orizzontale corretta, perchè se ad esempio la posizione di equilibrio relativo del pendolo non coincidesse con GB , sarebbe segno di derapamento o di scivolamento d'ala.

Nella virata orizzontale la retta R_1 e la r_1 coincidono con GP , la retta R e la r coincidono con GC , per cui $\Phi = 90^\circ$ e φ è l'angolo

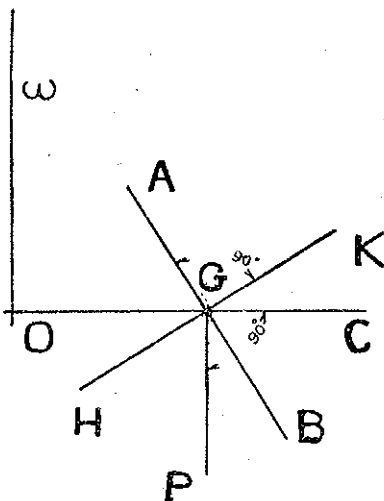
variabile del pendolo con la verticale GP. La [1] si semplifica così:

$$[4] \quad I\ddot{\varphi} = -Mgl \sin \varphi + MR\omega^2 l \cdot \cos \varphi$$

Volendo poi tener conto dell'attrito si deve aggiungere un termine della forma:

$$[5] \quad \pm \nu M (-l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi + R\omega^2 \sin \varphi)$$

dove va preso il segno meno, se il moto è diretto ($\dot{\varphi} > 0$) oppure il più, se il moto è retrogrado ($\dot{\varphi} < 0$) e dove ν è un coefficiente di dimen-



sione lineare e dipendente dall'attrito. Trattandosi di pendoli di dimensioni minuscole la sospensione da adottare deve essere a coltello e così congegnata da non essere disturbata dalle pressioni esercitate sul pendolo normalmente al suo piano come fanno le forze generate dalle accelerazioni complementari.

Immaginiamo che il pendolo sia bloccabile in una posizione determinata dal suo piano. Il velivolo entri in virata e si voglia conoscere la posizione della verticale. Compiuta la manovra necessaria all'ingresso in virata, si sblocchi il pendolo; esso inizierà subito delle oscillazioni che andranno smorzandosi in virtù dell'attrito. Assunto $l < 8\text{mm.}$, come

al § 2, e $\dot{\varphi} < 2 \text{ rad/sec.}$, come al § 4, risulta $l\dot{\varphi}^2 < 3,2 \cdot 10^{-2}$, mentre il secondo termine della [5] oscilla fra $\pm 9,8$ e mentre nel terzo termine della [5] medesima il fattore $R\omega^2$ può assumere un valore intorno a circa 10 nell'ipotesi larga di una velocità periferica $R\omega = 150 \text{ m/sec}$ e di $\omega = \frac{1}{14}$ come nel § 2.

L'equazione [4], con l'introduzione del termine aggiuntivo [5] nel quale venga trascurato il termine $l\dot{\varphi}^2$, va allora modificata così:

$$[6] \quad I\ddot{\varphi} = -M(gl + vR\omega^2) \sin \varphi + M(R\omega^2 l - v g) \cos \varphi$$

(per il moto diretto)

oppure:

$$[7] \quad I\ddot{\varphi} = -M(gl - vR\omega^2) \sin \varphi + M(R\omega^2 l + v g) \cos \varphi$$

(per il moto retrogrado)

7. DETERMINAZIONE DI v . - Si faccia oscillare il pendolo in un piano verticale fisso con il suolo, abbandonandone il baricentro da un angolo φ_0 negativo, ben determinato. In luogo della [6] vigerà:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L} \sin \varphi \mp \frac{v}{l} \frac{g}{L} \cos \varphi$$

ossia:

$$\ddot{\varphi} = -\rho \sin(\varphi \pm \sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ nel moto diretto} \\ - \text{ nel moto retrogrado} \end{array} \right.$$

avendo posto:

$$[8] \quad \frac{g}{L} = \rho \cos \sigma, \quad \frac{v}{l} \frac{g}{L} = \rho \sin \sigma \quad (\sigma > 0)$$

Ponendo ancora:

$$\Phi_1 = \varphi + \sigma, \quad \ddot{\Phi}_1 = -\rho \sin \Phi_1, \quad \text{nel moto diretto}$$

$$\Phi_2 = \varphi - \sigma, \quad \ddot{\Phi}_2 = -\rho \sin \Phi_2, \quad \text{nel moto retrogrado,}$$

e partendo da:

$$\varphi_0 = -\gamma \quad \text{con} \quad \gamma > 0$$

si inizia la prima fase di moto diretto e poi si passa alla seconda di moto retrogrado, alla terza di diretto, e così via alternativamente.

$$\begin{aligned} 1^{\text{a}} \text{ fase: } \varphi \text{ iniz.} &= -\gamma ; \quad \Phi_1 \text{ iniz.} = -\gamma + \sigma ; \\ &\quad \Phi_1 \text{ finale} = \gamma - \sigma ; \quad \varphi \text{ finale} = \gamma - 2\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{\text{a}} \text{ fase: } \varphi \text{ iniz.} &= \gamma - 2\sigma ; \quad \Phi_2 \text{ iniz.} = \gamma - 3\sigma ; \\ &\quad \Phi_2 \text{ finale} = 3\sigma - \gamma ; \quad \varphi \text{ finale} = 4\sigma - \gamma \end{aligned}$$

e così via:

$$m^{\text{ma}} \text{ fase: } \varphi \text{ iniz.} = \mp [\gamma - (2m-2)\sigma] ; \quad \varphi \text{ finale} = \pm [\gamma - 2m\sigma]$$

prendendo il segno in alto quando m è dispari e quello in basso quando m è pari. Naturalmente la successione continua fino a che:

$$\begin{aligned} \Phi_1 \text{ iniz.} &= -[\gamma - (2m-2)\sigma] + \sigma < 0, \quad \text{per } m \text{ dispari} \\ \Phi_2 \text{ iniz.} &= +[\gamma - (2m-2)\sigma] - \sigma > 0, \quad \text{per } m \text{ pari} \end{aligned}$$

ed il fermo si avrà alla fine della n_0 fase, soltanto se contemporaneamente si ha:

$$\begin{aligned} -[\gamma - (2n_0-2)\sigma] + \sigma &< 0 \quad \text{per l'inizio della } n_0 \text{ fase} \\ +[\gamma - 2n_0\sigma] - \sigma &< 0 \quad \text{per il non inizio della } (n_0+1) \text{ fase} \\ &\quad (n_0 \text{ dispari}); \end{aligned}$$

donde:

$$(2n_0-1)\sigma < \gamma < (2n_0+1)\sigma ;$$

e analogamente per n_0 pari. Sicchè, contando, a partire da $\varphi_0 = -\gamma$, le oscillazioni del pendolo fino a che si ferma, si trova:

$$\sigma \approx \gamma / (2n_0)$$

e conosciuto σ si può ricavare v dalle [8], cioè:

$$v = l \cdot \tan \sigma = \infty \tan [\gamma / (2n_0)] .$$

Fin qui abbiamo supposto $\gamma > 0$; un ragionamento analogo si può ripetere se γ è qualsiasi.

8. DETERMINAZIONE DI $\Delta = \sigma_2 - \sigma_1$. In riferimento alle equazioni [6] e [7] si ponga:

$$[9] \quad \tan \sigma_1 = \frac{R\omega^2 l - v g}{g l + v R\omega^2} ; \quad \tan \sigma_2 = \frac{R\omega^2 l + v g}{g l - v R\omega^2}$$

$$\rho_1^2 / M^2 = (R\omega^2 l - v g)^2 + (g l + v R\omega^2)^2 ; \quad \rho_2^2 / M^2 = (R\omega^2 l + v g)^2 + (g l - v R\omega^2)^2 .$$

Segue dalle [9] con semplici trasformazioni:

$$[10] \quad \tan (\sigma_2 - \sigma_1) = \frac{2vl}{l^2 - v^2} = \frac{2v}{l} + \varepsilon$$

dove ε contiene termini in v , di grado terzo o maggiore. Dalla [10] si ricava perciò $\Delta = \sigma_2 - \sigma_1$, essendo v ed l quantità perfettamente note.

9. DETERMINAZIONE DI $\bar{\varphi}$. - Lo sblocco iniziale del pendolo si faccia avvenire, come si è detto, a manovra già compiuta, ossia mentre il velivolo trovasi in virata; allora se lo sblocco trova il pendolo in posizione ortogonale rispetto all'asse alare (che è la posizione normale tanto in volo rettilineo orizzontale, quanto in virata orizzontale corretta), di qui esso non si sposterà finchè non riceve un impulso oppure venga spostato in posizione prestabilita formante ad esempio l'angolo $-\psi_0$ ($\psi_0 > 0$) con la retta GB. Poniamoci in questo secondo caso; anzi potremo organizzare il dispositivo in modo che la posizione normale del pendolo prima dello sblocco coincida sempre con la direzione che con GB forma l'angolo fisso $-\psi_0$. Le condizioni iniziali sono dunque:

$$\varphi = -\psi_0 , \quad \dot{\varphi} = 0 ,$$

φ essendo l'angolo che la GP forma col pendolo (GP verticale e insieme retta di maggior pendio).

Valendoci delle [9], le [6] e [7] diverranno:

$$I\ddot{\varphi} = -\rho_1 \sin(\varphi - \sigma_1) \quad \text{nel moto diretto}$$

$$I\ddot{\varphi} = -\rho_2 \sin(\varphi - \sigma_2) \quad \text{nel moto retrogrado}$$

le quali:

$$\text{posto } \begin{cases} \Phi_1 = \varphi - \sigma_1 \\ \Phi_2 = \varphi - \sigma_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{diverranno} \\ \text{rispettivamente} \end{matrix} \quad \begin{cases} \ddot{\Phi}_1 = -\frac{\rho_1}{I} \sin \Phi_1 \\ \ddot{\Phi}_2 = -\frac{\rho_2}{I} \sin \Phi_2 \end{cases}$$

nella 1^a fase: φ iniz. = $-\psi_0$; Φ_1 iniz. = $-\psi_0 - \sigma_1$;

$$\Phi_1 \text{ finale} = \psi_0 + \sigma_1; \quad \varphi \text{ finale} = \psi_0 + 2\sigma_1.$$

nella 2^a fase: φ iniz. = $\psi_0 + 2\sigma_1$; Φ_2 iniz. = $\psi_0 + 2\sigma_1 - \sigma_2$;

$$\Phi_2 \text{ finale} = \sigma_2 - \psi_0 - 2\sigma_1; \quad \varphi \text{ finale} = 2\sigma_2 - 2\sigma_1 - \psi_0.$$

.....

nella m^{ma} fase: φ iniz. = $m\sigma_1 - (m-2)\sigma_2 + \psi_0$; φ finale =

$$= m(\sigma_2 - \sigma_1) - \psi_0, \text{ per } m \text{ pari.}$$

φ iniz. = $(m-1)(\sigma_2 - \sigma_1) - \psi_0$; φ finale =

$$= (m+1)\sigma_1 - (m-1)\sigma_2 + \psi_0, \text{ per } m \text{ dispari.}$$

Naturalmente la successione continua fino a che:

$$\Phi_2 \text{ iniz.} = m\sigma_1 - (m-1)\sigma_2 + \psi_0 > 0 \quad \text{per } m \text{ pari}$$

$$\Phi_1 \text{ iniz.} = (m-1)\sigma_2 - m\sigma_1 - \psi_0 < 0 \quad \text{per } m \text{ dispari}$$

ed il fermo si avrà alla fine della n^{ma} fase se contemporaneamente si ha:

$$(n-1)\sigma_2 - n\sigma_1 - \psi_0 < 0 \quad \text{per l'inizio della } n^{\text{ma}} \text{ fase dispari}$$

$$(n+1)\sigma_1 - n\sigma_2 + \psi_0 < 0 \quad \text{per il non inizio della } (n+1)^{\text{ma}} \text{ fase pari}$$

donde:

$$[11] \quad n\Delta - \psi_0 < \sigma_2 < (n+1)\Delta - \psi_0$$

che vale tanto per n dispari che per n pari. Dunque, noto ψ_0 una volta per tutte, un *contatore di oscillazioni* fornirà n e quindi darà σ_2 a meno di Δ . Anzi il contatore, poichè Δ è noto, può essere *opportunamente tarato* onde segni addirittura:

$$[12] \quad \sigma_0 = n\Delta - \psi_0 - \arctan \frac{v}{l},$$

cioè segni appunto quell'angolo che differisce da $\bar{\varphi} = \widehat{PGB} = \arctan \frac{R\omega^2}{g}$, per meno di $\varepsilon\Delta$ ($|\varepsilon| < 1$); e infatti dalle [9] e da $\tan \bar{\varphi}$ si deduce:

$$[13] \quad \tan(\sigma_2 - \widehat{PGB}) = \tan(\sigma_2 - \bar{\varphi}) = \frac{v}{l},$$

e, siccome $\sigma_2 - \sigma_0 = \varepsilon\Delta$, segue da [12] e [13]:

$$\bar{\varphi} = (n + \varepsilon)\Delta - \psi_0 - \arctan(v/l)$$

Conosciamo dunque mediante diretta lettura sul contatore l'angolo \widehat{PGB} e perciò la posizione della verticale rispetto all'asse alare; e con tanta maggiore approssimazione, quanto minore è v . Naturalmente non dobbiamo varcare gli opportuni limiti di piccolezza per v , altrimenti il numero delle oscillazioni occorrenti al fermo del pendolo diventa così grande che, nella durata della segnalazione, le forze centrifughe non si possono considerare più come parallele. Supponiamo che $v/l = \tan \frac{\gamma}{2n_0} = \frac{\Delta}{2}$ sia eguale a $\sim 0,023$, e quindi sia $\Delta = \sim 2^\circ 37'$; in una virata rapida compiuta alla velocità angolare di $4^\circ/\text{sec}$, con una velocità di 360 Km. all'ora e con $\psi_0 = 6^\circ \frac{1}{2}$ si avrà $\sigma_0 + \psi_0 = 42^\circ$, ed un pendolo che compia 4 oscillazioni complete al secondo, permetterà di ottenere σ_0 dopo 16 oscillazioni ($n = 16$) con approssimazione a meno di una frazione di $2^\circ 37'$.

10. ESAME ENERGETICO. — La formula [12] dice che a parità di σ_0 , col crescere dell'attrito e quindi di ν , diminuisce il numero n delle oscillazioni che si verificano prima di raggiungere il fermo; e questo, dal punto di vista energetico, è evidente. Non altrettanto chiara a prima vista è la circostanza, che pur si rileva dalla [12], e cioè che aumentando σ_0 mentre ν rimane inalterato, cresce n . Si tratta di vedere se effettivamente col crescere dell'angolo $P\hat{G}B$ cresce l'energia potenziale posseduta dal pendolo al momento che esso è abbandonato dalla posizione che fa l'angolo $-\psi_0$ con GB .

Ora si rifletta che, se si pensa il pendolo soggetto ad un campo uniforme del quale si possa far crescere l'intensità, avverrà che, a parità di spostamento $-\psi_0$ contato dalla posizione di equilibrio, col crescere dell'intensità crescerà anche l'energia potenziale. Ora nel caso che consideriamo il pendolo è soggetto a due campi uniformi (per intensità e direzione) quello della gravità e quello delle forze centrifughe, tra loro ortogonali, i quali si compongono in un unico campo uniforme risultante la cui accelerazione sarà:

$$a = g(i + j \tan \sigma_0)$$

dove i e j sono due versori, il primo verticale, il secondo orizzontale; e dove σ_0 è la posizione di equilibrio del pendolo, riferita alla verticale corrispondente ad una data velocità angolare ω e cioè:

$$\tan \sigma_0 = \frac{R\omega^2}{g}, \quad (R \text{ raggio di virata})$$

Allora, crescendo ω , cresce $\tan \sigma_0$, e quindi cresce l'intensità dell'accelerazione a , cioè:

$$a = \frac{g}{\cos \sigma_0},$$

che è generata dal campo uniforme risultante; crescerà pertanto l'energia potenziale del pendolo. Beninteso che col variare l'intensità del campo risultante ne varia anche la direzione.

PRIMA SEGNALEZIONE DI UN MOSASAURO
DEL GENERE GLOBIDENS
NEL CRETACEO DELL'EGITTO (*)

(Con una tavola)

PIERO LEONARDI e ROBERTO MALARODA

SVMMARIVM. — Genus *Globidens* primum notatur in Cretaceo Aegypti.

Il dente di mosasauro che forma oggetto della presente nota ci è stato favorito dalla Sig.^{na} FRANCA DECIMA, e venne rinvenuto in Egitto da suo Padre, il perito minerario Sig. RICCARDO DECIMA.

Secondo le notizie forniteci dalla gentile donatrice, il fossile proviene dalle formazioni fosfatiche del Cretaceo superiore, e più precisamente dal gruppo più elevato di strati fosfatici (probabilmente livello *a*) della miniera di Gebel Duwi⁽¹⁾, nel Deserto Arabico. Tale miniera è situata a una trentina di chilometri da Kosseir, sulla costa egiziana del Mar Rosso, e la sua direzione era appunto affidata al Sig. DECIMA, che possedeva una particolare competenza sulla stratigrafia locale⁽²⁾.

Denti di mosasauro erano già stati segnalati nei depositi cretacei egiziani⁽³⁾, ma non ci risulta che finora fossero stati rinvenuti resti

(*) Nota presentatata dall'Accademico Pontificio S. E. Giorgio Dal Piaz il 6 agosto 1946.

(¹) HUME W. F., *The phosphate deposits in Egypt*, tav. IV.

(²) MARTELLI A., *Sui fosfati Kosseir*, pagg. 18-20.

(³) PRIEM F., *Sur des Vertébrés du Crétacé*, ecc., pagg. 369, tav. X, figg. 20-25; GEMMELLARO M., *Rettili maëstrichtiani di Egitto*, pagg. 5-7, figg. 1-5.

del gen. *Globidens*, dagli strani denti bulbosi, che dovevano servire a questi grossi rettili marini per schiacciare le conchiglie dei molluschi e le corazze dei crostacei e degli echini di cui con ogni probabilità si nutrivano.

Secondo ZITTEL⁽¹⁾ e BOULE e PIVETEAU⁽²⁾ questo genere è stato segnalato finora soltanto nell'America settentrionale (Alabama, Mississippi), in Olanda (dintorni di Maëstricht)⁽³⁾ e nel Belgio (Hainaut).

E poichè il dente favoritoci dalla Sig.^{na} DECIMA è indubbiamente riferibile a questo interessante genere di pitonomorfi, riteniamo utile segnalarne il rinvenimento.

* * *

L'esemplare presenta conservata solamente la corona del dente, la quale ha la forma di un bulbo a base ellittica, più allungata in senso anteroposteriore che nei denti di *Globidens alabamaensis* GILMORE, con una cuspidе ottusa subcentrale rivolta verso l'indietro più pronunciata che nella specie suddetta. La superficie dello smalto è finemente rugosa, specialmente in prossimità della cuspidе, e presenta una tinta bruna scura.

Sulla faccia anteriore, a metà altezza fra il colletto e la cuspidе, si nota una faccetta d'usura, dovuta verosimilmente allo sfregamento con la cuspidе di un dente dell'altra mascella.

Sul nostro esemplare non si nota nemmeno una delle creste taglienti e finemente dentellate che caratterizzano di solito la corona dei denti dei mosasauri, a meno che non si voglia considerare come la traccia di una di esse una ruga leggermente più pronunciata delle altre, che dall'apice scende verso il colletto. Parallelamente ad essa si nota una infossatura poco pronunciata, più evidente presso il colletto.

La mancanza delle creste suddette indica trattarsi di uno dei

(1) ZITTEL C., *Grundzüge der Palaeontologie*, pag. 264.

(2) BOULE M. et PIVETEAU J., *Les fossiles*, pag. 456, fig. 775.

(3) Propriamente, ZITTEL e BOULE-PIVETEAU scrivono: America settentrionale e Belgio, ma i resti di *G. fraasi* descritti da DOLLO, cui certamente gli Autori si riferiscono, sono stati rinvenuti nei pressi di Maëstricht, che si trova nel Limburgo olandese.

denti posteriori, poichè anche nella mascella descritta da GILMORE⁽¹⁾ l'ultimo dente conservato (9°) non mostra alcuna cresta.

Le dimensioni sono alquanto maggiori che negli altri denti finora attribuiti al genere *Globidens*.

DIMENSIONI DEL DENTE

Diametro massimo anteroposteriore	mm. 31
» » trasversale	» 27
Altezza della corona	» 24

* * *

Al genere *Globidens* (GILMORE 1912) sono state finora attribuite quattro specie: la prima, *Gl. alabamaensis* GILMORE, segnalata nel Senoniano superiore dell'Alabama, del Mississippi (U. S. A.) e dell'Hainaut (Belgio), possiede denti più massicci e globosi, mentre la seconda, *Gl. fraasi* DOLLO, propria del Maëstrichtiano superiore del Limburgo olandese e dell'Hainaut (Belgio), presenta denti più gracili e compressi lateralmente⁽²⁾. Affine a quest'ultima è la terza specie, *Gl. belgicus* WOODWARD⁽³⁾ del Senoniano superiore dell'Hainaut (Belgio), che però ne differisce per avere i denti trienspidati.

La quarta specie infine, è rappresentata da tre denti conici provenienti dal Cretaceo superiore di Timor (Indie Olandesi), che ERIKA v. HUENE descrive col nome di *Globidens* (?) *timorensis*⁽⁴⁾.

Non è certo che le tre ultime specie appartengano al genere *Globidens*; comunque il nostro esemplare è senza dubbio più prossimo, sia per la forma complessiva della corona che per la rugosità dello smalto, che non è reticolare, a *Gl. alabamaensis*.

(1) GILMORE C. W., *A new mosasauroid, ecc.*, tav. 40.

(2) DOLLO L., *Globidens fraasi, ecc.*, tav. XXIV.

(3) WOODWARD A. S., *Note on a tooth, ecc.*, « Geol. Mag. », 1891; DOLLO L., *Globidens alabamaensis, ecc.* « Archives de Biologie », 1925.

(4) HUENE E. v., *Mosasaurier-Zähne von Timor*, « Zentralbl. f. Geol. u. Pal. », Abt. B., 1935, pagg. 412-416.

Alcuni caratteri particolari, che abbiamo rilevato più sopra (base più allungata in senso anteroposteriore, cuspidè più pronunciata, rugosità più marcata, infossatura laterale, dimensioni maggiori) potrebbero far pensare alla possibilità che il nostro esemplare appartenga ad una nuova forma distinta, affine a *Gl. alabamaensis*.

Ma non sarebbe prudente dare una determinazione specifica precisa basandosi su un solo dente incompleto: riteniamo sufficiente segnalare la presenza, nei depositi cretacei dell'Egitto, di questo interessante genere di Lepidosauri marini, che finora non era stato rinvenuto nel continente africano.

* * *

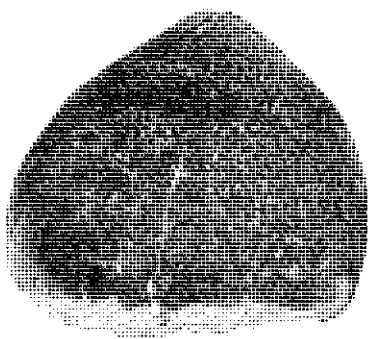
DOLLO, in base ad alcuni confronti con la dentatura di altri rettili marini, propende a credere che il genere *Globidens* fosse echinofago, mentre altri Autori (GILMORE, BOULE e PIVETEAU, ZITTEL, WILLISTON) pensano che esso si nutrisse di molluschi dalla conchiglia resistente, e di crostacei.

A noi sembra che le deduzioni di DOLLO possono essere valide forse per *Gl. fraasi* e *Gl. belgicus*, dai denti più gracili e compressi, ma che i denti bulbosi e relativamente appiattiti del *Gl. alabamaensis*, e particolarmente della forma cui appartiene il nostro esemplare, siano perfettamente adatti per il regime carcinofago o addirittura per quello conchifrago.

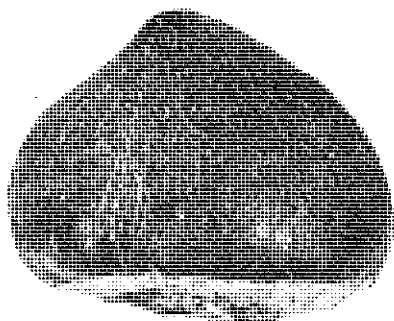
Istituto Geologico dell'Università di Padova, giugno 1946.



1a



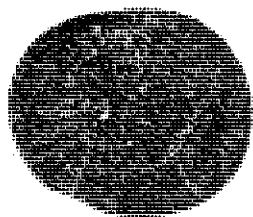
1b



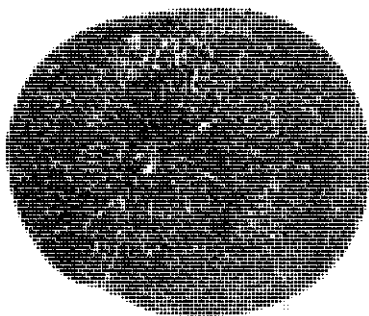
2b



2a



3a



3b

Dente di *Globidens* cfr. *alabamaensis* GILMORE
visto dal lato anteriore (fig. 1), di fianco (fig. 2), e dall'alto (fig. 3).
(a in grandezza naturale; b alquanto ingrandito).

BIBLIOGRAFIA

- [1] BRADNELL H. J. L., *Report on the Geology of the Red Sea coast between Qoseir and Wadi Ranga*. «Min. Finance Egypt-Petroleum Research Bull.», N. 13, Cairo, 1924.
- [2] BOULE M. e PIVETEAU J., *Les fossiles*. Paris, 1935, pag. 456, fig. 775.
- [3] CAYEUX M. L., *Constitution des phosphates sénoniens d'Egypte*. «C. R. Acad. Sciences», séance 24 juin 1935.
- [4] DI STEFANO G., *Osservazioni sul Cretaceo e sull'Eocene del deserto arabico di El-Sibaiya nella valle del Nilo*. «Boll. R. Comit. Geol. d'Italia», vol. XLVII, fasc. I-IV, 1920.
- [5] DOLLO L., *Globidens Fraasi, mosasaurien mylodonte nouveau du Maëstrichtien (Crétacé supérieur) du Limbourg, et l'Ethologie de la nutrition chez les Mosasauriens*. «Archives de Biologie», Liège-Paris, t. XXVIII, 1913, pagg. 609-626, tavv. XXIV-XXV.
- [6] — *Globidens alabamaensis, mosasaurien mylodonte américain retrouvé dans la Craie d'Obourg (Sénonien supérieur) du Hainaut, et les Mosasauriens de la Belgique, en général*. «Archives de Biologie» Liège-Paris, t. XXXIV, 1925, pagg. 167-213, tav. 5.
- [7] GEMMELLARO M., *Rettili maëstrichtiani di Egitto*. «Giorn. Sc. Natur. ed Econ.», Palermo, vol. XXXII, 1921.
- [8] GILMORE C. W., *A new Mosasauroid reptile from the Cretaceous of Alabama*. «Proc. Unit. St. Nat. Mus.», vol. 41, n. 1870, 1912, pagg. 479-484, tavv. 39-40.
- [9] — *Note on the second occurrence of the Mosasaurian Reptile Globidens*. «Science», New York, vol. LXVI, 1927, pag. 452.
- [10] HAUG E., *Traité de Géologie*, t. II, 1908-1911, fasc. 2, pag. 1336.
- [11] HUME W. F., *The phosphate deposits in Egypt*. «Min. of Fin., Survey of Egypt», Paper n. 41, Cairo, 1927.
- [12] HUENE E. VON, *Mosasaurier-Zähne von Timor*. «Centralblatt f. Min. Geol. u. Pal.», Abt. B, 1935, pagg. 412-416.
- [13] MARTELLI A., *Sui fosfati Kosseir*. «Pubbl. Prof. Teen.», n. 1, Roma, 1928.

-
- [14] NOPCSA F. VON, *Osteologia reptilium fossilium et recentium-Fossilium Catalogus I: Animalia*. Pars 27: 1926 e pars 50: 1931.
- [15] PRIEM F., *Sur des Vertébrés du Crétacé et de l'Eocène d'Egypte*. « Bull. Soc. Géol. France », sér. IV, vol. XIV, 1914, pagg. 866-882.
- [16] WANNIER J., QUASS A., DACQUÉ E., *Die Faunen der oberen Kreidebildungen in der lybischen Wüste*. « Palaeontographica », vol. XXX, 2^a parte, 1902-1903.
- [17] WILLISTON S. W., *Water reptiles of the past and present*. « Univ. Chic. Press. », Chicago, 1914, pag. 167.
- [18] WOODWARD A. S., *Note on a Tooth of an Extinct Alligator (Botigsaurus belgicus) from the Lower Danian of Ciply, Belgium*. « Geol. Mag. », 1891, vol. VIII, pag. 114.
- [19] ZITTEL K. A. VON, *Grundzüge der Paläontologie, II: Vertebrata*. 1923, pag. 264.

CALCOLO DELLE STRUTTURE COMPOSTE DI ELEMENTI IN STATO DI COAZIONE E DI ELEMENTI ALLO STATO NATURALE NON DEFORMATO (*)

FRANCO LEVI

SUMMARIVM. — Perpendit Auctor quas figuras sumere possit diagramma tensionum in structura, quae constet ex duobus elementis, quorum alterum sit antea compressum, alter non. Ex quo perspicitur quomodo haec structura se habeat, si onus super imponatur, et ratio indicatur qua determinari possit quo onere imposito ipsa fragantur; ita statuitur quomodo aptior huiusmodi structurarum ratio inveniri possit.

Prendiamo in esame un solaio in calcestruzzo armate composto da una trave allo stato precompresso associata ad una soletta allo stato naturale non deformato. (Fig. 1).

La figura 2 rappresenta anzitutto il diagramma delle tensioni nella struttura in assenza di sollecitazione esterna. Per effetto della pretesione TT' , imposta all'armatura, la trave si trova precompressa e il piano di riferimento $A'B$ si dispone in $C'D$. Le tensioni di coazione tanto nel calcestruzzo quanto nell'armatura vanno lette a partire dalla fondamentale $C'D$ tenendo conto dei rispettivi valori del modulo (¹).

Applichiamo ora all'assieme una sollecitazione esterna ed ammettiamo che sia ancora verificata l'ipotesi della conservazione delle sezioni piane.

Sotto l'azione dello sforzo esterno, il piano CD che taglia tanto la trave quanto la soletta, assume la posizione EF . Sempre ch  si tenga conto dei vari valori del modulo, le tensioni sulle singole fibre,

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. G. Colonnetti il 29-7-1943.

(¹) G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese*, Pontificia Accademia Scientiarum, « Acta », vol. IV, 1942.

andranno sommate nella trave alle tensioni di coazione. Questo è precisamente il caso rappresentato dalla retta EF della fig. 2. Appena però nascono, in un punto qualsiasi della sezione, delle tensioni positive, secondo le ipotesi correntemente usate nello studio del calcestruzzo armato, bisognerà ammettere che la sezione si parzializzi.

Nelle figg. 3, 4, 5, 6, 7, abbiamo tracciato vari aspetti che potrà allora assumere il diagramma delle tensioni, secondo la forma del diagramma di precompressione, secondo le caratteristiche della sollecitazione esterna e infine secondo le posizioni relative dei due elementi della struttura.

Si nota così che, secondo i casi, l'asse di separazione fra zona reagente e zona parzializzata potrà essere reale nella trave e virtuale nella soletta (fig. 3). Potrà invece avvenire che al crescere della sollecitazione esterna sopravvengano due assi reali di separazione, uno in ciascun elemento (fig. 4 e fig. 7). In altri casi l'asse di separazione, potrà essere reale nella soletta, virtuale nella trave (figg. 5 e 5 bis). Infine nella figura 6 abbiamo segnalato un caso particolare dove già per valori molto piccoli del momento flettente applicato appaiono due assi di separazione reali situati rispettivamente al bordo inferiore della soletta e al bordo superiore della trave; al crescere del carico quello relativo alla soletta tende ad innalzarsi come già negli altri casi esaminati, mentre quello relativo alla trave si abbassa.

Nelle varie figure abbiamo tratteggiato verticalmente le tensioni di compressione sopportate dalla trave, e orizzontalmente quelle sopportate dalla soletta.

In linea generale, si può dire che, dato che la deformazione risultante è rappresentata da un piano unico, mentre i piani di riferimento dei due elementi sono distinti, vi saranno sempre due assi di separazione. Ma questi due assi potranno, secondo i casi, essere reali, virtuali, in certi casi anche sovrapposti o respinti all'infinito. Data la grande varietà dei casi possibili, la soluzione generale del problema della determinazione del diagramma delle tensioni per una sollecitazione data appare assai arduo.

Nel caso particolare della fig. 5 nel quale tutte le tensioni di compressione sono riportate sulla soletta, il problema può venir risolto per estensione del metodo già indicato dal Prof. COLONNETTI per le

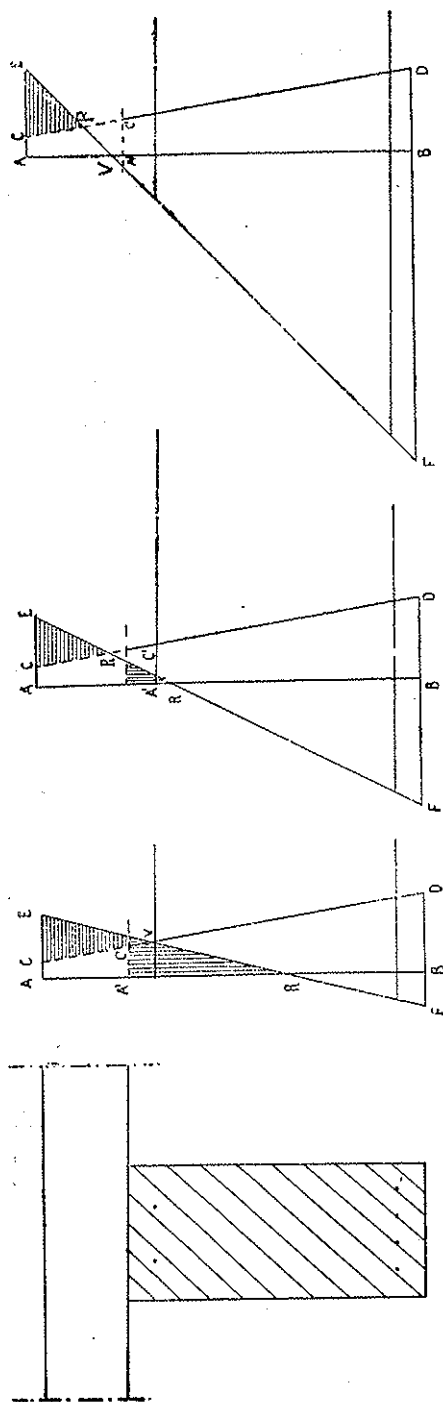


FIG. 345.

travi interamente precomprese (¹). Questa disposizione del diagramma di tensione è precisamente quella che viene a verificarsi, nella più gran parte delle strutture associate, al limite della loro resistenza. Questa soluzione presenta dunque un grande interesse dal punto di vista della determinazione dei margini di sicurezza.

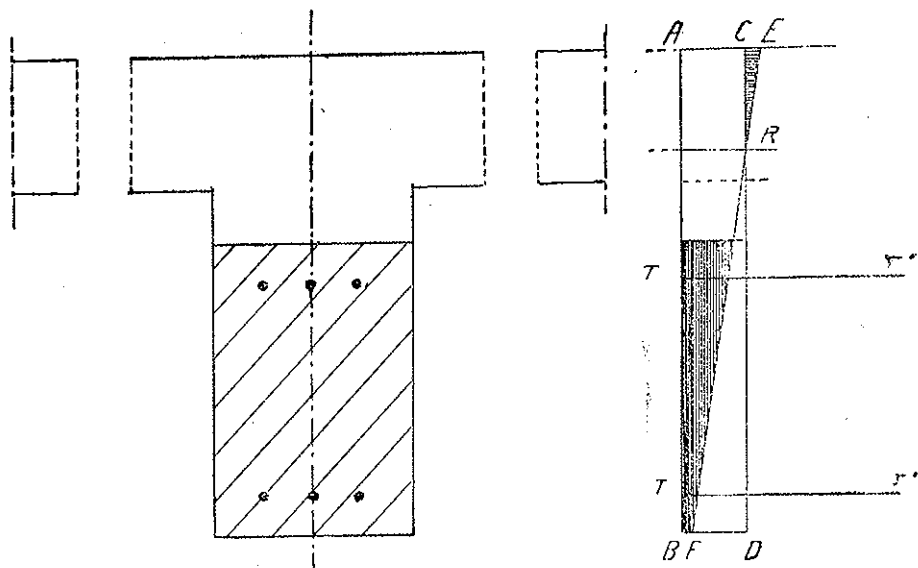


FIG. 5bis.

Invece nel caso della fig. 5bis, l'asse R è evidentemente baricentrico rispetto alla sezione reagente formata dalla soletta compressa, dall'intera trave precompressa e dalle armature.

* * *

Quando il diagramma di tensione assume l'andatura rappresentata nella fig. 3, ossia quando non vi sia che un solo asse di separazione reale R situato nella trave, un metodo di ragionamento indiretto permette di determinare, per questo asse supposto noto, il diagramma di

(¹) G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese. Il problema delle sezioni precomprese solo parzialmente*, Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », vol. VII, 1943.

tensione passante per quel punto e corrispondente ad uno sforzo esterno ridotto ad una coppia. Una volta costruito questo diagramma, sarà facile calcolare il valore della coppia corrispondente; con che per ogni asse di separazione nella trave, si verrà a conoscere il momento flettente applicato che lo determina. Nella fig. 8, per un asse di separazione R dato, abbiamo tracciato in EF il diagramma di tensione ricer-

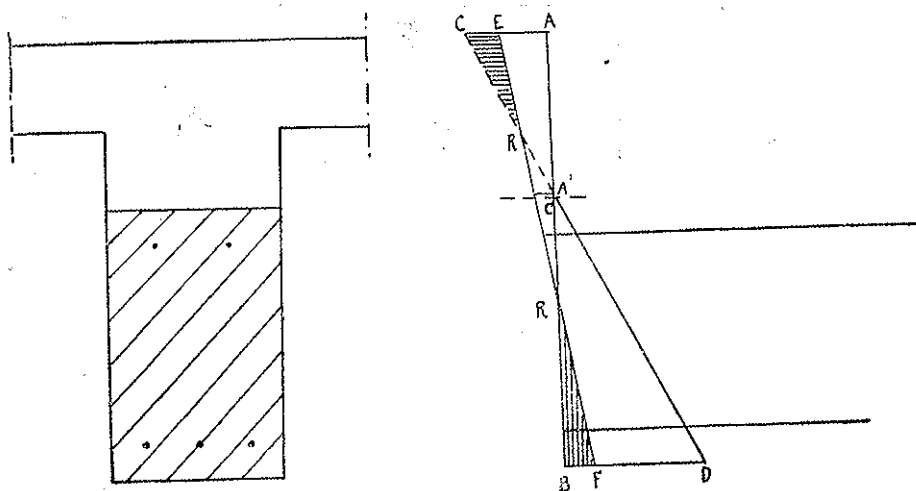


FIG. 6.

cato, che corrisponde ad uno sforzo esterno ridotto ad una coppia M ignota.

Dire che R è l'asse di separazione, equivale a dire che, sotto l'effetto del momento M , gli elementi della sezione della struttura che reagiscono effettivamente sono: l'area di calcestruzzo AR e le armature. Ora, se si fa astrazione delle pretensioni $\overline{TT'}$ e $\overline{T_1''T_1'}$, si nota che il diagramma di tensione EF , riferito nel suo intero al piano di riferimento AB , corrisponde ad una distribuzione di tensioni lineare sulla sezione reagente. La tensione unitaria gg' che questa distribuzione implica per il baricentro della sezione reagente, sarà eguale all'intensità della risultante della distribuzione lineare suddetta divisa per l'area della sezione reagente.

L'intensità di questa risultante non è altro che la somma algebrica delle seguenti forze: risultante delle compressioni $CEC'E'$ applicate alla soletta, risultante C_s delle compressioni fittizie $ACA'C'$ applicate pure alla soletta, risultante delle compressioni $A'E'R'$ applicate alla trave, risultanti delle tensioni $\overline{T''T'}$, $\overline{T_i''T_i'}$ applicate alle armature.

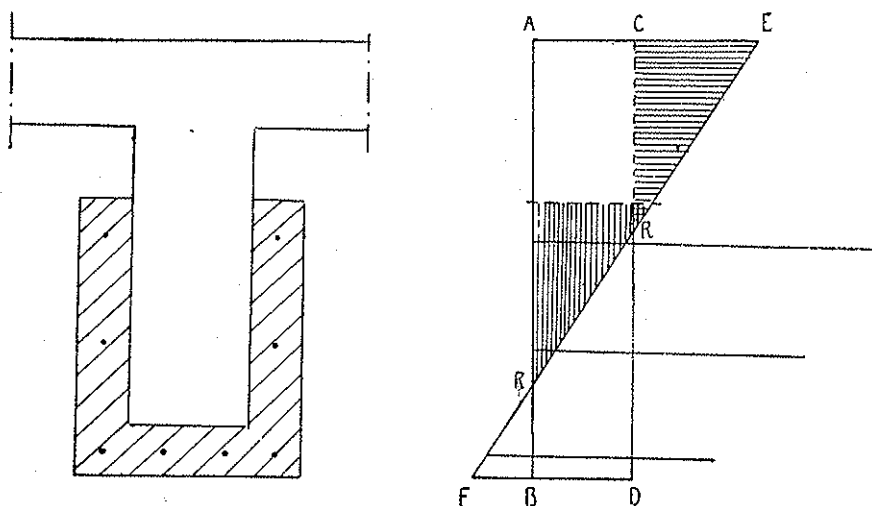


FIG. 7.

Ora, riprendendo in esame il diagramma delle tensioni effettivamente applicate alle varie parti della struttura associata sotto l'azione del momento M , si nota che la somma delle risultanti delle compressioni $CEC'E'$ applicate alla soletta e $A'E'R'$ applicate alla trave, devono far equilibrio alle risultanti delle tensioni $\overline{T''T'}$ e $\overline{T_i''T_i'}$ applicate alle armature.

Con chè il valore della risultante cercata si potrà scrivere:

$$(C_s)_{R}^{\text{soletta}} - (\overline{T''T'})_R^{As} - (\overline{T_i''T_i'})_R^{As} + (\overline{T''T'})_R^{As} + (\overline{T_i''T_i'})_R^{As}$$

(le parentesi e l'indice R significano che il termine va inteso come una risultante estesa all'elemento di sezione indicato in esponente;

A_i e A_s rappresentano le sezioni rispettive dell'armatura inferiore e dell'armatura superiore).

Sommando si ottiene:

$$(C_s)_{\text{soletta}} - (\overline{T} \overline{T})_R^{A_i} - (\overline{T}_i \overline{T}_i)_R^{A_s}$$

L'intensità della risultante cui equivale la distribuzione lineare di tensioni EF sarà dunque la somma della intensità della risultante nota C_s e della intensità della risultante pure nota delle trazioni imposte alle varie armature, cambiata di segno.

In pratica, la ricerca del momento M che determina un asse di separazione dato R sarà effettuata nel seguente modo: si determinerà il baricentro della sezione reagente g , indi si porterà da questo punto la tensione:

$$gg' = \frac{C_s + (\text{risultante trazioni imposte, cambiata di segno})}{\Omega_R}$$

Ω_R essendo l'area della sezione reagente. Si tratterà allora il diagramma EF e se ne dedurrà il valore del momento M .

A proposito di questo metodo va notato che:

a) se i due elementi della struttura si compenetrano, le tensioni fittizie vanno naturalmente estese a tutta la soletta e non limitate, come nel caso volutamente particolare della fig. 8, al bordo superiore della trave;

b) se una parte di queste tensioni fittizie risultano positive, ciò che avviene quando il piano CD taglia il piano AB nell'interno della soletta, la risultante corrispondente va considerata come negativa nel computo della C_s ;

c) appena nasca un asse di separazione reale nella soletta, il procedimento non è più valido perchè il valore della risultante delle tensioni fittizie da introdurre nel calcolo della gg' è diverso per ogni posizione dell'asse di separazione nella soletta.

È facile invece dimostrare che il procedimento può venir esteso ai casi in cui, pur assumendo il diagramma l'andatura della fig. 4, non vi sia tuttavia che un unico asse di separazione reale, situato nella trave, la soletta continuando a reagire elasticamente a trazione.

Questa osservazione riveste una certa importanza perchè condanna senz'altro tutti i tentativi che si potrebbero fare di studiare le strutture composte in esame con dei procedimenti analoghi a quelli leciti nel cemento armato ordinario: ampliando i vari elementi componenti secondo certi fattori n . Tale modo di procedere attribuirebbe infatti alle strutture composte un momento di inerzia fisso in regime di parzializzazione della parte precompressa e ciò sarebbe certamente erroneo poichè sappiamo che gli assi di separazione, e dunque l'area della sezione reagente, variano col mutare dello sforzo esterno.

Risulta invece molto vantaggioso, per lo studio generale dei sistemi composti, il tracciare due poligoni funicolari colleganti rispettivamente le aree della soletta e della trave, supposte equivalenti a delle forze orizzontali applicate nei rispettivi baricentri (fig. 9). Questo metodo è una estensione ai sistemi associati di quello indicato dal Prof. COLONNETTI per lo studio delle travi intieramente precomprese⁽¹⁾.

Siano H_T , H_s le distanze polari utilizzate. Siano y'' , y' le ordinate degli assi di separazione rispetto al bordo superiore della soletta, rispettivamente nella trave e nella soletta.

Indichiamo con y_T e y_s le ordinate delle fibre generiche della trave e della soletta contate a partire dai rispettivi assi di separazione e con σ_{cT} , σ_{cs} le tensioni generiche corrispondenti nel calcestruzzo. Sia σ_c la tensione al bordo superiore della soletta, σ_m quella generica nell'armatura della trave. Sia infine s il segmento compreso al bordo superiore della soletta fra le rette di riferimento della trave e della soletta, contato positivamente nel senso delle tensioni e letto in Kg/cm^2 nella scala delle tensioni.

Si avrà:

$$\frac{\sigma_{cT}}{y_T} = \frac{\sigma_c + s}{y''}$$

detto η_T il segmento intercettato sull'asse di separazione della trave dai lati del poligono che racchiudono un elemento di area della trave dA_{cT} .

Si ha:

$$\frac{\eta_T}{y_T} = \frac{dA_{cT}}{H_T}$$

⁽¹⁾ G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese. Il problema dei margini di sicurezza*, Pontificia Academia Scientiarum, «Acta», vol. VI, 1942.

e dunque

$$\eta_T = \frac{y_T dA_{cT}}{H_T} = \frac{\sigma_{cT} \cdot dA_{cT}}{H_T \frac{\sigma_c + s}{y''}}$$

$$\sum \sigma_{cT} dA_{cT} = H_T \frac{\sigma_c + s}{y''} \sum \eta_T$$

e analogamente

$$\sum \sigma_{cs} dA_{cs} = H_s \frac{\sigma_c}{y'} \sum \eta_s$$

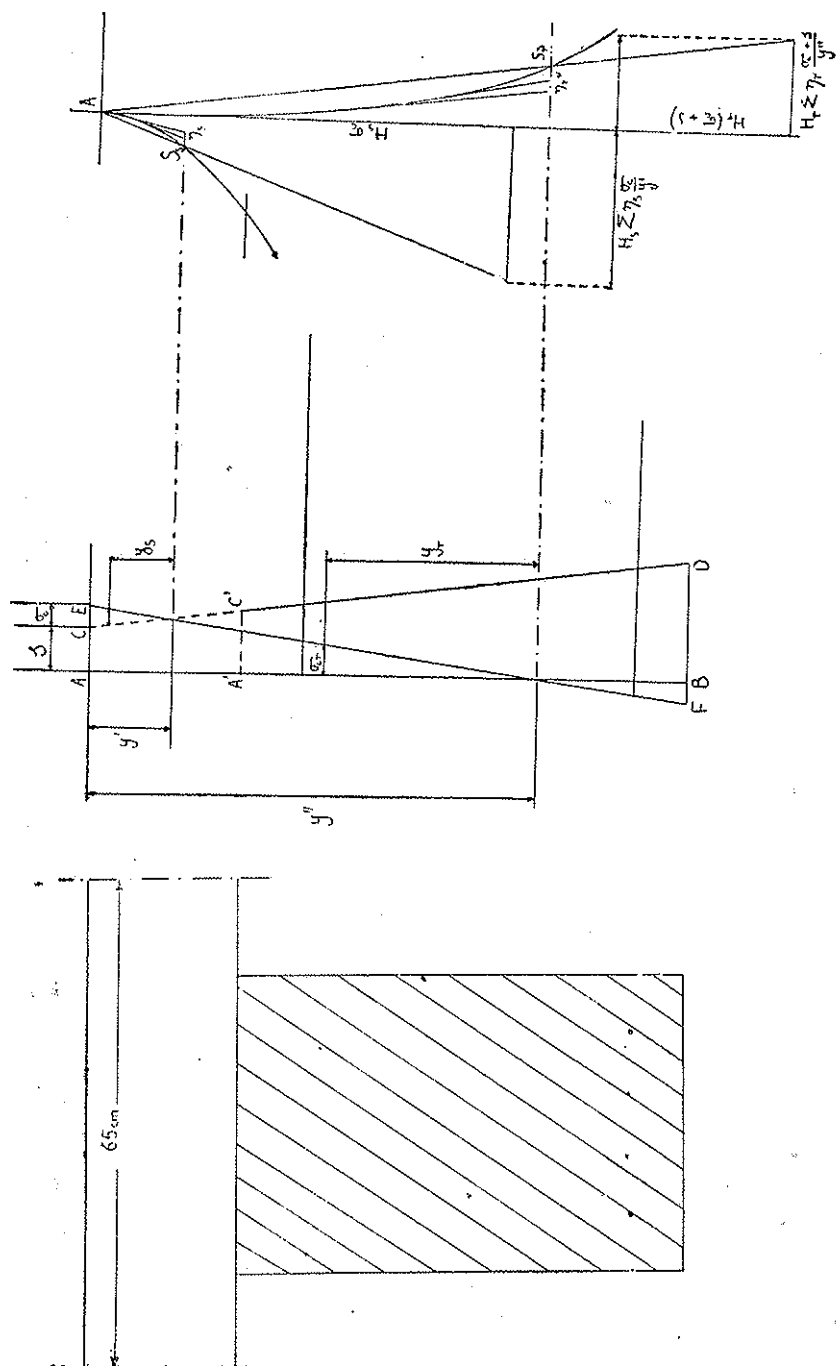
I primi membri di queste due equazioni non sono altro che le intensità risultanti delle compressioni sopportate rispettivamente dalla trave e dalla soletta.

Detta A_m l'area delle armature generiche della trave, se la sollecitazione esterna si riduce ad una coppia si avrà:

$$\sum \sigma_m A_m = H_T \frac{\sigma_c + s}{y''} \sum \eta_T + H_s \frac{\sigma_c}{y'} \sum \sigma_s$$

Graficamente (fig. 9) si potrà riconoscere che un diagramma di tensioni EF corrisponde ad una coppia nel modo seguente. Tracciato il diagramma delle tensioni e determinati gli assi di separazione, all'intersezione del diagramma con i piani di riferimento AB e CD, si congiungeranno i punti S_s , S_T in cui questi assi tagliano i rispettivi poligoni funicolari⁽¹⁾, con il vertice A, incontro dei primi lati dei poligoni funicolari con il bordo superiore della soletta. Le rette AS_s , AS_T determineranno sulle orizzontali di due punti situati rispettivamente alle distanze $H_s \sigma_c$ e $H_T(\sigma_c + s)$ dal vertice A dei segmenti

(¹) A questo punto va notato che il poligono funicolare che collega le aree della soletta deve essere continuato, al di là del bordo inferiore della soletta, dal suo ultimo lato (tangente nel suo punto estremo). Se l'asse di separazione relativo alla soletta viene a trovarsi al disotto del bordo inferiore della soletta (ossia è virtuale), il punto S_s sarà determinato dall'intersezione dell'asse con questa tangente.



che, letti nella scala delle forze, daranno le intensità degli sforzi di compressione sopportati dalla trave e dalla soletta. Se la somma dei due sforzi di compressione sarà eguale a quella degli sforzi di trazione sopportati dalle varie armature, la sollecitazione che determina il diagramma EF sarà effettivamente una coppia. Altrimenti, la differenza delle due risultanti di trazione e di compressione indicherà lo sforzo normale cui il diagramma corrisponde. Sul grafico si disporranno pure di tutti gli elementi per calcolare il momento flettente corrispondente alla sollecitazione.

* * *

Gli studi precedenti consentono di seguire il comportamento delle strutture sotto carichi gradualmente crescenti. Nel calcolo delle costruzioni parzialmente precomprese assume tuttavia una grande importanza la conoscenza del carico di rottura che caratterizza il limite della resistenza a flessione. Naturalmente questo carico limite potrà venir ricercato mediante l'applicazione ripetuta dei metodi d'indagine esposti, sino a trovare che in un punto della sezione venga raggiunto il limite di resistenza del materiale. Ma il procedimento sarebbe assai lungo e poco agevole.

Vogliamo invece mostrare come la ricerca del momento di rottura possa sempre venir fatta rapidamente, e in modo preciso, mediante l'uso dei poligoni funicolari delle aree che abbiamo tracciati in precedenza.

In pratica, non vi sono che due modi per la struttura di raggiungere il suo limite di resistenza per flessione: rottura del calcestruzzo al bordo superiore della soletta, snervamento dell'armatura inferiore della trave.

Si potrà allora fissare arbitrariamente uno di questi due punti come facente parte del diagramma limite. Supponiamo di scegliere il punto per cui le armature raggiungono il carico di rottura. Con il metodo già indicato, sapremo trovare la posizione del diagramma passante per quel punto e che corrisponde ad una coppia.

Questo diagramma sarà effettivamente il diagramma limite se la sollecitazione che esso implica al bordo superiore della soletta sarà inferiore al carico di rottura del calcestruzzo. In caso contrario la ricerca andrà ricominciata prendendo come punto base del diagramma

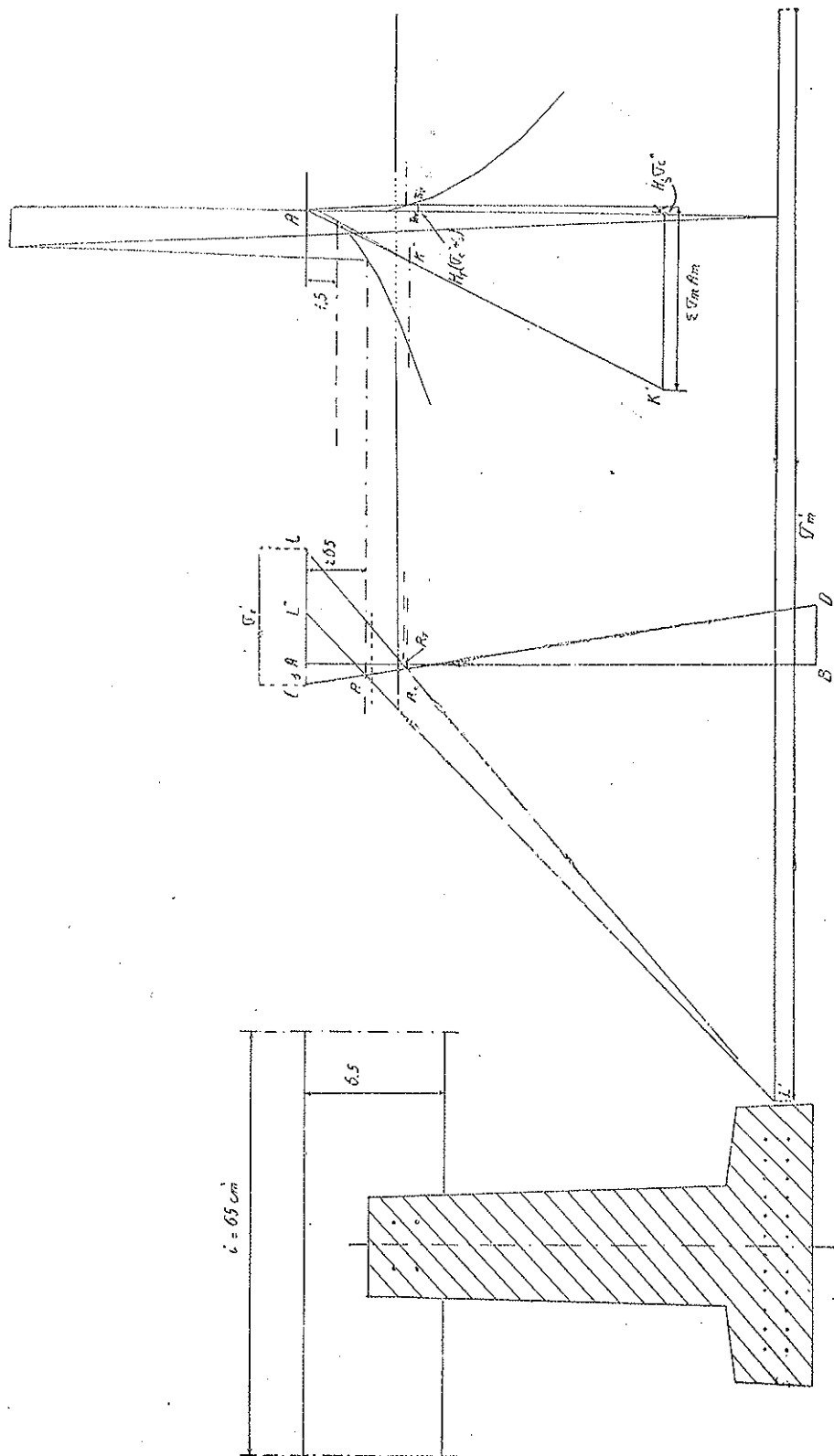
limite precisamente quello che rappresenta una compressione al bordo superiore della soletta eguale al carico di rottura.

La ricerca sarà ancora più spedita quando si possa prevedere a priori il modo di rompersi della struttura: ad esempio mediante l'applicazione di uno dei metodi di indagine svolti per un valore assai elevato del carico esterno. A questo proposito, è anzi interessante osservare come l'uso dei poligoni funicolasi delle aree si presti anche a dare delle utili indicazioni sul proporzionamento delle strutture parzialmente precomprese quando, in applicazione del concetto additato dal Prof. COLONNETTI ⁽¹⁾, si cerchi di far sì che calcestruzzo compresso ed armatura tesa raggiungano insieme il loro limite di resistenza.

Sia ad esempio la struttura composta rappresentata nella Tav. I ⁽²⁾. So ad essa si applica un momento di 345.000 Kg.cm. si trova, col metodo del Prof. COLONNETTI un asse di separazione unico R situato nella soletta a 2,65 cm. dal bordo compresso. Il diagramma di tensione corrispondente $L'L''$ è praticamente il diagramma di rottura poichè esso determina una tensione nel ferro di 20.000 Kg/cm². La struttura cede dunque per rottura dell'armatura quando la zona compressa dispone ancora di un largo margine di resistenza. Supponiamo allora di lasciare, all'atto del proporzionamento, un elemento indeterminato, e precisamente lo spessore della soletta, e cerchiamo di determinare quale spessore bisognerebbe dare alla soletta perchè, ferme restando tutte le altre caratteristiche del solaio, la struttura ceda simultaneamente per rottura del calcestruzzo alla compressione e dei ferri alla trazione. Il diagramma di tensione limite è stato tracciato in LL' sulla Tav. I, e sono stati determinati in conseguenza i due assi di separazione R_T e R_s . Lo sforzo normale sopportato dalla trave è così intieramente determinato in $n_T n_T'$. Poichè la risultante degli sforzi di trazione è egualmente nota, si potrà calcolare, per differenza, lo sforzo

⁽¹⁾ G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese*, Pontificia Academia Scientiarum, «Acta», vol. VI, 1942.

⁽²⁾ Questo esempio è ricavato da: CARLO CESTELLI GUIDI, *Contributo al calcolo del cemento armato precompresso*, «Annali dei Lavori Pubblici», fasc. II, 1942. Caratteristiche della sezione: armatura inferiore 24 \varnothing 2mm.; armatura superiore 4 \varnothing 2mm. Area della sezione di calcestruzzo cmq. 132,8. Rapporto dei moduli 8. Area della sezione metallica cmq. 0,875. Tensione unitaria dei fili al momento del getto (depurata dal probabile calo dovuto al ritiro) t/cmq. 12.



di compressione che dovrà sopportare la soletta. Portiamo allora questo sforzo sull'orizzontale del punto K situato alla distanza $H_s \sigma_c$ dal vertice A, in KK'. La congiungente AK' taglierà l'asse di separazione della soletta in un punto K''. La tangente condotta da K'' al poligono funicolare relativo alla soletta determinerà senz'altro lo spessore di soletta necessario. Nel caso concreto si trova 15 mm. invece dei 65 mm. adottati. Per questo spessore, il valore del momento limite è di 351.600 Kg.cm., leggermente superiore a quello che si aveva per una soletta di 65 mm. L'aumento dello spessore della soletta non aveva dunque in alcun modo aumentato la resistenza alla rottura della struttura.

Evidentemente lo spessore trovato in questo esempio è troppo debole per essere accettabile. Nè lo scopo di questo studio era di giungere ad un risultato pratico. Ci premeva soltanto mettere in evidenza la necessità di proporzionare queste strutture composte studiando in che modo l'insieme degli elementi che le costituiscono si comporti sotto l'azione sollecitazione esterna, sino alla rottura, e non limitandosi ad esaminare separatamente le capacità di resistenza dei singoli elementi nelle prime fasi della resistenza.

CONTRIBUTO ALLA CONOSCENZA
DELLA FAUNA BENTONICA COSTIERA
DEL GOLFO DI NAPOLI (*)

(con una figura)

ENRICO INDELLI

SVMMARIVM. — In ea parte maris Neapolitani, quae est inter Aedes Dominae Annae et forum piscarium ad Mergellinam, invenitur: animalia bentonica prope litus distribui in *facies* scopuli et *facies* litoris; animalium genera inaequali numero per loca distribui (cuius rei causae ignorantur); in fundo maris esse regionem quamdam arenosam, foraminiferorum conchis refertam.

INTRODUZIONE

Uno dei problemi che si propone di risolvere la Stazione Zoologica di Napoli nella ripresa delle sue attività scientifiche, non interrotte ma soltanto rallentate dagli eventi degli ultimi anni, è quello della conoscenza della fauna bentonica del golfo di Napoli.

Il problema è del massimo interesse scientifico e le ricerche devono essere estese, sistematicamente, alle varie zone del golfo in modo da poter avere una chiara conoscenza della distribuzione geografica della fauna bentonica.

Precedenti ricerche furono compiute dal Lo BIANCO (1902) durante la crociera del « Puritan » e dal PARENZAN (1933-1934), ma essi eseguirono tutte pesche di profondità. Perciò ho accettato con piacere

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Marcello Boldrini il 15 aprile 1946.

l'incarico affidatomi dalla Stazione Zoologica di compiere delle ricerche che diano un primo contributo alla conoscenza della fauna bentonica costiera del nostro golfo.

Rivolgo sentiti ringraziamenti al Prof. R. Dohrn, Direttore della Stazione Zoologica di Napoli e al Prof. G. Montalenti, Vice Direttore, per l'ospitalità concessami e per i mezzi di studio e di pesca che hanno messo a mia disposizione. Ringrazio pure il Dott. G. Bacci, che attualmente si occupa di ricerche bentoniche presso la Stazione Zoologica di Napoli, che gentilmente mi ha dato indicazioni e consigli.

METODO

Le ricerche sono state compiute nella zona di mare compresa tra il Palazzo donn'Anna e il Mercato ittico, sito sulla spiaggia del piccolo porto di Mergellina. Questa zona è quella che, fino a pochi anni fa, era conosciuta col nome di *banco dell'Anfosso* per lo straordinario numero di individui di *Branchiostoma lanceolatum* (Pall.) che si rinvenivano sul fondo arenoso, ora assenti forse per sopravvenuti cambiamenti di condizioni ambientali.

I dragaggi sono stati eseguiti con i mezzi forniti dalla Stazione Zoologica: 1°) Gangamella con apertura di 1 m. di diametro alla bocca e con la rete di m. 2,50 di lunghezza; 2°) Draga di zinco con diametro di cm. 25, altezza cm. 70, con fondo forato.

Nelle pescate sia la gangamella che la draga di zinco, erano rimorchiate da una barca a remi per circa 40 metri la prima, per qualche metro la seconda.

I saggi sono stati prelevati a distanze varianti tra 50 e 500 m. dalla costa, con un intervallo di 50 m. tra l'uno e l'altro, come risulta dalla carta su cui sono segnati i punti di pescata.

Il numero dei dragaggi ascende a 30 con la gangamella e a 17 con la draga di zinco, e sono stati eseguiti nel periodo gennaio-luglio 1945.

ANIMALI BENTONICI COSTIERI
RACCOLTI CON LA GANGAMELLA E CON LA DRAGA DI ZINCO

Darò ora un breve cenno delle specie bentoniche che ho ritrovato nell'osservazione dei saggi, facendo notare quelle che sono state più frequenti e più numerose.

PROTOZOI

Foraminiferi. — Le pesche con la draga di zinco sono state eseguite allo scopo di conoscere la natura del fondo e ricercare qualche specie animale.

Osservando infatti, la sabbia dei saggi ho potuto isolare, e poi determinare, i gusci di 17 specie di Foraminiferi.

Fra i più frequenti ed abbondanti debbo ricordare quelli delle famiglie *Miliolidae* e *Nonionidae*.

PORIFERI

Di questo tipo di animali ho ritrovato, abbastanza frequentemente, la *Suberites domuncola* che rivestiva la conchiglia di un Gasteropodo, abitata di solito dal *Paguristes oculatus*.

CELEENTERATI

Antozoi. — Ho rinvenuto spesso l'*Adamsia palliata* e la *Calliactis parasitica* fissate su conchiglie di Gasteropodi in cui aveva stabilito la propria dimora un *Pagurus calidus* o un *Eupagurus prideauxi*.

ANELLIDI

Policheti — Tra i Policheti ho potuto osservare specie erranti e specie sedentarie. Le prime le ho rinvenute tra la sabbia dei saggi presi con la draga di zinco ma sempre in numero di specie e di individui molto esiguo; le seconde tra il materiale di gangamella. Infatti

sono stati notati frequentemente il *Pomatoceros triqueter* e l'*Hydroides uncinata* nei loro tubi incrostati su vecchie conchiglie o su ciottoli, nè si può tacere della *Ranzania sagittaria* che, con gl'innumerevoli tubi ammassati, forma da sola il fondo di alcuni punti della zona esplorata.

MOLLUSCHI

In tutti i saggi ho trovato più o meno abbondantemente dei Molluschi, in prevalenza Gasteropodi e Lamellibranchi.

Gasteropodi. — Fra i Gasteropodi, il primo posto, quantitativamente, spetta al *Vulgocerithium vulgatum*, seguito dal *Murex trunculus* e dalla *Nassa mutabilis*. Per quanto riguarda la prima specie è da notare che essa, in qualche saggio, ha rappresentato da sola il tipo animale.

Lamellibranchi. — Numerosi rappresentanti di questa classe sono stati: *Tapes aureus*, *Venus verrucosa*, *Cerastoderma tuberculatum* e *Laevicardium oblongum*. Di queste specie, quasi tutte eduli, è ricca la zona che viene sfruttata dai pescatori locali.

Cefalopodi. — Rare volte hanno rappresentato la classe l'*Octopus vulgaris*, l'*O. macropus*, la *Sepiola rondeletii* e *Sepia officinalis*.

CROSTACEI

Come i Molluschi, i Crostacei sono molto abbondanti nella zona esplorata; ne ho osservato infatti 24 specie.

Brachiuri. — In primo luogo sono da porsi i Brachiuri che superano i Macruri e gli Anomuri sia per il numero delle specie che per il numero di individui. Vanno ricordati: *Portunus marmoratus*, molto frequente, *Maia verrucosa* e *Inachus dorsettensis*.

Macruri. — Fra i Macruri si nota *Eusicyonia carinata* che si è rinvenuta non raramente.

Anomuri. — I rappresentanti più numerosi di questa classe sono stati: *Diogenes pugilator*, *Pagurus calidus*, *P. arrosor* e *Eupagurus prideauxi*.

ECHINODERMI

Cloturoidi. - Ho rinvenuto pochi esemplari di *Holothuria tubulosa* ed uno di *Phillophorus urna*.

Asteroidi. - Esemplari di *Astropecten bispinosus* e *A. aurantiacus*.

Ofiuroidi. - Qualche esemplare di *Ophioderma longicauda*.

Echinoidi. - Il più frequente rappresentante di questa classe è lo *Psammechinus microtuberculatus*, seguito dallo *Sphaerechinus granularis*.

TUNICATI

Ho rinvenuto alcuni esemplari di *Ascidella aspersa*, *Phallusia mamillata* e *Tethium plicatum*.

TELEOSTEI

Fra i tipici pesci di fondo sono stati qualche volta pescati: *Scorpaena porcus*, *S. schrophæ*, *Uranoscopus scaber*, *Hyppocampus guttulatus*, *Syngnatus acus* e, più frequentemente, *Gobius paganellus*, ma questo non è considerato un vero e proprio pesce bentonico.

ELENCO SISTEMATICO DELLE SPECIE OSSERVATE

Tipo: Protozoi
Classe: Rizopodi
Ordine: Foraminiferi

Fam. MILIOLIDAE

Cornuspira foliacea (Philippi)
Biloculina denticulata (H. B. Brady)
Biloculina globulus Bornemann
Triloculina oblonga (Montagu)
Triloculina circularis Bornemann
Quinqueloculina vulgaris d'Orbigny
Quinqueloculina lamarkiana d'Orbig.
Quinqueloculina bicostata d'Orbigny
Quinqueloculina seminulum (L.)
Spiroloculina excavata d'Orbigny

Fam. PENEROPLIDAE

Peneroplis planatus (Fichtel and Moll)

Fam. OPTHALMIDIIDAE

Vertebrulina striata d'Orbigny

Fam. CAMERINIDAE

Cyclocypeus W. B. Carpenter

Fam. NONIONIDAE

Polistomella crispa L.

Fam. ROTALIIDAE

Discorbina globularis (d'Orbigny)
Planorbulina vulgaris d'Orbigny

Fam. LAGENIDAE

Lagena laevis, forma laevis (Montagu)

Tipo: Poriferi

Sycon raphanus (O. S.)
Axinella crista-galli Maas.

Suberites domuncula Olivi

Tipo: Celenterati

Classe: Antozoi

Ordine: Esacoralli

Actinia equina L.
Adamsia palliata Bohd
Anemonia sulcata Penn.

Calliactis parasitica (Couch.)
Cerianthus membranaceus Gml.
Sagarthia pallida Hold

Tipo: Anellidi

Classe: Chetopodi

Ordine: Policheti

Aphrodite aculeata (L.)
Eulalia viridis (Müller)
Phyllodoce bruneoviridis Saint-Jos.
Perinereis cultrifera (Grube)
Platynereis dumerili (Audouin & Milne-Edwards)
Nephtys hombergi Audouin & Milne-Edwards
Glycera convoluta Keferstein
Diopatra neapolitana (Delle Ghiaie)

Ranzania sagittaria Claparede
Cirratulus tentaculatus Mc Intosh
Stylarioides eruca (Claparede)
Capitella capitata (Fabricius)
Heteromastus filiformis Clp.
Arenicola claparedei Lev.
Pomatoceros triqueter L.
Hydroides uncinata (Philippi)
Hydroides norvegica (Gunnerus)
Spirorbis pagenstecheri Quatrefages

Tipo: Molluschi

Classe: Anfineuri

Chiton olivaceus Spengler

Classe: Gasteropodi

Patella coerulea L.
Calliostoma granulatum L.
Littorina neritoides L.
Turritella communis Risso
Vulgocerithium vulgatum Brug.
Caliptrea chinensis L.
Aporrhais pes-pellecani L.
Natica millepunctata Lam.
Murex brandaris L.
Murex trunculus L.

Tritonalia erinaceus L.
Euthria cornea L.
Pisania d'Orbigny Payraudeau
Nassa mutabilis L.
Fasciolaria lignaria L.
Bullaria striata Brug.
Philina aperta L.
Aplysia depilans L.
Aplysia limacina L.
Pleurobranchaea mackeli Leue

Classe: Scafopodi

Dentalium entalis L.

Classe: Lamellibranchi

Mytilus edulis L.*Chlamys varia* L.*Lima hians* Ch.*Ostrea tarentina* Issel*Ostrea tarentina* var. *plicata* Chemn.*Laevicardium oblongum* Gmel.*Cerastoderma tuberculatum* L.*Venus verrucosa* L.*Tapes aureus* Gmel.

Classe: Cefalopodi

Sepia officinalis L.*Sepiolo rondeletii* Leach*Octopus vulgaris* Lam.*Octopus macropus* Risso

Briozoi

Bugula avicularia (L.)*Schizoporella linearis* Hassal*Schizoporella auriculata* Hassal

Tipo: Artropodi

Classe: Crostacei

Ordine: Cirripedi

Balanus perforatus Brug.

Ordine: Anfipodi

Talorchestia deshayesi (Audouin)

Ordine: Isopodi

Lygia italica Fabr.

Ordine: Decapodi

Sottord.: Macruri

Eusicyonia carinata (Olivi)*Spirontocaris cranchi* (Leach)*Virbius leptocerus* Heller*Leander xiphias* (Risso)*Crangon vulgaris* Fabricius

Sottord: Brachiuri

Munida bamffica (Pennant)*Ethusa mascarone* (Herbst)*Ilia nucleus* (Herbst)*Macropodia longirostris* (Fabricius)*Inachus dorsettensis* (Pennant)*Pisa armata* (Latreille)*Pisa tetraodon* (Pennant)*Maia verrucosa* Milne-Edwards*Lambrus angulifrons* (Latreille)*Lambrus massena* Roux*Carcinus maenas* Leach*Portunus holsatus* Fabricius*Portunus corrugatus* (Pennant)*Portunus depurator* L.*Portunus marmoratus* Leach*Pilumnus hirtellus* (L.)*Eriphia spinifrons* (Herbst)*Pachygrapsus marmoratus* (Fabricius)

Sottord.: Anomuri

<i>Callianassa laticauda</i> Otto	<i>Clibanarius misanthropus</i> (Risso)
<i>Callianassa truncata</i> Giard & Bonnier	<i>Eupagurus excavatus</i> (Herbst)
<i>Paguristes oculatus</i> (Fabricius)	<i>Eupagurus prideauxi</i> (Leach)
<i>Pagurus arrosor</i> (Herbst)	<i>Anapagurus chiracanthus</i> (Lilljeb)
<i>Pagurus calidus</i> Risso	<i>Galathea strigosa</i> (L.)
<i>Diogenes pugilator</i> Roux	

Tipo: Echinodermi

Classe: Oloturoidi

<i>Holothuria tubulosa</i> Gmelin	<i>Phyllophorus urna</i> Grube
-----------------------------------	--------------------------------

Classe: Asteroidi

<i>Astropecten bispinosus</i> Otto	<i>Astropecten aurantiacus</i> L.
------------------------------------	-----------------------------------

Classe: Ofiuroidi

Ophioderma longicauda Linck

Classe: Echinoidi

<i>Arbacia pustulosa</i> Gray	<i>Psammechinus microtuberculatus</i> (Bl.)
<i>Paracentrotus lividus</i> (Lamarck)	<i>Sphaerechinus granularis</i> (Lamarck)

Tipo: Cordati

Sottotipo: Tunicati

Classe: Ascidiozoi

<i>Ascidella aspersa</i> O. F. Müller	<i>Tethium plicatum</i> (Les.)
<i>Phallusia mamillata</i> (Cuv.)	

Sottotipo: Vertebrati

Classe: Pesci

Sottoclasse: Teleostei

<i>Blennius tentacularis</i> Brunn	<i>Scorpaena scropha</i> L.
<i>Gobius paganellus</i> L.	<i>Symphodus ocellatus</i> (Forsk)
<i>Hyppocampus guttulatus</i> Cuv.	<i>Syngnatus acus</i> L.
<i>Lepidogaster bimaculatus</i> (Bonnat)	<i>Uranoscopus scaber</i> L.
<i>Scorpaena porcus</i> L.	

ALCUNE CONSIDERAZIONI GENERALI
E RISULTATI DELLE PESCHE BENTONICHE COSTIERE

Dai dragaggi eseguiti e dalle relative osservazioni risulta che il fondo della zona esplorata è costituito, in alcuni punti, di sabbia più o meno fine che raggiunge un massimo di circa 200 metri dalla costa; a questo fondo sabbioso segue una zona ricca di detriti organici ed inorganici che si estende fino a circa 400 metri dalla costa, mentre più oltre si trova sabbia mista a fango. In altri punti invece, vicino alla costa, esiste una scogliera sommersa alla quale segue un fondo detritico prima e poi melmoso.

La profondità, nei punti di dragaggio, oscilla fra 3 e 35 metri.

La distribuzione qualitativa della fauna bentonica è varia da luogo a luogo e quindi si può stabilire una *facies* relativa al fondo marino, considerando in special modo le forme animali sessili.

Anche la distribuzione quantitativa varia molto da un punto all'altro: ci sono zone molto ricche e zone in cui i rappresentanti della fauna sono ridotti a pochi individui.

Per dare un'idea più chiara di quanto sopra ho detto, ritengo opportuno descrivere le varie *facies* nella loro naturale successione e dividere il fondo esplorato in diverse zone perpendicolari alla costa con una lunghezza di 500 metri (v. carta). Nè potrò astenermi, trattandosi di dragaggi costieri, di dare un cenno della fauna di scogliera e di spiaggia nella zona di marea.

Facies di scogliera: nella zona di marea si rinvencono forme animali che la caratterizzano: *Actinia equina*, *Sagarthia pallida*, *Patella coerulea*, *Mytilus edulis*, *Balanus perforatus*, fra le forme fisse, e *Littorina neritoides*, *Lygia italica*, *Carcinus maenas*, *Eriphia spinifrons*, *Fachygrapsus marmoratus* fra quelle erranti.

A questa zona segue immediatamente la scogliera sommersa costituita da scogli più o meno ricchi di alghe, sui quali vivono: *Arbacia pustulosa*, *Paracentrotus lividus*, *Schizoporella linearis*, *S. auriculata* e *Anemonia sulcata*.

Allontanandoci dalla scogliera sommersa, il fondo si presenta scoglioso-detritico. È questa la zona dove si rinviene il maggior numero

di forme animali sia quantitativamente che qualitativamente. *Sphaerechinus granularis* e *Psammechinus microtuberculatus* rappresentano gli Echinodermi; *Phallusia mamillata*, *Ascidrella aspersa* e *Tethium plicatum* i Tunicati; tra i Molluschi è abbondantissimo *Vulgocerithium vulgatum* e, meno abbondante, *Murex trunculus*; fra i Pesci tipici sono *Scorpaena porcus*, *S. scropha*, e *Blennius tentacularis*; infine tra i Crostacei si nota una gran quantità di *Pagurus* sp. div., *Eupagurus* sp. div., *Maia verrucosa*, *Portunus* sp. div., *Lambrus* sp. div.

Dalla zona a fondo scoglioso-detritica si passa a quella a fondo melmoso caratterizzata dalla presenza di *Turritella communis*, *Dentalium entalis*, *Stylarioides eruca*.

La *facies* descritta è propria delle zone del Palazzo donn'Anna, di Villa Sciarra, della Loggetta di Mergellina e del Mercato ittico.

Facies di spiaggia: nella sabbia della zona di marea vivono: *Arenicola claparedei* e *Talorchestia deshayesei*. Gradualmente poi si passa all'arena litorale dove, ad una profondità media di 5 metri e su un fondo costituito da sabbia fine, si rinvencono: *Cerianthus membranaceus*, *Diopatra neapolitana*, *Nephtys hombergi*, *Capitella capitata*, *Calianassa* sp. div. e gusci di molte specie di Foraminiferi più o meno abbondanti a seconda dei punti.

A questa zona ne segue una molto caratteristica; infatti il fondo di essa è costituito da uno spesso strato dell'anellide tubicolo *Ranzania sagittaria* associata a *Tapes aureus*, *Venus verrucosa*, *Vulgocerithium vulgatum* e *Nassa mutabilis*.

Si passa poi ad una zona il cui fondo è detritico e ricco di *Caulerpa* e *Cystoseira*. Le forme animali che più spesso vi si rinvencono sono Crostacei e Molluschi.

Infine il fondo diviene melmoso e compaiono i rappresentanti tipici: *Turritella communis*, *Dentalium entalis* e *Stylarioides eruca*.

Questa *facies* di spiaggia è delle zone del Bagno Elena, di Villa Guercio, del Circolo « Giovinezza » e del « Sea Garden ».

Da questo breve cenno descrittivo si deduce che sia la *facies* di scogliera che quella di spiaggia presentano una successione di zone con una propria fauna tipica e, soltanto nella zona del fango, vediamo che esse si confondono. Quindi se si prendono in esame le specie animali sessili, si può facilmente vedere che ciascuna zona è caratterizzata da una determinata fauna bentonica e la presenza o meno di altri ani-

mali, soprattutto carnivori in zone diverse, si può spiegare col fatto che essi, per il loro regime di alimentazione, debbono frequentemente spostarsi in cerca di preda.

Circa la presenza di gusci di Foraminiferi nell'arena litorale della *facies* di spiaggia è interessante notare che essi si trovano in numero esiguo in vari punti della zona mentre sono molto numerosi altrove. Al riguardo ho creduto far cosa utile a chi si occupa di questi Protozoi delimitandone, approssimativamente, la zona più ricca. Come si vede nella carta acclusa, essa si estende da una distanza di 50 metri dalla costa fino a 150 metri circa ed è compresa nelle zone di Villa Guercio e del Circolo « Giovinezza ». I Foraminiferi sono rappresentati principalmente dai generi *Polistomella*, *Peneroplis*, *Triloculina* e *Quinqueloculina*.

Un fatto che è emerso dall'osservazione dei saggi e che mi pare abbastanza importante è questo: man mano che dal Palazzo donn'Anna ci avviciniamo all'imbocco del Porto di Mergellina, la fauna bentonica va scemando per quantità.

Quali saranno le cause che determinano una ineguale distribuzione della vita animale in una zona così ristretta? Certamente diverse ma, per rispondere con precisione a questa domanda, occorreranno ulteriori e sistematiche ricerche che facciano conoscere se in questa zona si hanno successioni di *facies bentoniche* che PARENZAN (1934) ha osservato in altri punti del Golfo o se la differente distribuzione quantitativa è dovuta a cause fisiche e biologiche tali che non permettono la diffusione di talune forme bentoniche verso l'entrata del Porto di Mergellina.

Pur non escludendo la causa delle successioni delle *facies bentoniche*, io credo che una notevole influenza esercitano le condizioni ambientali della zona compresa tra il Circolo « Giovinezza » ed il Mercato ittico, diverse da quelle della zona del Palazzo donn'Anna, per il fatto che nella prima sboccano delle fogne. Evidentemente queste fogne versano in mare del materiale che inquina l'acqua circostante, ne fa diminuire la densità e la salsedine, cioè altera le caratteristiche condizioni dell'ambiente per cui la fauna forse migra nelle zone vicine.

Infine dirò brevemente sulla variazione stagionale quantitativa e qualitativa della fauna bentonica costiera.

Mentre la maggior parte delle specie osservate si mostra stazionaria per la quantità di individui nelle diverse stagioni, alcune specie presentano un massimo ed un minimo. Riferendomi al periodo gennaio-luglio in cui ho compiuto le ricerche, si nota:

1°) tra i Crostacei: *Maia verrucosa* si mostra frequente nell'inverno e in primavera, e non compare affatto nei saggi estivi; *Portunus marmoratus*, che manca nei saggi invernali, appare in quelli primaverili raggiungendo un massimo a metà primavera e diminuendo in estate.

2°) tra i Molluschi: *Nassa mutabilis* è abbondantissima in inverno e fino al principio della primavera, diminuendo di numero man mano che ci avviciniamo all'estate; *Murex trunculus*, non troppo abbondante in inverno, ha un massimo a metà primavera.

Si noti che il massimo raggiunto dalle singole specie coincide col periodo della riproduzione.

Tanto per confermare qualche osservazione del Lo BIANCO dirò che ho osservato individui di *Portunus depurator*, *P. holsatus*, *Inachus dorsettensis* e *Pagurus calidus* con uova mature nel periodo indicato dal citato autore (v. Bibliografia).

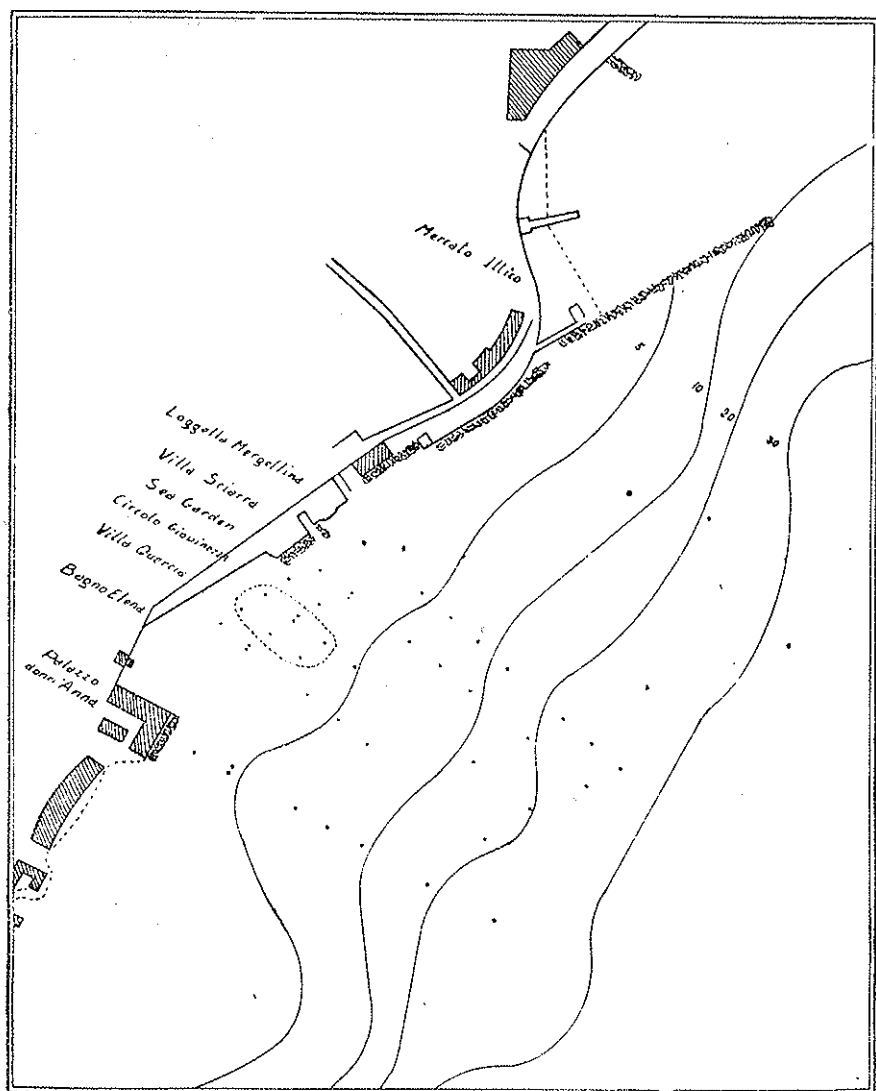
CONCLUSIONI

Dalle ricerche da me compiute sulla fauna bentonica costiera del Golfo di Napoli, limitatamente alla zona compresa tra il Palazzo donn'Anna ed il Mercato ittico di Mergellina, si possono trarre le seguenti conclusioni:

1°) La zona, in generale è molto povera di specie animali che sono relativamente abbondanti soltanto in una fascia perpendicolare alla costa (zona del Palazzo donn'Anna).

2°) Il fondo esplorato presenta una zona sabbiosa ricca di gusci di Foraminiferi ben delimitata (v. Carta).

3°) Le specie mostrano una ineguale distribuzione geografica quantitativa le cui cause non sono ben note, mentre qualitativamente sono equamente distribuite. Le mie ricerche però hanno dimostrato che la fauna bentonica costiera è più ricca nelle acque pure che in quelle inquinate.



4°) Esiste una variazione stagionale della fauna bentonica costiera sia dal punto di vista quantitativo che da quello qualitativo.

Per quanto riguarda la povertà della fauna bentonica nella zona esplorata, essa è da attribuirsi, secondo me, principalmente al fatto che detta zona è continuamente frequentata dai « rastrellari » che, per raccogliere i Lamellibranchi eduli che sono abbondanti, scavano il fondo, sconvolgendolo e costringendo, forse, così molti animali a cambiar sede.

BIBLIOGRAFIA

- ANDRES A., *Le Attinie*. Vol. I, Leipzig, in «Fauna und Flora des Golfes von Neapel», 1884.
- BOUVIER E. L., *Crustacés décapodes (Pénéides) provenant des Campagnes de l'Hirondinelle et de la Princesse Alice*. In «Result. Camp. Scient. Prince de Monaco», fasc. 33, Monaco, 1908.
- BUCHNER P., *Die Lagenen des Golfes von Neapel und der marinen Ablagerungen auf Ischia*. «Nova Acta Leopoldina», Neue Folge, Bd. 9, Nr. 62, 1940.
- *Die Lingulinen des Golfes von Neapel und der marinen Ablagerungen auf Ischia*. «Nova Acta Leopoldina», Neue Folge, Bd. 11, Nr. 75, 1942.
- CARPENTER W. B., *Introduction to the study of the foraminifera*. London, 1862.
- COSTA O. G., *Fauna del Regno di Napoli*. Napoli, 1853.
- CUSHMANN J. A., *A monograph of the Foraminifera of the north Pacific Ocean*. Part. VI, *Miliolidae*. «U. St. Nat. Mus. Bull. 71», 1917.
- *The Foraminifera of the Atlantic Ocean*. Part. 6, *Miliolidae, Ophthalmitidae and Fischerinidae*. «U. St. Nat. Mus. Bull. 104», 1929.
- *The Foraminifera of the Atlantic Ocean*. Part. 7, *Nonionidae, Camerinidae, Peneroplidae and Alveolinellidae*. «U. St. Nat. Mus. Bull. 104», 1930.
- FAUVEL P., *Faune de France*. 5: *Polychètes errantes*. Paris, 1923.
- *Faune de France*. 16: *Polychètes sédentaires*. Paris, 1927.
- HOFFMANN H., *Opisthobranchia* in BRONNS H. G., *Klassen und Ordnungen des Tierreichs*, 3 Bd.: *Mollusca*, II Abt.: *Gastropoda*, 3 Buch: *Opisthobranchia*, Teil I. «Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H.», Leipzig, 1939.
- ISSEL R., *Biologia marina*. Hoepli, Milano, 1918.
- KOBELT W., *Illustriertes Conchylienbuch*. Nürnberg, 1878.
- KOBELT W., *Iconographie der schalentragenden europäischen Meeresconchylien*. I Bd., Cassel, 1887.

- LO BIANCO S., *Le pesche abissali eseguite da F. A. Krupp col Yacht Puritan nelle adiacenze di Capri e in altre località del Mediterraneo*. « Mitt. Zool. Stat. Neapel », 16 Bd., 1903.
- *Notizie biologiche riguardanti specialmente il periodo di maturità sessuale degli animali del Golfo di Napoli*. « Mitt. Zool. Stat. Neapel », 19 Bd., 1909.
- MC INTOSH W. C., *A Monograph of the British Marine Anellids-Polichaeta*. Vol. II, III, IV, « Ray Society », 1908-1922.
- MILNE-EDWARDS A. e BOUVIER E. L., *Expedition Scientifiques du Travailleur et du Talisman. Crustacés décapodes, Première partie: Brachyures et Anomures*. Paris, 1900.
- MOREAU E., *Histoire Naturelle des Poissons de la France*. Tome II, III, 1881.
- NOBRE A., *Crustacés Decapodes et Stomatopodes marinhos de Portugal*. Porto, 1931.
- PARENZAN P., *Ricerche sulla biocenosi del Golfo di Napoli*. « Atti Soc. It. Progr. Scienze ». vol. III, 1933.
- *Rotazione biologica naturale*. « Boll. Zool. It. », a. v, n. 4, 1934.
- PESTA O., *Die Decapodenfauna der Adria*. Leipzig und Wien, 1918.
- RANZI S., *La distribuzione della vita nel Golfo di Napoli*. « Atti I Congr. geogr. ital. », vol. 2, 1930.
- ROUX P., *Crustacés de la Méditerranée et de son littoral*. Paris 1828.
- SALFI M., *Gli Ascidiacei del Golfo di Napoli*. « Pubbl. Staz. Zool. », Napoli, vol. XI, fasc. 3, 1931.
- THIELE J., *Handbuch der Systematischen Weichtierkunde*. Erster Bd. Jena, 1931.
- *Handbuch der Systematischen Weichtierkunde*. Zweiter Bd. Jena, 1935.

SULL'ISTOGENESI DELLE FIBRE MUSCOLARI DEGLI ARTI(*)

FRANCESCO SALVIUCCI

SYMMARIUM. — *Auctor planum facit musculorum fibras in artubus oriri ex textura quadam mesenchimatica non discriminata, quae ad cutis laminam, quae est in somitis latere, pertinet; non ex elementis iam discriminatis, quae proveniant, sub myoblastorum specie, a musculorum lamina quae est in ipso somitis latere.*

Le cellule formatrici delle fibre muscolari striate sono, come è noto, indicate col nome di mioblasti. Si ammette generalmente che esse abbiano origine dai somiti e precisamente dalle cellule dello strato profondo (lamina muscolare) della parte laterale del somite stesso; le cellule in questione aumentano in altezza, e presentano un abbondante citoplasma. Secondo gli studi di GODLEWSKI ed ASAI esse non darebbero origine direttamente al tessuto muscolare striato, ma formerebbero dapprima una rete cellulare che costituirebbe il tessuto mioblastico propriamente detto, dal quale poi, per successive trasformazioni, deriverebbero le fibre muscolari striate. In ogni modo, qualunque sia il meccanismo, secondo l'opinione più diffusa, questi elementi darebbero luogo alla formazione sia della muscolatura del tronco, sia di quella degli arti, perchè una parte di dette cellule penetrerebbe nell'abbozzo delle estremità superiori ed inferiori.

Ora, mentre per la muscolatura del tronco la teoria della derivazione dello strato profondo, o lamina muscolare, della parte laterale dei somiti non ha incontrato difficoltà, sono state invece mosse alcune obiezioni

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Dante De Biasi il 19 ottobre 1946.

(SCHMIDT) circa la medesima origine della muscolatura degli arti, in quanto nell'abbozzo di questi ultimi sarebbe stato riscontrato soltanto del tessuto mesenchimatico, proveniente cioè dallo strato superficiale, o lamina cutanea, della parte laterale del somite stesso e non da elementi dello strato profondo.

Io ho studiato ⁽¹⁾ alcune serie di embrioni umani e di cavia per esaminare la struttura dei primitivi abbozzi degli arti allo scopo di illustrare meglio la prima origine dei muscoli delle estremità. Gli embrioni umani da me studiati avevano la lunghezza vertico-coccigea di mm. 4, 8, 15, 24, 30, 40, mentre quelli di cavia avevano la lunghezza di mm. 10 e 15.

L'abbozzo primitivo degli arti appare come un'estroffessione, che va sempre più accentuandosi, formata superficialmente dall'ectoderma e internamente da elementi mesenchimatici provenienti dalla lamina cutanea del somite, fra i quali pertanto non si osserva alcuna penetrazione di elementi appartenenti alla lamina muscolare dei somiti stessi. In un primo tempo quindi gli elementi che costituiscono il primitivo abbozzo degli arti sono rappresentati all'esterno dall'ectoderma e all'interno da elementi mesenchimatici, i quali ultimi posseggono un nucleo rotondo e sono pressochè eguali fra loro, in modo da formare un complesso cellulare omogeneo, nel quale non si nota alcuna differenziazione. Successivamente si forma un addensamento mesenchimatico in corrispondenza della zona dove si svilupperanno i segmenti scheletrici delle estremità; si costituiscono così i blastemi precartilaginei cui farà seguito l'abbozzo dei segmenti stessi. Attorno ad essi, per un certo tempo, rimane il residuo tessuto mesenchimatico ancora indifferenziato, ma in un periodo ulteriore appaiono i primi segni di un differenziamento di alcuni gruppi cellulari verso forme che rappresentano i primi stadi della istogenesi delle fibre muscolari. Attorno ai detti blastemi precartilaginei si dispone cioè uno strato di mesenchima il quale è più spesso di quello che resta all'esterno; dagli elementi più profondi di questo strato di mesenchima denso, si forma il pericondrio e successivamente il periostio con i tessuti periarticolari; dagli elementi meno profondi

(1) Le presenti ricerche sono state eseguite sotto la guida del prof. Giacomo Andreassi nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia dell'Istituto di Anatomia Umana Normale dell'Università di Roma.

del medesimo strato hanno origine invece alcune cellule che assumono ben presto i caratteri di mioblasti, costituendo un tessuto, il quale, in un primo tempo, si presenta senza forma definita, ma successivamente si divide in vari gruppi, dando luogo ai diversi complessi muscolari, e quindi ai singoli muscoli. La differenziazione del mesenchima in tessuto mioblastico avviene gradualmente. Le cellule mesenchimatiche assumono dapprima un aspetto granuloso, successivamente si allungano, diventando fusiformi, ed infine appaiono in esse le prime miofibrille.

Dall'esame dei preparati risulta che la successiva formazione delle parti connettivali dei muscoli (perimisio, endomisio, ecc.) abbia luogo per opera di alcuni elementi mesenchimatici, che rimangono in un primo tempo indifferenziati, tra le fibre muscolari in via di evoluzione e non per una penetrazione di elementi connettivali nell'interno del tessuto mioblastico già formato, a differenza di quanto alcuni Autori hanno sostenuto. Infine nei segmenti di origine e di terminazione del muscolo gli elementi mesenchimatici danno luogo alla formazione del tessuto fibroso caratteristico del tendine.

Non ho potuto osservare alcun fenomeno di degenerazione a carico delle primitive fibre muscolari, come è invece ammesso da parecchi Autori, fra i quali GODLEWSKI, ma è opportuno ricordare al riguardo che i miei preparati si riferiscono ad embrioni in uno stato relativamente precoce dello sviluppo, mentre l'accennata degenerazione suole verificarsi alquanto più tardi.

I primi complessi muscolari formati si arricchiscono in seguito di nuovi elementi, i quali provengono dal mesenchima circostante, evolvendo secondo il medesimo processo. Dalle mie osservazioni risulta che i mioblasti aumentano di volume per un accrescimento che si estrinseca specialmente nel senso della lunghezza, unendosi reciprocamente per le estremità in maniera da costituire le fibre muscolari striate, che risultano pertanto di origine pluricellulare. Circa i fenomeni di cariocinesi che si osservano nei nuclei, è difficile stabilire con precisione se la divisione nucleare preceda l'unione degli elementi, ovvero se le divisioni avvengano dopo la formazione di un sincizio.

Nei riguardi dell'interpretazione da dare a questi reperti ricordo che qualche ricercatore sostiene che le cellule della lamina muscolare dei somiti si differenziano, come è stato già detto, in mioblasti e for-

mano dei complessi, i quali, successivamente, assumono l'aspetto di un mesenchima, una parte del quale penetra negli abbozzi degli arti, dando luogo alla muscolatura di questi ultimi. Per quanto l'esame dei miei preparati non confermi questo modo di vedere, poichè il mesenchima degli arti appare provenire dalla lamina cutanea del somite, ed è costituito da un tessuto omogeneo, in seno al quale non si notano in un primo momento differenziazioni di gruppi cellulari particolari, tuttavia — malgrado, ripeto, tali constatazioni — non si può escludere in maniera assolutamente sicura che alcuni elementi della lamina muscolare dei somiti, dopo avere assunto un aspetto mesenchimatico, penetrino in un secondo tempo nell'abbozzo degli arti stessi.

Comunque, indipendentemente dalla loro derivazione, è da rilevare che gli elementi costituenti in un primo tempo l'abbozzo degli arti, con l'esclusione di quelli dello strato ectodermico periferico, formano un tessuto omogeneo con elementi eguali, e con le caratteristiche di un mesenchima. Le primissime fasi della formazione delle fibre muscolari striate si svolgono a carico dei suddetti elementi di aspetto mesenchimatico; è pertanto da escludere che elementi della lamina muscolare dei somiti differenziati in mioblasti prendano parte come tali alla istogenesi delle fibre muscolari striate degli arti. Se si dovesse ammettere, per quanto, come ho già detto, con difficoltà, che alcuni elementi della detta lamina muscolare penetrino realmente nell'abbozzo delle estremità, tale penetrazione dovrebbe necessariamente avvenire sotto forma di cellule di aspetto mesenchimatico e di apparenza eguale a quella degli altri elementi mesenchimatici dell'abbozzo stesso.

A questo proposito è opportuno inoltre rilevare che l'origine delle fibre muscolari striate da parte di elementi mesenchimatici dimostra un'affinità del tessuto muscolare striato con quello liscio, che deriva anch'esso dal mesenchima, e dimostra altresì l'affinità di entrambe queste forme di tessuto muscolare con i tessuti connettivi, essendo tutti derivati mesenchimatici.

A conclusione di questa nota si può affermare quindi che negli abbozzi degli arti non penetrano elementi differenziati in mioblasti provenienti dalla lamina muscolare dei somiti, poichè nei detti abbozzi vi è originariamente un tessuto mesenchimatico omogeneo, il quale sembra provenire dalla lamina cutanea del somite; se tuttavia si do-

vesse verificare in qualche maniera una penetrazione di elementi da parte della lamina muscolare dei somiti, questa dovrebbe avvenire esclusivamente sotto forma di elementi di aspetto mesenchimatico. Le fibre muscolari degli arti derivano pertanto da un tessuto mesenchimatico presente negli abbozzi stessi il quale dà origine, oltre che ad altre formazioni, quali per esempio lo scheletro e i suoi annessi (pericondrio, periostio, ecc.), anche alle parti connettivali che entrano nella costituzione dei muscoli.

BIBLIOGRAFIA

- ANDREASSI G., *Sulla forma e sulle connessioni reciproche delle fibrocellule muscolari lisce*. « Pontificia Academia Scientiarum, Acta », Vol. IX, n. 24.
- *Processi istogenetici e caratteristiche istologiche delle fibrocellule muscolari lisce*. « Ric. di Morf. », Vol. XXII.
- ASAI T., *Beiträge zur Histologie und Histogenese der quergestreiften Muskulatur der Säugetiere*. « Arch. mikrosk. Anat. », I, 86 (1915).
- GODLEWSKI E., (a) *Über die Entwicklung des quergestreiften muskulösen Gewebes*, « Bull. Acad. Sci. Cracovie Cl. d. sc. math. et natur. », März 1901, 146-158;
(b) *Die Entwicklung des Skelet-und Herzmuskelgewebes der Säugetiere*. « Arch. mikrosk. Anat. », 60, 111-156 (1902).
- SCHMIDT V., *Die Histogenese der quergestreiften Muskulatur und des Muskel-sehnenüberganges*. « Z. mikrosk-Anat. », Forschung 8, 976-184 (1926).
- WASSERMANN F., *Wachstum und Vermehrung der lebendigen Masse, 1929*. In « Möllendorff, Handbuch der mikroskopischen Anatomie des Menschen ».

INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE DELLE ONDE SFERICHE SMORZATE E FORZATE COL CALCOLO OPERATORIO^(*)

PIERO CALDIROLA e PIETRO SILLANO

SVMMARIVM. — Ostendunt Auctores quo modo aequatio differentialis

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta_2 U - kU = X,$$

si opportune condiciones in exordio et in ambitu statuuntur, integrari possit per calculum qui vocatur operatorialis, secundum expressionem a Doetsch datam, quae innititur proprietatibus transformatae Laplacianae. Hac ratione sine magna difficultate eadem solutionis formula obtinetur, quae antea a TONOLO, per integrandi rationem a VOLTERRA et TEDONE inventam, constituta est. Formula solutionis deinde applicatur ad peculiare quosdam casus, qui summo opere physicorum intersunt.

Nella fisica matematica interesse notevole presenta l'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$[1] \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta_2 U - kU = X \quad \left(\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

detta delle onde sferiche smorzate e forzate, la quale fra l'altro contiene come casi particolari l'equazione dei potenziali elettromagnetici ritardati ($k=0$) e quella del campo mesonico ($k=-\chi^2$ con χ reale) che si incontra nelle odierno teorie delle forze nucleari.

L'integrazione della [1] è stata eseguita dal TONOLO⁽¹⁾ seguendo il metodo di VOLTERRA-TEDONE. Se σ è una superficie chiusa che limita una porzione S dello spazio ordinario e se U è una soluzione regolare della [1], la formula finale a cui arriva il TONOLO assegna i valori di U nei punti interni di S e per qualsiasi valore del tempo t in

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 7 agosto 1946.

(1) TONOLO, *Integrazione dell'equazione delle onde sferiche smorzate e forzate*, « Rend. Semin. Mat. Univ. Padova », IV, 1933.

funzione dei valori che U e la sua derivata rispetto al tempo assumono all'istante iniziale nello spazio S , e dei valori che U e la sua derivata normale prendono in ogni istante di tempo nei punti della superficie σ . La formula risolutiva in discorso è precisamente la seguente:

$$4\pi U(x_1, y_1, z_1, t_1) = k \int_S \left[U \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{I_1(\rho)}{\rho} - \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{dU}{dn} \right]_{t_0} dS + \\ + k \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \left[U \frac{d}{dn} \left(\frac{I_1(\rho)}{\rho} \right) - \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{dU}{dn} \right] dt - \frac{k}{2} \int_{\sigma} U(t_1-r) \frac{dr}{dn} d\sigma - \\ - \int_{\sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \right]_{t_1-r} d\sigma + k \int_S dS \int_{t_0}^{t_1-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} X dt + \int_S \frac{X(t_1-r)}{r} dS$$

dove si è posto:

$$\rho = \sqrt{k} \sqrt{(t_1-t)^2 - r^2}$$

e dove $I_1(\rho)$ rappresenta la funzione di Bessel non oscillante di ordine uno.

Ci proponiamo in questa nota di mostrare come si possa arrivare con relativa facilità all'integrale [2] di TONOLO facendo uso del calcolo operatorio. Il metodo seguito è quello di DOETSCH⁽²⁾ il quale fa uso sistematico della trasformazione di Laplace la cui importanza nel calcolo operatorio fu però indicata molto prima da GIORGI nei suoi fondamentali lavori⁽³⁾.

Riassumiamo in breve il procedimento seguito poichè esso si scosta alcun poco dal metodo di DOETSCH.

⁽²⁾ DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*. Springer, Berlin, 1937.

⁽³⁾ Oltre che nei lavori fondamentali: *Il metodo simbolico nello studio delle correnti variabili*. «Atti Ass. Elett. Ital.», 1904; *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate nei problemi di elettrodinamica*. «Atti Ass. Elett. Ital.», 1905, l'argomento è discusso più a fondo specie per quanto riguarda i fondamenti matematici, nel corso del Prof. GIORGI, *Fisica Matematica* (Dispense litografate), Roma, 1928.

1. INTEGRAZIONE DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE COL METODO DI DOETSCH. - La trasformazione di Laplace:

$$[3] \quad f(p) = L[F(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt ,$$

le cui proprietà sono ben note, può essere pensata come una trasformazione funzionale che ad una certa funzione $F(t)$ (che chiameremo brevemente funzione L) fa corrispondere un'altra funzione $f(p)$ (che chiameremo brevemente funzione l). Ricorrendo alla nozione più generale di spazio funzionale la trasformazione di Laplace può essere interpretata come una trasformazione che allo spazio funzionale delle funzioni L nella variabile reale t (spazio Λ) faccia corrispondere lo spazio delle funzioni l (spazio λ) nella variabile complessa p . Essa viene impiegata per la soluzione, per via indiretta, di numerosi problemi secondo lo schema seguente:

a) Dato un problema (Problema 1°) nella variabile reale t (ed in eventuali altre variabili o parametri) esso può essere pensato come una relazione fra funzioni L , nello spazio funzionale Λ . Applicando ai legami analitici che esprimono il problema 1° la trasformazione di Laplace si ottiene un nuovo legame fra funzioni della variabile complessa p (e delle rimanenti altre variabili o parametri che in generale permangono) e che può essere interpretato come un problema fra funzioni l nello spazio λ (Problema 2°);

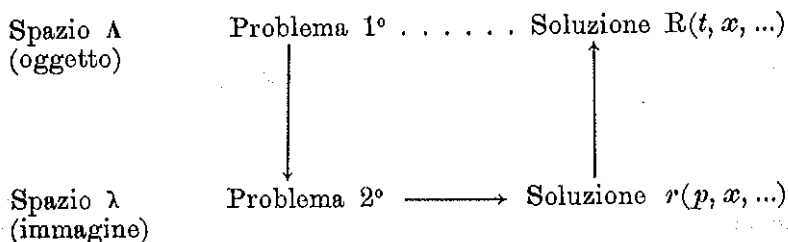
b) Si risolve il problema 2° ottenendo per soluzione una funzione risolvente $r(p)$ che è ancora una funzione l ;

c) A mezzo della trasformazione inversa di quella di Laplace:

$$[3'] \quad L^{-1}[r(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} r(p) dp = R(t)$$

si ritorna nello spazio L ottenendo la corrispondente $R(t)$ della funzione $r(p)$. La $R(t)$ in molti casi (cioè quando sono verificate opportune condizioni) è la risolvente del problema originale 1°.

Il procedimento può essere sintetizzato nello schema seguente:



e può essere applicato con successo alla soluzione di numerosi problemi in quanto il « problema 2° » è in generale più semplice del « problema 1° ».

Nel caso delle equazioni alle derivate parziali, che ci interessa, l'applicazione è senz'altro vantaggiosa perchè la trasformazione di Laplace riduce di uno il numero delle variabili e trasforma il problema 1°, con condizioni iniziali e al contorno, in un problema 2° con sole condizioni al contorno, e quindi più semplice.

Nel caso particolare dell'equazione [1] per l'applicabilità del metodo si richiede:

- che le funzioni $U, \frac{dU}{dn}, \frac{\partial U}{\partial t}$, ecc. siano tali che l'integrale [2] converga per $t > 0$ (cioè, come suol dirsi, che esse siano funzioni L);
- che le funzioni trasformate siano tali per cui gli integrali che compaiono nella soluzione della equazione corrispondente nel problema 2° convergano per $t > 0$ (e cioè siano funzioni ℓ);
- che tutte le funzioni siano tali per cui le trasformazioni L e L^{-1} risultino commutabili con Δ_2 , con $\frac{d}{dn}$, con le integrazioni eseguite nelle variabili spaziali, e con l'operazione di passaggio al limite per $P \rightarrow P_\sigma$ (indicando con $P = P(x, y, z)$ un punto generico di S e con P_σ un punto del contorno σ).

È interessante notare come i metodi del calcolo operatorio ordinario si presentino come un caso particolare del metodo suesposto. Ad esempio, se, nell'equazione in oggetto, le condizioni iniziali fossero nulle l'equazione ℓ corrispondente all'equazione data è la stessa che

si scriverebbe colle note regole e sarebbe risolubile coi classici metodi operatori ⁽⁴⁾.

In pratica il procedimento da noi seguito nell'integrazione della [1] si sposta lievemente da quello del DOWTSCH nel senso che, nell'applicare la trasformazione L^{-1} , ci si è giovati di integrali già eseguiti — cioè di operatori già valutati — combinandoli con le regole dell'ordinario calcolo operatorio che, in sostanza, interpretano le proprietà della trasformazione L^{-1} ⁽⁵⁾, ⁽⁶⁾.

⁽⁴⁾ Come es. di applicazione del calcolo operatorio ordinario all'integrazione di equazioni differenziali alle derivate parziali in uno spazio a più dimensioni si veda:

D. GRAFFI, *Sulla dimostrazione della formula dei potenziali ritardati col metodo degli operatori funzionali*, « Rend. R. Acc. Lincei », IX, pag. 997, 1929; P. CALDIROLA, *Integrazione delle equazioni del campo mesonico*, « La Ric. Scient. », XIII, pag. 195, 1942.

⁽⁵⁾ È noto come la valutazione di un operatore $f(p)$ possa portare a due funzioni: « Funzione generatrice » $G(t)$ e « Funzione caratteristica » $H(t)$ secondo che l'operatore si immagina applicato all'impulso unitario $f_u(t)$ o alla funzione unitaria $1(t)$. La definizione matematica di queste due funzioni è:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(p) e^{pt} dp = L^{-1}[f(p)] = \frac{\partial}{\partial t} H(t)$$

$$H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{f(p)}{p} e^{pt} dp = L^{-1}\left[\frac{f(p)}{p}\right] = \int_0^t G(t) dt$$

(tenute presenti alcune restrizioni)

In molti trattati di « Calcolo operatorio » vengono date le funzioni H e G per gli operatori più comuni e delle regole per dedurre le H e G di operatori che non si trovano sulle tavole di quelli noti. La formula [*] alla nota ⁽⁶⁾ del § 8 è appunto una di queste. Tavole di operatori valutati si trovano nei trattati:

CARSON, *Electric circuit theory and operational Calculus*, Mc Graw Hill, New York, 1928; BUSCH, *Operation circuit analysis*, Jon Wyhley, New York, 1929; MC LAHLAN, *Complex variable and operational Calculus*, Cambridge, 1935 e nelle altre pubblicazioni speciali: ANGELINI, *Calcolo operatorio e studio dei circuiti elettrici in regime transitorio*, Monografia da l'« Elettrotecnica », Milano, 1935; CAMPBELL, *Fourier integral for practical applications*, « B. S. T. J. », ottobre 1928; MC LAHLAN-HUMBERT, *Formulaires pour le Calcul symbolique de Heaviside* (1939), che contengono ciascuno diverse centinaia di formule, nonché il trattato del DOWTSCH [loc. cit. ⁽³⁾] il quale dà una tavola di trasformazioni di Laplace che naturalmente può essere usata in senso inverso per la valutazione degli operatori.

⁽⁶⁾ L'inversione della trasformazione di Laplace fatta con questo metodo porta la necessità di maneggiare anche funzioni improprie (impulsi, ecc.). L'uso di queste funzioni potrebbe però anche essere evitato ricorrendo per es. ad ar-

2. TRASFORMAZIONE DEL PROBLEMA 1° NEL PROBLEMA 2°. — Per quanto detto nel paragrafo precedente, il problema 1° consiste nell'integrazione dell'equazione differenziale [1]:

$$[1] \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta_2 U - kU = X(P, t)$$

assegnate le condizioni (iniziali e al contorno):

$$[4] \quad \begin{cases} [U(P, t)]_{t=0} = \varphi(P) & \left[\frac{\partial U(P, t)}{\partial t} \right]_{t=0} = \psi(P) \\ [U(P, t)]_{\sigma} = F(P_{\sigma}, t) & \left[\frac{\partial U}{\partial n} \right]_{\sigma} = G(P_{\sigma}, t) \end{cases}$$

Applicando la trasformazione di Laplace la [1] si trasforma nella^(?):

$$[4] \quad \Delta_2 u - (p^2 - k)u = -(x + p\varphi + \psi)$$

con le condizioni al solo contorno:

$$[4'] \quad [u(P, p)]_{\sigma} = f(P_{\sigma}, p) \quad \left[-\frac{du(P, p)}{dn} \right]_{\sigma} = g(P_{\sigma}, p)$$

tifici del tipo di quelli da noi impiegato (vedi § 3A) per valutare l'operatore $L^{-1} \left[f \frac{d}{dn} e^{-ar} \right]$; però, dove possibile senza oltrepassare i limiti dell'accettabilità, tale uso è stato conservato perchè molto rapido e caratteristico del metodo operatorio. Ad ogni modo una discussione sulla legittimità e convenienza dell'introduzione e del maneggio delle funzioni «improprie» nonchè dei limiti di validità del loro calcolo si trova, per es., in: GIORGI, *Fisica Matematica* (Disp. litogr.), Roma 1928 (già cit.). D'altronde l'uso della funzione impropria detta da GIORGI funzione impulsiva è diventato consueto anche in altri rami della fisica teorica odierna, dove tale funzione è nota sotto il nome di funzione di Dirac.

(?) Si ricordi la formula che dà la trasformata della derivata di una funzione:

$$[*] \quad L[F^{(n)}(t)] = p^n L[F(t)] - F(0)p^{n-1} - F'(0)p^{n-2} - \dots - F^{(n-1)}(0)$$

dove:

$$F^{(n)}(t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} F(t) \quad F^{(h)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} F^{(h)}(t)$$

Essa si ottiene ricordando la [3] e integrando per parti. Si dimostra che se per $t > 0$ esiste la $F(t)$ e se per p_0 reale e > 0 la $L[F(t)]$ converge, la [*] è valida per ogni $R(p) > p_0$.

dove, secondo l'uso, si è indicato con le lettere minuscole le trasformate delle funzioni del problema 1°, indicate con le corrispondenti lettere maiuscole.

Il problema trasformato (Problema 2°) consiste quindi nell'integrazione dell'equazione differenziale [5] (equazione di Helmholtz) con le condizioni al contorno [4]. È pertanto nota la formula risolutiva del problema trasformato, che del resto si stabilisce immediatamente ricorrendo al teorema di Green; essa è:

$$4\pi u(P; p) = \int_S \frac{e^{-ar}}{r} [x + p\varphi + \psi] dS + \int_\sigma \left[\frac{d}{dn} \left(\frac{e^{-ar}}{r} \right) \cdot f - \frac{e^{-ar}}{r} g \right] d\sigma$$

essendosi fatta la posizione:

$$p^2 - k = a^2$$

3. RITORNO DAL PROBLEMA 2° AL PROBLEMA 1°. - Si tratta ora di trasformare la soluzione [6] del problema 2° nella soluzione $U(P, t)$ del problema primitivo 1°; si tratta cioè di valutare i vari termini che compaiono nell'espressione [6] tenendo conto delle note proprietà dell'operatore p

Formalmente si ha:

$$4\pi U(P, t) = \int_S L^{-1} \left[\frac{e^{-ar}}{r} (x + p\varphi + \psi) \right] dS + \\ + \int_\sigma L^{-1} \left[\frac{d}{dn} \left(\frac{e^{-ar}}{r} \right) f - \frac{e^{-ar}}{r} g \right] d\sigma$$

Le due funzioni integrande sono il risultato della valutazioni di singoli operatori che è necessario valutare uno per uno.

4) Consideriamo la funzione integranda del primo integrale: quello di volume. Ivi si hanno tre termini:

$$[9] \quad L^{-1} \left[\frac{e^{-ar}}{r} x \right], \quad [10] \quad L^{-1} \left[\frac{e^{-ar}}{r} p\varphi \right], \quad [11] \quad L^{-1} \left[\frac{e^{-ar}}{r} \psi \right].$$

Il termine [9] si presenta come prodotto di due operatori (oltre che del fattore costante $\frac{1}{r}$):

$$L^{-1}[e^{-r\sqrt{p^2-k}}] \quad \text{e} \quad L^{-1}[x(P, p)].$$

Gli operatori fattori del prodotto si valutano immediatamente ricorrendo alle apposite tavole ⁽⁸⁾ e ricordando la definizione [3']. Si ha così:

$$L^{-1}[e^{-ar}] = f_u(t-r) + kr \frac{I_1(\sqrt{k} \sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}} 1(t-r); \quad L^{-1}[x(P, p)] = X(P, t).$$

La valutazione dell'operatore prodotto si consegue poi immediatamente ricordando le proprietà del prodotto integrale (*Faltung*) di due funzioni rispetto alla trasformazione di Laplace ⁽⁹⁾. Si ha:

$$\begin{aligned} L^{-1}[e^{-ar} x] &= \int_0^t f_u(\tau-r) X(P, t-\tau) d\tau + \\ &+ kr \int_0^t \frac{I_1(\sqrt{k} \sqrt{\tau^2-r^2})}{\sqrt{k} \sqrt{\tau^2-r^2}} X(P, t-\tau) 1(\tau-r) d\tau; \end{aligned}$$

il primo termine al secondo membro (per le note proprietà della f_u) vale:

$$\int_0^t f_u(\tau-r) X(P; t-\tau) d\tau = X(P; t-r)$$

⁽⁸⁾ Si veda ad es. CAMPBELL, *loc. cit.* ⁽⁵⁾, form. 843 di Tav. I. L'operatore e^{-ar} è stato discusso a fondo da GIORGI, *Sull'integrale dell'equazione di propagazione in una dimensione*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », LII, pag. 255, 1928.

⁽⁹⁾ Ricordiamo che dicesi prodotto integrale (*Faltung*) di due funzioni $F(t)$, $G(t)$ l'espressione

$$\int_0^t F(\tau) G(t-\tau) d\tau$$

e che tale prodotto gode della proprietà:

$$[4] \quad L\left[\int_0^t F(\tau) G(t-\tau) d\tau\right] = L[F(t)] \cdot L[G(t)] = f(p) \cdot g(p)$$

Questa relazione fu stabilita originariamente da: BOREL, *Leçons sur les séries Divergentes*, Paris, 1901, e poi proposta e impiegata nel calcolo operatorio in modo sistematico da: CARSON, *loc. cit.* ⁽⁶⁾, pag. 41. DOETSCH, *loc. cit.* ⁽⁷⁾, ne completò lo studio considerandola come un'equazione integrale risolubile a mezzo della trasformazione di Laplace. Le condizioni generali per la sua validità non sono semplici; esse risultano però soddisfatte nei casi da noi studiati.

mentre il secondo, operando la sostituzione $\tau = t - \lambda$ e ricordando che la funzione $1[t - (\lambda + r)]$ è nulla quando l'argomento è < 0 e cioè per $\lambda > t - r$, diviene:

$$\int_0^t \frac{I_1(\sqrt{k} \sqrt{(t-\lambda)^2 - r^2})}{\sqrt{k} \sqrt{(t-\lambda)^2 - r^2}} X(P, \lambda) 1[t - (\lambda + r)] d\lambda = \int_0^{t-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} X(P, \lambda) d\lambda$$

(dove si è fatto uso di notazioni analoghe a quelle della formula [1] e colla posizione $t_0 = 0$). In definitiva per l'operatore [9] si ha quindi:

$$[12] \quad L^{-1} \left[\frac{e^{-ar}}{r} x \right] = \frac{X(P, t-r)}{r} + k \int_0^{t-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} X(P, \lambda) d\lambda$$

Veniamo a valutare il termine [10]. Ricordando che se $f(0) = 0$ è $p = \frac{\partial}{\partial t}$ la [*] della nota (?) dà:

$$[13] \quad L^{-1} \left[p \frac{e^{-ar}}{r} \varphi \right] = \varphi \frac{\partial}{\partial t} L^{-1} \left[\frac{e^{-ar}}{r} \right] = \left[U(P, \lambda) \frac{\partial}{\partial t} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \right]_{\lambda=0}$$

dove si sono trascurati i termini impulsivi per $t=0$ ⁽¹⁰⁾ e si è ricordata la definizione di φ .

Il termine [11], trascurando al solito gli impulsi all'istante iniziale, dà (per $t > r$):

$$[14] \quad L^{-1} \left[\frac{e^{-ar}}{r} \psi \right] = k \frac{I_1(\sqrt{k} \sqrt{t^2 - r^2})}{\sqrt{k} \sqrt{t^2 - r^2}} 1(t-r) \psi = \left[\frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{\partial U(P, \lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0}$$

B) Veniamo ora al calcolo del secondo integrale della [8]. E esso si può scrivere:

$$[15] \quad \int_0^t L^{-1} \left[e^{-ar} f \frac{d \frac{1}{r}}{dn} + \frac{1}{r} f \frac{d e^{-ar}}{dn} - \frac{e^{-ar}}{r} g \right] d\sigma ;$$

⁽¹⁰⁾ Il trascurare i termini impulsivi per $t=0$ costituisce una regola assai usata di calcolo operatorio, che si giustifica subito intuitivamente osservando che per le funzioni L , che si ottengono trasformando le soluzioni del problema 2° non è richiesta l'esistenza per $t=0$ ma solo del lim. Si assume cioè come soluzione all'istante iniziale quella data dal detto lim. $t \rightarrow +0$. A questo riguardo si veda: GIORGI, loc. cit. (9).

la funzione integranda si spezza quindi ancora nella somma di tre termini:

$$[16] \quad L^{-1} \left[e^{-ar} f \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right]; \quad [17] \quad L^{-1} \left[\frac{f}{r} \frac{de^{-ar}}{dn} \right]; \quad [18] \quad L^{-1} \left[-\frac{e^{-ar}}{r} g \right]$$

di cui ci proponiamo la valutazione.

Il primo termine [16] dà immediatamente, con il ragionamento già fatto per il termine [9] del primo integrale:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dn} \frac{1}{r} L^{-1} [e^{-ar} f] = \\ &= \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \int_0^t \left[f_u(\tau-r) + kr \frac{I_1(\sqrt{k} \sqrt{\tau^2 - r^2})}{\sqrt{k} \sqrt{\tau^2 - r^2}} \right] 1(\tau-r) F(P_o, t-\tau) d\tau = \\ &= F(P_o, t-r) \frac{d}{dn} \frac{1}{r} + kr \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \int_0^{t-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} F(P_o, \lambda) d\lambda = F(P_o, t-r) \frac{d}{dn} \frac{1}{r} - \frac{k}{r} \frac{dr}{dn} I \end{aligned}$$

(dove si è chiamato con I l'integrale al secondo termine del penultimo membro).

Il secondo termine [17] è più difficile da eseguirsi per via diretta perchè presenta derivazioni spaziali di elementi impulsivi rispetto all'argomento $(t-r)$. Si può però eseguire facilmente ricorrendo ad un semplice artificio:

$$[20] \quad L^{-1} \left[f \frac{de^{-ar}}{dn} \right] = \frac{d}{dn} L^{-1} \left[pf \frac{e^{-ar}}{p} \right],$$

valutando separatamente i due operatori pf e $\frac{e^{-ar}}{p}$ e componendoli

per mezzo della formula [*] di nota ⁽⁹⁾. Si ha allora successivamente:

$$L^{-1}[pf] = F'(P, t) - L^{-1}[F(0)] = F'(P_0, t) - F(P_0, 0)f_u(t)$$

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-ar}}{p}\right] = \int_0^t L^{-1}[e^{-ar}] dt = 1(t-r) \left[1 + rk \int_r^t \frac{I_1(\sqrt{k} \sqrt{\vartheta^2 - r^2})}{\sqrt{k} \sqrt{\vartheta^2 - r^2}} d\vartheta \right]$$

$$L^{-1}\left[pf \frac{e^{-ar}}{p}\right] = \int_0^t [F'(P_0, t-\tau) + F(P_0, 0)f_u(t-\tau)] \cdot \\ \cdot \left[1(\tau-r) + rk \int_r^\tau \frac{I_1(\sqrt{k} \sqrt{\vartheta^2 - r^2})}{\sqrt{k} \sqrt{\vartheta^2 - r^2}} d\vartheta \right] d\tau$$

Sviluppando il prodotto sotto il segno di integrale si hanno così quattro termini, ciascuno dei quali dovrà poi essere ancora derivato rispetto la normale n . Si ha così:

a) per il primo termine:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dn} \int_0^t F'(P_0, t-r) 1(\tau-r) d\tau = \frac{1}{r} \frac{d}{dn} \int_r^t F'(P_0, t-\tau) d\tau = -\frac{1}{r} \frac{dr}{dn} F'(P_0, t-r);$$

b) per il secondo:

$$\frac{d}{dn} \int_0^t F'(P_0, 0) 1(\tau-r) f_u(t-\tau) d\tau = \frac{d}{dn} F'(P_0, 0) 1(t-r) = 0;$$

c) Il terzo termine dà origine a calcoli un poco complessi. Si ha successivamente, integrando per parti ricordando che $F' = \frac{\partial}{\partial t} F = -\frac{\partial}{\partial \tau} F$, e ponendo $\rho' = \sqrt{k} \sqrt{\vartheta^2 - r^2}$

$$\int_0^t F'(P_0, t-\tau) \left[rk \cdot 1(\tau-r) \int_r^\tau \frac{I_1(\rho')}{\rho'} d\vartheta \right] d\tau = \\ = - \left[rk F(P_0, t-\tau) \int_r^\tau \frac{I_1(\rho')}{\rho'} d\vartheta \right]_r^t + rk 1(t-r) \int_r^t F(P_0, t-\vartheta) \frac{I_1(\rho')}{\rho'} d\vartheta = \\ = rk F(P_0, 0) \int_r^t \frac{I_1(\rho')}{\rho'} d\vartheta + rk 1(t-r) \int_r^t F(P_0, t-\vartheta) \frac{I_1(\rho')}{\rho'} d\vartheta;$$

d) per quarto termine si ha:

$$rk \int_0^t d\tau \left[F(P_\sigma, 0) f_u(t-\tau) 1(\tau-r) \int_r^\tau \frac{I_1(\rho')}{\rho'} d\vartheta \right] = rk F(P_\sigma, 0) \int_r^t \frac{I_1(\rho')}{\rho'} d\vartheta.$$

Eseguita la derivazione normale si vede che la somma del terzo e quarto termine di [20] risulta uguale a:

$$\frac{d}{dn} rk \int_r^t F(P_\sigma, t-\vartheta) \frac{I_1(\rho')}{\rho'} d\vartheta = k \frac{d}{dn} rI = kI \frac{dr}{dn} + kr \frac{dI}{dn};$$

l'ultimo termine al 2° membro può ancora trasformarsi nel seguente modo:

$$\begin{aligned} kr \frac{dI}{dn} &= -kr \frac{dr}{dn} F(P_\sigma, t-r) \lim_{\vartheta \rightarrow +0} \frac{I_1(\rho')}{\rho'} + kr \int_r^t F(P_\sigma, t-\vartheta) \frac{d}{dn} \frac{I_1(\rho')}{\rho'} d\vartheta = \\ &= -\frac{k}{2} r \frac{dr}{dn} F(P_\sigma, t-r) + kr \int_0^{t-r} F(P_\sigma, \lambda) \frac{d}{dn} \frac{I_1(\rho)}{\rho} d\lambda. \end{aligned}$$

In definitiva quindi la valutazione del termine [17] che compare nell'integrale superficiale [15] dà come risultato:

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{f}{r} \frac{de^{-ar}}{dn} \right] &= -\frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \frac{\partial}{\partial t} F(P_\sigma, t-r) + \frac{k}{r} \frac{dr}{dn} I - \\ [22] \quad &- \frac{k}{2} F(P_\sigma, t-r) \frac{dr}{dn} + k \int_0^{t-r} F(P_\sigma, \lambda) \frac{d}{dn} \frac{I_1(\rho)}{\rho} d\lambda. \end{aligned}$$

Resta così da valutare il termine [18] che compare nella funzione integranda dell'integrale superficiale [15]. Con il solito procedimento si trova:

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[-\frac{e^{-ar}}{r} g \right] &= -\frac{1}{r} \int_0^t \left[f_u(\vartheta-r) + kr \frac{I_1(\rho')}{\rho'} 1(\vartheta-r) \right] G(P_\sigma, t-\vartheta) d\vartheta = \\ &= -\frac{1}{r} G(P_\sigma, t-r) - k \int_0^{t-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} G(P_\sigma, \lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

EsPLICITANDO finalmente le funzioni integrande che compaiono nella formula [8], che costituisce la soluzione formale dell'equazione [1], si ottiene dopo facili trasformazioni la formula [2] che rappresenta l'integrale trovato da TONOLO col metodo diretto di Volterra-Tedone.

4. - CASI PARTICOLARI.

a) equazione dei potenziali elettromagnetici ritardati.

Ponendo nella [1] $k=0$ si ha l'equazione:

$$[24] \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta_2 U = X$$

nota sotto il nome di equazione dei potenziali elettromagnetici ritardati. Il suo integrale ⁽¹¹⁾, sempre colle condizioni iniziali e al contorno espresse dalle [4], si otterrà dalla [2] ponendovi $k=0$. Si ha:

$$4\pi U(x_1, y_1, z_1, t_1) = \int_S \frac{X(t_1 - r)}{r} dS - \int_\sigma \left[\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{dr}{dn} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \frac{\partial U}{\partial t} \right]_{t_1 - r} d\sigma$$

b) equazione del campo mesonico.

Ponendo nella [1] $k = -\chi^2$ (con χ reale) si ottiene l'equazione:

$$[25] \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta_2 U + \chi^2 U = X$$

detta del campo mesonico e che interviene nello studio delle forze nei nuclei atomici. Il suo integrale ⁽¹²⁾, sempre colle condizioni [4],

⁽¹¹⁾ L'integrale della [24] con le condizioni: $U_\sigma = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_\sigma = \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t_0} = 0$ è stato ottenuto col calcolo operatorio ordinario da GRAFFI, *loc. cit.* (4).

⁽¹²⁾ L'integrale della [25] con le condizioni: $U_\sigma = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_\sigma = \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t_0} = 0$ è stato ottenuto col calcolo operatorio ordinario da CALDIROLA, *loc. cit.* (4).

si otterrà dalla [2] ponendovi $k = -\chi^2$. Dopo facili trasformazioni si ha:

$$\begin{aligned}
 4\pi U(x_i, y_i, z_i, t_i) = & -\chi^2 \int_S \left[U \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{J_1(|\rho|)}{|\rho|} \right) - \frac{J_1(|\rho|)}{|\rho|} \frac{dU}{dt} \right]_{t_0} dS - \\
 & -\chi^2 \int_{\sigma} d\sigma \int_{t_0}^{t_1-r} \left[U \frac{d}{dn} \left(\frac{J_1(|\rho|)}{|\rho|} \right) - \frac{J_1(|\rho|)}{|\rho|} \frac{dU}{dn} \right] dt + \chi^2 \int_{\sigma} U(t_1-r) \frac{dr}{dn} d\sigma - \\
 & - \int_{\sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \frac{dU}{dt} \right]_{t_1-r} d\sigma - \chi^2 \int_S dS \int_{t_0}^{t_1-r} \frac{J_1(|\rho|)}{|\rho|} X dt + \int_S \frac{X(t_1-r)}{r} dS
 \end{aligned}$$

denotando $J_1(|\rho|)$ la funzione oscillante di Bessel di ordine uno.



IL CALCOLO DELLA PIASTRA ANULARE SPESSA (*)

RENATO GIOVANNOEZI

SYMMARIVM. --- Solutiones adhibens, quae iam notae sunt quod attinet ad functiones cylindricas et ad functiones rationales et transcendentes, Auctor perpendit laminam anularem spissam, quae inaequali oneri et vinculo sit subiecta.

Functionum cylindricarum, quae crebrius in calculis adhibentur, evolutiones in seriem persequens, concludit Auctor eas tarde convergere, ideoque formulas obtineri quae commodius in doctrinae elucubrationibus, quam in artium usu, adhiberi possint.

1. PREMESSE GENERALI. ARGOMENTO DEL PRESENTE LAVORO. -- Il problema della piastra di spessore costante ma non trascurabile rispetto alle altre dimensioni, cioè, come suol dirsi, il problema della piastra spessa, è stato finora fatto oggetto di numerose ricerche che hanno condotto a un certo numero di soluzioni esatte o approssimate del problema stesso. Una completa trattazione del problema generale dal punto di vista matematico si trova in un ampio lavoro di WOJNOWSKY-KRIEGER ⁽¹⁾.

Per il caso, particolarmente importante nelle applicazioni, di piastra circolare caricata con simmetria assiale, le equazioni generali si semplificano notevolmente e se ne conoscono finora due tipi di soluzioni.

(*) Nota presentata da S. E. l'Accademico Pontificio Enrico Pistolesi il 27 giugno 1946.

(¹) S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Der Spannungszustand in dicken elastischen Platten*, «Ingenieur Archiv», IV Band, 1933, pagg. 203-226 e 305-331.

La prima soluzione, indicata da A. E. LOVE⁽¹⁾ e successivamente sviluppata da A. TIMPE⁽²⁾ per un buon numero di casi importanti, è una soluzione in termini finiti, basata sull'uso dei polinomi di LEGENDRE; e si presta a risolvere il problema di un cilindro circolare pieno o cavo sulle cui facce cilindriche siano assegnate le tensioni normali e tangenziali in serie di potenze della coordinata assiale z .

La seconda soluzione, applicata da N. FILON⁽³⁾, A. NADAI⁽⁴⁾, e recentemente, da R. OHLIG⁽⁵⁾, si basa sull'uso delle funzioni di BESSEL e si presta a risolvere il problema quando siano assegnate le distribuzioni del carico normale e tangenziale sulle facce piane di un cilindro circolare pieno o cavo.

Ambedue le soluzioni si basano sull'ipotesi che il carico assiale complessivo sia equilibrato da tensioni tangenziali agenti sulle facce cilindriche, ma con leggi di distribuzione diverse in ciascuna soluzione; e ambedue le soluzioni sono in un certo senso incomplete, perchè permettono che siano soddisfatte certe condizioni arbitrarie solo sulle facce cilindriche (1^a soluzione) o sulle facce piane (2^a soluzione). Occorre perciò in generale combinare le due soluzioni, benchè ciò a rigore non sia esatto, essendo, come si è detto, diverse nei due casi le distribuzioni di tensioni tangenziali sulle facce cilindriche.

Gli studi finora compiuti con le soluzioni del secondo tipo si sono limitati al caso della piastra senza foro centrale, vincolata sulla faccia cilindrica; nel presente lavoro estenderemo la ricerca al caso praticamente più importante della piastra spessa con foro centrale, tenendo conto sia di condizioni di vincolo già considerate in altri studi, sia di altre che riteniamo di maggior interesse pratico. Esamineremo infine le possibilità di applicazione pratica dei calcoli svolti.

(¹) A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge 1927, pag. 276.

(²) A. TIMPE, *Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern*, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, IV Vol., 1924, pagg. 361-376.

(³) L. N. G. FILON, *On the Elastic Equilibrium of Circular Cylinders under Certain Practical Systems of Load*, «Philosophical Transactions of the Royal Society of London», Serie A, Vol. 198, pagg. 148-233.

(⁴) A. NADAI, *Die Elastische Platten*, pagg. 303 e segg., Editore Springer, Berlino, 1925.

(⁵) R. OHLIG, *Die achsensymmetrische belastete dicke Kreisplatte*, «Ingenieur Archiv», XIII Band, 1942, pagg. 155-162.

2. LE EQUAZIONI FONDAMENTALI DEL PROBLEMA. — Le equazioni fondamentali del problema sono note. Detti ξ, ρ , gli spostamenti di un punto generico della piastra rispettivamente in senso assiale o radiale, r il raggio generico, z la coordinata secondo l'asse della piastra, misurata a partire dal piano medio della piastra, ν il reciproco del modulo di Poisson, valgono le equazioni indefinite di equilibrio seguenti:

$$[1] \quad \begin{aligned} (1-2\nu)\Delta\xi + \frac{\partial e}{\partial z} &= 0 \\ (1-2\nu)\left(\Delta\rho - \frac{\rho}{r^2}\right) + \frac{\partial e}{\partial r} &= 0, \end{aligned}$$

in cui Δ è l'operatore:

$$[2] \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

mentre e è la dilatazione cubica:

$$[3] \quad e = \frac{\rho}{r} + \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

che soddisfa alla:

$$[4] \quad \Delta e = \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial r} = 0.$$

Da queste equazioni, con opportuna separazione delle variabili, si deducono per ξ , e ρ le due equazioni separate del quarto ordine;

$$[6] \quad \begin{aligned} \Delta\Delta\xi &= 0 \\ \left(\Delta - \frac{1}{\rho^2}\right)\left(\Delta\rho - \frac{\rho}{r^2}\right) &= 0, \end{aligned}$$

di cui sono soluzioni particolari le seguenti, prodotti di una funzione della sola r per una funzione della sola z :

$$[7] \quad \rho = \frac{1}{\lambda} (A \cos \lambda z + B \lambda z \cos \lambda z + C \sin \lambda z + D \lambda z \sin \lambda z) Z_1(\lambda r)$$

$$[8] \quad \xi = \frac{1}{\lambda} (A' \cos \lambda z + B' \lambda z \cos \lambda z + C' \sin \lambda z + D' \lambda z \sin \lambda z) Z_0(\lambda r).$$

In esse λ ; $A, B, \dots, A', B', \dots$ sono costanti di determinare con le condizioni ai limiti, mentre Z_1, Z_0 sono funzioni cilindriche di ordine rispettivamente uno e zero:

$$[9] \quad Z_1(\lambda r) = J_1(\lambda r) + k N_1(\lambda r)$$

$$[10] \quad Z_0(\lambda r) = J_0(\lambda r) + k N_0(\lambda r),$$

cioè combinazioni lineari secondo uno stesso coefficiente k (anch'esso da determinare con le condizioni ai limiti) delle funzioni di BESSEL e di NEUMANN dello stesso ordine.

Sostituendo nella [4] e nella prima delle [1], si trovano quattro relazioni fra le costanti $A, B, \dots, A', B', \dots$, di cui pertanto solo 4 risultano in definitiva indipendenti. Tenendo conto di tali relazioni e posto per semplicità:

$$[11] \quad \lambda z = \zeta$$

le espressioni di ρ e di ξ assumono l'aspetto seguente:

$$[12] \quad \rho = \sum \frac{1}{\lambda} (A \cos \zeta + B \zeta \cos \zeta + C \sin \zeta + D \zeta \sin \zeta) Z_1(\lambda r)$$

$$[13] \quad \xi = \sum \frac{1}{\lambda} \{ (-A \sin \zeta + B[(3-4\nu) \cos \zeta - \zeta \sin \zeta] - C \cos \zeta + \\ + D[(3-4\nu) \sin \zeta - \zeta \cos \zeta] \} Z_0(\lambda r).$$

Per ogni valore di λ si trovano corrispondentemente certi valori delle costanti A, B, C, D, k . Perchè le soluzioni del tipo [7], [8] possano soddisfare alle condizioni ai limiti del problema, λ deve essere in generale radice di una certa equazione trascendente. La sommatoria si intende, ora e in seguito, estesa a tutte le infinite soluzioni del tipo [7], [8], che chiameremo per brevità « soluzioni elementari », corrispondenti alle radici λ dell'equazione relativa al problema particolare che si considera, poste in ordine di grandezza crescente. Le costanti A, B, C, D , sono adimensionali.

Nel caso della piastra piena le funzioni di NEUMANN, infinite nell'origine, sono evidentemente da escludere e le funzioni Z_0, Z_1 si riducono alle sole funzioni di BESSEL.

Le [12], [13] possono scriversi più concisamente nella forma:

$$[14] \quad \varphi = \sum \frac{1}{\lambda} R(\lambda z) Z_1(\lambda r)$$

$$[15] \quad \xi = \sum \frac{1}{\lambda} Z(\lambda z) Z_0(\lambda r).$$

Indicando con apici le derivate delle funzioni $R(\lambda z)$, $Z(\lambda z)$ rispetto all'argomento λz , le espressioni delle tensioni normali σ_r , σ_t , o σ_z (rispettivamente tensione radiale, tensione in senso tangenziale e tensione assiale) e della tensione tangenziale τ si scrivono come segue:

$$[16] \quad \sigma_r = 2G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right) = \frac{2G}{1-2\nu} \sum [(1-\nu)R + \nu Z'] Z_0 - 2G \sum \frac{1}{\lambda r} R Z_1$$

$$[17] \quad \sigma_t = 2G \left(\frac{\varphi}{r} + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right) = \frac{2G}{1-2\nu} \sum (R + Z') Z_0 + 2G \sum \frac{1}{\lambda r} R Z_1$$

$$[18] \quad \sigma_z = 2G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right) = \frac{2G}{1-2\nu} \sum [\nu R + (1-\nu) Z'] Z_0$$

$$[19] \quad \tau = G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) = G \sum (R' - Z) Z_1.$$

3. LE CONDIZIONI AI LIMITI. — Per risolvere i vari problemi possibili relativi alla piastra anulare spesso occorre disporre delle sei costanti λ , k , A , B , C , D , che si hanno a disposizione per ogni soluzione elementare in modo da soddisfare alle condizioni ai limiti.

In generale, nei casi più comuni di sollecitazione e di vincolo, dovranno su ognuna delle quattro facce della piastra anulare essere soddisfatte due condizioni riguardanti: sulle facce piane, i valori delle tensioni normali e tangenziali; sulle facce cilindriche, i valori di tali tensioni, oppure i valori degli spostamenti assiali e radiali.

Mentre le quattro costanti A , B , C , D , permettono di soddisfare a tutte le quattro condizioni dette sulle facce piane, manca invece la possibilità di fare altrettanto sulle facce cilindriche, nelle quali rimangono disponibili due sole costanti, λ e k , per soddisfare a queste condizioni.

Per la risoluzione completa dei vari problemi occorre perciò in generale combinare le soluzioni così ottenute con le soluzioni di TIMPE, relative appunto, come si è detto, a varie condizioni di carico sulle facce cilindriche.

Negli studi precedenti prima citati eseguiti mediante soluzioni del secondo tipo è stata assunta come condizione ai limiti per la piastra spessa senza foro « appoggiata liberamente al contorno » l'annullarsi dello spostamento assiale in tutti i punti della faccia cilindrica, condizione questa che corrisponde poco all'idea di un appoggio, dato che dà luogo a tensioni tangenziali sulla faccia cilindrica, e non si vede nemmeno bene come potrebbe essere realizzata in pratica.

Anche la soluzione di TIMPE per il caso della piastra appoggiata al contorno e caricata da un carico ripartito uniforme, oppure da un carico ripartito sopra una circonferenza, pur non coincidendo esattamente, per le ragioni prima dette, con la soluzione analoga del secondo tipo, dà sempre luogo a tensioni tangenziali sulle facce cilindriche.

Il caso che si presenta in pratica e che pertanto abbiamo ritenuto opportuno di prendere in esame nel presente lavoro, oltre ai casi, già considerati da altri, prima detti, è invece quello in cui il carico agente su di una faccia piana è equilibrato da un carico con risultante uguale ed opposta agente sull'altra faccia, non essendo le facce cilindriche sottoposte ad alcuna tensione tangenziale.

4. STUDIO DI VARI CASI POSSIBILI DI VINCOLO E DI SOLLECITAZIONE. — Con queste premesse, passiamo allo studio del nostro problema. Siano $2h$ lo spessore della piastra; $a; b$, i raggi esterno ed interno. L'asse z abbia, come si è detto, l'origine a metà spessore della piastra stessa.

Consideriamo in quanto segue un certo numero di casi possibili di vincolo e di sollecitazione.

A) *Piastra anulare, vincolata sulle facce cilindriche secondo la condizione:*

$$[20] \quad \xi = 0 \text{ per } r = a; \quad \xi = 0 \text{ per } r = b,$$

caricata sulla base $z = h$ da una pressione $p = p(r)$ e sulla base $z = -h$ da una pressione $p' = p'(r)$.

Dalla [20], tenendo presente l'espressione [15] di ξ e la [10], segue per λ l'equazione trascendente:

$$[21] \quad J_0(\lambda a) N_0(\lambda b) - J_0(\lambda b) N_0(\lambda a) = 0 ,$$

e per k il valore:

$$[22] \quad k = - \frac{J_0(\lambda a)}{N_0(\lambda a)} = - \frac{J_0(\lambda b)}{N_0(\lambda b)} .$$

La determinazione delle costanti A, B, C, D, corrispondenti a una data soluzione elementare si effettua dopo avere sviluppato le funzioni $p(r)$, $p'(r)$ in serie di funzioni cilindriche di ordine zero:

$$[10 \text{ rip.}] \quad Z_0(\lambda r) = J_0(\lambda r) + k N_0(\lambda r) ,$$

essendo λ e k definiti dalle [21] e [22], mediante gli sviluppi:

$$[23] \quad p(r) = -4G \sum S Z_0(\lambda r)$$

$$[24] \quad p'(r) = -4G \sum S' Z_0(\lambda r) .$$

Come già detto, le sommatorie si intendono estese a tutti i valori di λ che soddisfano alla [21] in ordine di grandezza crescente.

Per una data soluzione elementare, le condizioni determinatrici delle costanti A, B, C, D sono allora le seguenti (con σ_s^* indichiamo adesso la sola parte di σ_s che corrisponde alla radice λ):

$$[25] \quad \text{per } z = h \quad \sigma_s^* = 4G S Z_0(\lambda r) ,$$

$$[26] \quad \text{per } z = -h \quad \sigma_s^* = 4G S' Z_0(\lambda r) .$$

Posto:

$$[27] \quad \lambda h = \omega ,$$

dalle due condizioni esprimenti l'annullarsi della τ sulle facce piane si deduce:

$$[28] \quad C = B [(1 - 2\nu) - \omega \operatorname{Tg} \omega] \quad A = D [(1 - 2\nu) - \omega \operatorname{Cot} \omega] .$$

Sostituendo nelle [12], [13], [18], si trova:

$$[29] \quad \frac{\sigma_z^*}{2G Z_0(\lambda r)} = B[(1 + \omega \operatorname{Tg} \omega) \operatorname{Sen} \zeta - \zeta \operatorname{Cos} \zeta] + D[(1 + \omega \operatorname{Cot} \omega) \operatorname{Cos} \zeta - \zeta \operatorname{Sen} \zeta].$$

Facendo quindi uso delle due condizioni relative alla σ_z^* , si ha:

$$[30] \quad B = \frac{S - S'}{\operatorname{Sen} \omega \left(1 - \frac{2\omega}{\operatorname{Sen} 2\omega}\right)} \quad D = \frac{S + S'}{\operatorname{Cos} \omega \left(1 + \frac{2\omega}{\operatorname{Sen} 2\omega}\right)}.$$

Le espressioni complessive delle tensioni risultano le seguenti:

$$[31] \quad \frac{\sigma_z}{2G} = \sum \{ B[(1 + \omega \operatorname{Tg} \omega) \operatorname{Sen} \zeta - \zeta \operatorname{Cos} \zeta] + \\ + D[(1 + \omega \operatorname{Cot} \omega) \operatorname{Cos} \zeta - \zeta \operatorname{Sen} \zeta] \} Z_0(\lambda r)$$

$$[32] \quad \frac{\sigma_t}{2G} = 2\nu \sum [B \operatorname{Sen} \zeta + D \operatorname{Cos} \zeta] Z_0(\lambda r) + \\ + \sum \frac{1}{\lambda r} \{ B[\zeta \operatorname{Cos} \zeta + (1 - 2\nu) - \omega \operatorname{Tg} \omega] \operatorname{Sen} \zeta + D[\zeta \operatorname{Sen} \zeta + (1 - 2\nu) - \omega \operatorname{Cot} \omega] \operatorname{Cos} \zeta \} Z_1(\lambda r)$$

$$[33] \quad \frac{\sigma_r}{2G} = \sum \{ B[\zeta \operatorname{Cos} \zeta + (1 - \omega \operatorname{Tg} \omega) \operatorname{Sen} \zeta] + D[\zeta \operatorname{Sen} \zeta + (1 - \omega \operatorname{Cot} \omega) \operatorname{Cos} \zeta] \} Z_0(\lambda r) - \\ - \sum \frac{1}{\lambda r} \{ B[\zeta \operatorname{Cos} \zeta + (1 - 2\nu) - \omega \operatorname{Tg} \omega] \operatorname{Sen} \zeta + D[\zeta \operatorname{Sen} \zeta + (1 - 2\nu) - \omega \operatorname{Cot} \omega] \operatorname{Cos} \zeta \} Z_1(\lambda r)$$

$$[34] \quad \frac{\tau}{2G} = \sum [B(\zeta \operatorname{Sen} \zeta - \omega \operatorname{Tg} \omega \cdot \operatorname{Cos} \zeta) + D(\zeta \operatorname{Cos} \zeta - \omega \operatorname{Cot} \omega \cdot \operatorname{Sen} \zeta)] Z_1(\lambda r).$$

Da osservare la perfetta simmetria dei coefficienti di B e di D, che si ottengono l'uno dall'altro scambiando ovunque il seno e la tangente iperbolici col coseno e con la cotangente rispettivamente e viceversa.

Per il caso particolare in cui una sola delle facce, ad esempio la superiore, sia caricata, basta fare ovunque $p' = 0$, $S' = 0$.

Il sistema di tensioni così ottenuto non soddisfa alla condizione di avere tensioni normali nulle sulle facce cilindriche. Per realizzare approssimativamente tale condizione, occorre sovrapporre al sistema trovato un sistema che abbia sulle facce cilindriche di raggi a , b ,

forze radiali risultanti $R(a)$, $R(b)$ e momenti flettenti risultanti $M(a)$, $M(b)$ (forze e momenti si intendono naturalmente riferiti all'unità di lunghezza delle circonferenze di raggi a , b) uguali ed opposti a quelli del sistema trovato.

Si ha facilmente:

$$[35] \quad R(a) = - \int_{-h}^h (\sigma_r)_{r=a} dz = 8 G v \sum D \frac{Z_1(\lambda a)}{\lambda^2 a}$$

$$[36] \quad M(a) = - \int_{-h}^h (\sigma_r)_{r=a} z dz = -4 G \sum \frac{S-S'}{\lambda^2} \left[Z_0(\lambda a) + \frac{Z_1(\lambda a)}{\lambda a} \left(1 + 2v \frac{1-\omega \cot \omega}{1 - \frac{2\omega}{\operatorname{Sen} 2\omega}} \right) \right],$$

e, analogamente:

$$[37] \quad R(b) = 8 G v \sum D \frac{Z_1(\lambda b)}{\lambda^2 b}$$

$$[38] \quad M(b) = -4 G \sum \frac{S-S'}{\lambda^2} \left[Z_0(\lambda b) + \frac{Z_1(\lambda b)}{\lambda b} \left(1 + 2v \frac{1-\omega \cot \omega}{1 - \frac{2\omega}{\operatorname{Sen} 2\omega}} \right) \right].$$

Dalle [35], [36], [37], [38], appare che le forze radiali dipendono dalle somme dei coefficienti degli sviluppi in serie di p , p' ; i momenti flettenti dalle loro differenze. Se le due facce piane fossero caricate ugualmente, mancherebbero i momenti flettenti.

Si vede anche che nel nostro caso, in base alle ipotesi di vincolo ammesse, le [36], [38] si semplificano per essere $Z_0(\lambda a) = Z_0(\lambda b) = 0$.

Le tensioni corrispondenti alle forze $R(a)$, $R(b)$ e ai momenti $M(a)$, $M(b)$ valgono, come si deduce dal citato lavoro di A. TIMPE:

Forza $R(a)$ al bordo esterno:

$$[39] \quad \sigma_r = \frac{R(a)}{2h} \frac{a^2}{a^2 - b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad \sigma_t = \frac{R(a)}{2h} \frac{a^2}{a^2 - b^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right),$$

Forza $R(b)$ al bordo interno:

$$[40] \quad \sigma_r = \frac{R(b)}{2h} \frac{b^2}{a^2 - b^2} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \quad \sigma_t = - \frac{R(b)}{2h} \frac{b^2}{a^2 - b^2} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right):$$

Momento $M(a) = M$ al bordo esterno:

$$[41] \quad \sigma_r = \frac{3}{2} M \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \frac{z}{h^3} \quad \sigma_t = \frac{3}{2} M \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \frac{z}{h^3};$$

Momento $M(b) = M$ al bordo interno:

$$[42] \quad \sigma_r = \frac{3}{2} M \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \frac{z}{h^3} \quad \sigma_t = -\frac{3}{2} M \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right) \frac{z}{h^3}.$$

B) *Piastra anulare vincolata sulla faccia cilindrica esterna secondo la condizione:*

$$[43] \quad \xi = 0 \quad \text{per} \quad r = a,$$

caricata da una pressione $p(r)$ sulla faccia $z = h$ e da una pressione $p'(r)$ sulla faccia $z = -h$.

Per definire il valore di λ , alla condizione:

$$[44] \quad J_0(\lambda a) + k N_0(\lambda b) = 0$$

aggiungeremo l'altra che siano nulle le tensioni tangenziali sulla faccia cilindrica $r = b$, cioè la condizione:

$$[44'] \quad J_1(\lambda b) + k N_1(\lambda b) = 0.$$

Dalle [43], [44] segue per λ l'equazione trascendente:

$$[45] \quad J_0(\lambda a) N_1(\lambda b) - J_1(\lambda b) N_0(\lambda a) = 0,$$

e per k il valore:

$$[46] \quad k = -\frac{J_0(\lambda a)}{N_0(\lambda a)} = -\frac{J_1(\lambda b)}{N_1(\lambda b)}.$$

Tutte le altre formule sono formalmente identiche a quelle del caso A). Continuano pertanto a valere le formule da [23] a [41], purchè si intenda che in esse i valori di λ e di k siano adesso definiti dalle [45], [46] anzichè dalle [21], [22]. Le [36], [38] si semplificano per essere nella [36] $Z_0(\lambda a) = 0$, nella [38] $Z_1(\lambda b) = 0$. La $R(b)$ data dalla [37] si annulla.

C) *Piastra anulare vincolata sulla faccia cilindrica interna secondo la condizione:*

$$[47] \quad \xi = 0 \quad \text{per} \quad r = b ,$$

caricata da una pressione $p_0(r)$ sulla faccia $z = h$ e da una pressione $p'(r)$ sulla faccia $z = h$.

Imponendo la condizione $\tau = 0$ per $r = a$, si trova ancora che valgono tutte le formule del caso A), purchè in esse si intendano adesso λ e k definiti dalle relazioni:

$$[48] \quad J_0(\lambda b) N_1(\lambda a) - J_1(\lambda a) N_0(\lambda b) = 0$$

$$[49] \quad k = - \frac{J_1(\lambda a)}{N_1(\lambda a)} = - \frac{J_0(\lambda b)}{N_0(\lambda b)} .$$

Le [36], [38] si semplificano per essere nella [38] $Z_1(\lambda a) = 0$ e nella [36] $Z_0(\lambda b) = 0$. La $R(a)$ data dalla [35] si annulla.

D) *Piastra anulare, libera sulle facce cilindriche, caricata sulle facce piane $z = \pm h$ rispettivamente da distribuzioni di pressione $p(r)$, $p'(r)$, tali da avere risultante complessiva nulla, cioè tali da soddisfare alla relazione:*

$$[50] \quad \int_a^b (p - p') r dr = 0 .$$

Per definire λ e k assumiamo adesso le condizioni:

$$[51] \quad \tau = 0 \quad \text{per} \quad r = a \quad \text{e per} \quad r = b ,$$

cioè:

$$[52] \quad J_1(\lambda a) N_1(\lambda b) - J_1(\lambda b) N_1(\lambda a) = 0$$

$$[53] \quad k = - \frac{J_1(\lambda a)}{N_1(\lambda a)} = - \frac{J_1(\lambda b)}{N_1(\lambda b)}$$

Continuano a valere tutte le formule relative al caso A) in cui però si intenda che λ e k siano definiti dalle [52], [53] anzichè dalle [21], [22].

Le [36], [38] si semplificano per essere $Z_1(\lambda a) = Z_1(\lambda b) = 0$. Le $R(a)$, $R(b)$ date dalle [35], [37] si annullano.

Occorre tener presente che in questo caso il sistema di tensioni corrispondente a una data radice λ non è in generale equilibrato. Si ottiene l'equilibrio solo tenendo conto della sommatoria di tutti i sistemi di tensioni corrispondenti alle radici λ .

Come caso particolare, potrà essere caricata una sola faccia da una distribuzione di pressione avente risultante nulla, essendo l'altra faccia scarica. Supponendo che la faccia carica sia la faccia $z=h$, sarà cioè:

$$[50'] \quad p'(r) = 0 \quad \int_b^a p(r) r dr = 0 .$$

Le formule relative a questo caso particolare si ottengono facendo ovunque $S' = 0$.

E) *Piastra anulare caricata da una distribuzione di tensioni tangenziali $\tau(r)$ sulla faccia piana $z=h$ e da una distribuzione $-\tau'(r)$ sulla faccia $z=-h$.*

I valori di λ e k sono ancora definiti dalle [52], [53]. Le condizioni per la determinazione delle costanti A, B, C, D sono le seguenti:

$$[54] \quad \text{per } z=h \quad \sigma_z = 0 \quad \tau = \tau(r)$$

$$[55] \quad \text{per } z=-h \quad \sigma_z = 0 \quad \tau = \tau'(r) .$$

Dalle condizioni relative alle σ_z si deduce, per una data radice λ :

$$[56] \quad A = D [2(1-\nu) - \omega \operatorname{Tg} \omega] \quad C = B [2(1-\nu) - \omega \operatorname{Cot} \omega] .$$

Sostituendo nelle [12], [13], [19] si trova, indicando con τ^* la parte della τ totale che corrisponde alla radice- λ :

$$[57] \quad \frac{\tau^*}{2G Z_1(\lambda r)} = B [\zeta \operatorname{Sen} \zeta + (1-\omega \operatorname{Cot} \omega) \operatorname{Cos} \zeta] + D [\zeta \operatorname{Cos} \zeta + (1-\omega \operatorname{Tg} \omega) \operatorname{Sen} \zeta] ,$$

nella quale espressione è da osservare che si passa dal coefficiente di B a quello di D sostituendo ovunque coseno e cotangente a seno e tangente e viceversa.

Sviluppate in serie di funzioni cilindriche di primo ordine le distribuzioni $\tau(r)$, $\tau'(r)$ mediante gli sviluppi:

$$[58] \quad \tau(r) = 4G \sum T Z_1(\lambda r)$$

$$[59] \quad \tau'(r) = 4G \sum T' Z_1(\lambda r) ,$$

per una data soluzione elementare si hanno quindi le condizioni seguenti determinatrici delle costanti A, B, C, D:

$$[60] \quad \text{per } z = h \quad \tau^* = 4G T Z_1(\lambda r)$$

$$[61] \quad \text{per } z = -h \quad \tau^* = 4G T' Z_1(\lambda r) .$$

Con semplici calcoli si trova:

$$[62] \quad B = \frac{T + T'}{\cos \omega \left(1 - \frac{2\omega}{\sin 2\omega} \right)} \quad D = \frac{T - T'}{\sin \omega \left(1 + \frac{2\omega}{\sin 2\omega} \right)}$$

Le espressioni complessive delle tensioni risultano le seguenti:

$$[63] \quad \frac{\sigma_z}{2G} = \sum [B(\omega \cot \omega \cdot \sin \zeta - \zeta \cos \zeta) + D(\omega \operatorname{Tg} \omega \cdot \cos \zeta - \zeta \sin \zeta)] Z_0(\lambda r)$$

$$[64] \quad \frac{\sigma_t}{2G} = 2\nu \sum (B \sin \zeta + D \cos \zeta) Z_0(\lambda r) + \sum \frac{Z_1(\lambda r)}{\lambda r} \left\{ B \zeta \cos \zeta + [2(1-\nu) - \omega \cot \omega] \sin \zeta + D \zeta \sin \zeta + [2(1-\nu) - \omega \operatorname{Tg} \omega] \cos \zeta \right\}$$

$$[65] \quad \frac{\sigma_r}{2G} = \sum \left\{ B[\zeta \cos \zeta + (2 - \omega \cot \omega) \sin \zeta] + D[\zeta \sin \zeta + (2 - \omega \operatorname{Tg} \omega) \cos \zeta] \right\} Z_0(\lambda r) + \sum \frac{Z_1(\lambda r)}{\lambda r} \left\{ B \zeta \cos \zeta + [2(1-\nu) - \omega \cot \omega] \sin \zeta + D \zeta \sin \zeta + [2(1-\nu) - \omega \operatorname{Tg} \omega] \cos \zeta \right\}$$

$$[66] \quad \frac{\tau}{2G} = \sum [B \zeta \sin \zeta + (1 - \omega \cot \omega) \cos \zeta] + D[\zeta \cos \zeta + (1 - \omega \operatorname{Tg} \omega) \sin \zeta] \{ Z_1(\lambda r) .$$

Le forze radiali risultanti che occorre applicare al sistema trovato per avere risultante radiale nulla, sono, tenuto conto che, per le [51], $Z_1(\lambda a) = Z_1(\lambda b) = 0$:

$$[67] \quad R(a) = 4G \sum \frac{T - T'}{\lambda} Z_0(\lambda a) \quad R(b) = 4G \sum \frac{T - T'}{\lambda} Z_0(\lambda b) ;$$

mentre i momenti da applicare per avere momento risultante nullo valgono:

$$[68] \quad M(a) = 4G h \sum \frac{T + T'}{\lambda} Z_0(\lambda a) \quad M(b) = 4G h \sum \frac{T + T'}{\lambda} Z_0(\lambda b) .$$

Si vede dunque che le forze radiali dipendono dalla differenza delle distribuzioni di tensioni tangenziali sulle facce superiore e inferiore; i momenti dalla loro somma.

Nel caso particolare in cui la sola faccia superiore sia carica e la inferiore scarica basta fare ovunque $T' = 0$. Dal confronto delle [67], [68] appare anche che le distribuzioni di tensioni tangenziali applicate sulle facce $z = \pm h$ danno luogo a forze radiali risultanti per unità di lunghezza del contorno agenti nei piani di tali facce.

5. GLI SVILUPPI IN SERIE DI FUNZIONI CILINDRICHE. — La soluzione del problema nei vari casi considerati importa sempre, come si è visto, uno o più sviluppi di determinate funzioni $f(r)$ in serie di funzioni cilindriche di ordine zero ed uno nell'intervallo $b \leq r \leq a$:

$$[69] \quad f(r) = \sum c_i Z_0(\lambda_i r) \qquad [70] \quad f(r) = \sum c_i Z_1(\lambda_i r)$$

essendo gli « autovalori » λ_i del problema definiti da determinate equazioni trascendenti (le [21], [45], [48], [52]).

Le formule di tali sviluppi sono note, ma raramente riportate nei trattati; riteniamo perciò opportuno riportarle qui nella forma che esse assumono per i casi che a noi interessano.

Per lo sviluppo [69] valgono le relazioni seguenti:

$$[71] \quad c_i = \frac{1}{C_i} \int_b^a f(r) Z_0(\lambda_i r) r dr$$

$$[72] \quad C_i = \frac{1}{2} \left\{ a^2 [Z_0^2(\lambda_i a) + Z_1^2(\lambda_i a)] - \right. \\ \left. - b^2 [Z_0^2(\lambda_i b) + Z_1^2(\lambda_i b)] \right\},$$

mentre per lo sviluppo [70] valgono le relazioni:

$$[73] \quad c_i = \frac{1}{C_i} \int_b^a f(r) Z_1(\lambda_i r) r dr$$

$$[74] \quad C_i = \frac{1}{2} \left\{ a^2 \left[Z_0^2(\lambda_i a) + Z_1^2(\lambda_i a) - \frac{2}{\lambda_i a} Z_0(\lambda_i a) Z_1(\lambda_i a) \right] - \right. \\ \left. - b^2 \left[Z_0^2(\lambda_i b) + Z_1^2(\lambda_i b) - \frac{2}{\lambda_i b} Z_0(\lambda_i b) Z_1(\lambda_i b) \right] \right\}.$$

Le espressioni [72], [74] di C_i si possono naturalmente semplificare quando, per le condizioni ai limiti, si annullano per $r=a$ o $r=b$ le funzioni $Z_0(\lambda_i r)$ o $Z_1(\lambda_i r)$.

La possibilità di calcolare la funzione primitiva degli integrali che compaiono nella [71], [73] dipende naturalmente dalla forma analitica della funzione $f(r)$.

Per il caso $f(r) = \text{cost.}$ l'integrale [70] si calcola subito, essendo:

$$[75] \quad \int Z_0(\lambda_i r) r dr = \frac{r}{\lambda_i} Z_1(\lambda_i r) ,$$

mentre l'integrale [73] si riduce, mediante la relazione:

$$[76] \quad \int r Z_1(\lambda_i r) dr = -\frac{r}{\lambda_i} Z_0(\lambda_i r) + \frac{1}{\lambda_i^2} \int Z_0(\lambda_i r) d(\lambda_i r)$$

al calcolo dell'integrale:

$$\int Z_0(r) dr ,$$

integrale che non si sa fare in forma finita.

Se la funzione $f(r)$ è lineare si presentano gli integrali:

$$[77] \quad \begin{aligned} \int r^2 Z_0(\lambda_i r) dr &= \frac{1}{\lambda_i} \left[r^2 Z_1(\lambda_i r) - \int r Z_1(\lambda_i r) dr \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \left[r^2 Z_1(\lambda_i r) + \frac{r}{\lambda_i} Z_0(\lambda_i r) - \frac{1}{\lambda_i^2} \int Z_0(\lambda_i r) d(\lambda_i r) \right] \end{aligned}$$

$$[78] \quad \int r^2 Z_1(\lambda_i r) dr = \frac{r^2}{\lambda_i} \left[\frac{2}{\lambda_i r} Z_1(\lambda_i r) - Z_0(\lambda_i r) \right] ,$$

il primo dei quali si riduce ancora al calcolo, da farsi per integrazione numerica, dell'integrale $\int Z_0(r) dr$.

Agli integrali fondamentali considerati ci si riduce anche, con integrazioni per parti, quando devono eseguirsi integrali del tipo $\int r^m Z_0(r) dr$, $\int r^m Z_1(r) dr$, essendo m un numero intero maggiore di 2.

6. IL CALCOLO DEGLI AUTOVALORI λ . - Le equazioni trascendenti [21], [45], [48], [52], di cui per lo svolgimento dei calcoli occorre determi-

nare le radici, sono sostanzialmente, posto ⁽¹⁾:

$$[79] \quad \frac{a}{b} = k \quad b = x,$$

dei tre tipi seguenti:

$$[80] \quad f_0(x) = J_0(x) N_0(kx) - J_0(kx) N_0(x)$$

$$[81] \quad f_{0,1}(x) = J_0(x) N_1(kx) - J_1(kx) N_0(x)$$

$$[82] \quad f_1(x) = J_1(x) N_1(kx) - J_1(kx) N_1(x).$$

Consideriamo dapprima il caso di una radice x così piccola che non possano usarsi per le funzioni di BESSEL e di NEUMANN di cui essa è argomento gli sviluppi asintotici.

In tal caso, calcolato un valore approssimato \bar{x} della radice e posto:

$$[83] \quad x = \bar{x} + \varepsilon,$$

si può scrivere, arrestando lo sviluppo in serie di TAYLOR ai primi tre termini:

$$[84] \quad f(x) = f(\bar{x} + \varepsilon) = f(\bar{x}) + \varepsilon f'(\bar{x}) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(\bar{x}) = 0.$$

Si ha così una equazione di secondo grado, che risolta fornisce il valore di ε . In questo caso un tale procedimento sembra preferibile all'uso ripetuto della formula di NEWTON, per il fatto che le tabelle (KEIKI KAYASHI, *Fünfstellige Funktionentafeln*, Springer, 1930) danno, per argomento fino a 16,00, i valori delle funzioni J_0, N_0, J_1, N_1 con 5 decimali, di 0,01 in 0,01.

Prendendo come valore di partenza un valore delle tavole, il trascurare il cubo di ε porta a un errore certamente minore di 10^{-6} ,

⁽¹⁾ Allo scopo di conservare le notazioni di JAMKE EMDER: *Funktionentafeln*, si usa in questo paragrafo, e in questo paragrafo solamente, un simbolo k definito dalla prima delle [79], che ha un significato diverso dal k definito dalle [9], [10], che compare in tutti gli altri paragrafi precedenti e seguenti il presente paragrafo.

cioè minore dell'errore con cui sono riportate le funzioni nelle tavole stesse. Si ottiene perciò il valore esatto (nei limiti della precisione delle tavole) fino dal primo calcolo, mentre invece con la formula di NEWTON occorre calcolare successivamente funzione e sua derivata prima per valori di x non contenuti nelle tavole.

Le espressioni delle $f'(x)$, $f''(x)$, che per brevità non stiamo qui a scrivere per i vari casi possibili, si trovano facilmente ricordando che valgono le relazioni:

$$[85] \quad J_0'(x) = -J_1(x) \quad J_0''(x) = -J_0(x) + \frac{J_1(x)}{x}$$

$$[86] \quad J_1'(x) = -J_0''(x) \quad J_1''(x) = \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)J_1(x) - \frac{J_0(x)}{x}$$

e le analoghe per le funzioni $N_0(x)$, $N_1(x)$.

Per trovare un primo valore approssimato di x si può, per le funzioni f_0, f_1 , interpolare nelle tabelle che danno le loro prime sei radici per vari valori di k in JAMKE-EMDE, *Funktionentafeln*, pagg. 274-276. Per la $f_{0,1}$ si può far uso delle citate tabelle di KEIICHI HAYASHI.

Per il calcolo dei valori più elevati delle radici x si propone come più conveniente il procedimento seguente, basato sugli sviluppi asintotici di HANKEL.

Per le funzioni di BESSEL J_p e di NEUMANN N_p di ordine p tali sviluppi si scrivono notoriamente nel modo seguente:

$$[87] \quad J_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} [A_p(x) \cos \theta_p(x) - B_p(x) \sin \theta_p(x)]$$

$$[88] \quad N_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} [A_p(x) \sin \theta_p(x) + B_p(x) \cos \theta_p(x)]$$

in cui:

$$[89] \quad \theta_p(x) = x - p \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$A_p(x) = 1 - \frac{(4p^2-1^2)(4p^2-3^2)}{2^4 \cdot 2! (2x)^2} + \frac{(4p^2-1^2)(4p^2-3^2)(4p^2-5^2)(4p^2-7^2)}{2^8 \cdot 4! (2x)^4} - \dots$$

$$[90] \quad B_p(x) = -\frac{(4p^2-1)}{2^2 \cdot 1! (2x)} + \frac{(4p^2-1^2)(4p^2-3^2)(4p^2-5^2)}{2^6 \cdot 3! (2x)^3} - \dots$$

Sostituendo nelle [80], [82], in cui si intenda che sia rispettivamente $p=0$, $p=1$, si trova, tenuto della [89], l'equazione seguente determinatrice delle radici x :

$$[91] \quad \operatorname{tg} [(k-1)x] = \frac{A_p(kx) B_p(x) - A_p(x) B_p(kx)}{A_p(kx) A_p(x) + B_p(kx) B_p(x)}.$$

Poichè gli A_p sono dell'ordine di grandezza dell'unità, mentre i B_p sono dell'ordine di grandezza di $\frac{1}{x}$, cioè, essendo per ipotesi x grande, piccoli del primo ordine, il secondo membro della [91] è piccolo del primo ordine. Perciò anche la $\operatorname{tg} [(k-1)x]$ sarà piccola del primo ordine e potrà quindi confondersi col proprio argomento diminuito di $m\pi$, essendo m quell'intero che fa più avvicinare allo zero la differenza $[(k-1)x - m\pi]$.

Calcolati per un valore approssimato \bar{x} di x il primo e il secondo membro della [91], l'incremento:

$$[92] \quad \varepsilon = x - \bar{x}$$

da aggiungere al valore \bar{x} di prima approssimazione per ottenere un valore più approssimato x della radice produrrà, per quanto si è visto, nel secondo membro della [91] una variazione dell'ordine di grandezza di $\frac{\varepsilon}{x^2}$, cioè piccola del secondo ordine e quindi, nelle nostre ipotesi, trascurabile, e nel primo membro una variazione uguale circa a $[(k-1)\varepsilon]$.

Il valore di ε risulta perciò definito dalla relazione:

$$[93] \quad \varepsilon \approx \frac{1}{k-1} \left[\frac{A_p(k\bar{x}) B_p(\bar{x}) - A_p(\bar{x}) B_p(k\bar{x})}{A_p(k\bar{x}) A_p(\bar{x}) + B_p(k\bar{x}) B_p(\bar{x})} - (k-1)\bar{x} + m\pi \right].$$

Per radici molto grandi si ha, ancora più semplicemente:

$$[93'] \quad \varepsilon \approx \frac{B_p(\bar{x}) - B_p(k\bar{x})}{k-1} - \bar{x} + \frac{m\pi}{k-1}.$$

A un risultato perfettamente analogo si giunge sostituendo gli sviluppi [87], [88] nella [81]. La condizione determinatrice delle radici risulta adesso la seguente:

$$[94] \quad \operatorname{tg} \left[(k-1)x - \frac{\pi}{2} \right] = \frac{A_1(k\bar{x}) B_0(\bar{x}) - A_0(\bar{x}) B_1(k\bar{x})}{A_1(k\bar{x}) A_0(\bar{x}) + B_1(k\bar{x}) B_0(\bar{x})}.$$

L'incremento ε da dare a un primo valore approssimato della x per trovare un valore più approssimato dalla radice stessa è dato adesso dalla:

$$[95] \quad \varepsilon \approx \frac{1}{k-1} \left[\frac{A_1(k\bar{x}) B_0(\bar{x}) - A_0(\bar{x}) B_1(k\bar{x})}{A_1(k\bar{x}) A_0(\bar{x}) + B_1(k\bar{x}) B_0(\bar{x})} - (k-1)\bar{x} + \frac{\pi}{2} + m\pi \right]$$

e, se x è molto grande, dalla:

$$[95'] \quad \varepsilon \approx \frac{B_0(\bar{x}) - B_1(k\bar{x})}{k-1} - \bar{x} + \frac{\pi}{2(k-1)} + \frac{m\pi}{k-1},$$

essendo m il numero intero che fa maggiormente avvicinare allo zero la differenza

$$\left| (k-1)x - \frac{\pi}{2} - m\pi \right|.$$

Al tendere di x all'infinito le radici tendono ai valori limiti:

$$[96] \quad x = \frac{n\pi}{k-1} \quad \text{per le equazioni [80], [82]}$$

$$[97] \quad x = \frac{(2n+1)\pi}{2(k+1)} \quad \text{per l'equazione [81],}$$

essendo n un numero intero positivo. I valori delle radici dati dalla [96], [97] possono servire in ogni caso per avere l'ordine di grandezza e addirittura un valore di prima approssimazione delle radici cercate.

APPLICABILITÀ PRATICA DEI RISULTATI OTTENUTI. - Pur facendo uso degli accorgimenti e dei metodi sopra esposti per il calcolo degli autovalori e quindi dei coefficienti degli sviluppi in serie di funzioni cilindriche, si deve purtroppo constatare che l'applicazione delle formule ottenute richiede, salvo casi speciali, una mole di calcoli numerici così imponente, che può essere giustificata solo dalla particolare im-

portanza del problema che interessa risolvere ed esclude in generale una comoda applicazione tecnica delle formule stesse.

Questo fatto è dovuto essenzialmente in primo luogo alla estrema lentezza della convergenza degli sviluppi in serie di funzioni cilindriche (i trattati matematici omettono di solito di chiarire questo punto, fondamentale per le applicazioni tecniche), in secondo luogo alla mancanza di tabelle abbastanza estese per i valori delle funzioni di BESSEL e di NEUMANN.

Il primo motivo è il più grave. Si vede facilmente, tenendo presenti le espressioni asintotiche [87], [88], che i coefficienti degli sviluppi in serie sono dell'ordine di grandezza di $1/\sqrt{x}$, cioè, poichè, per valori abbastanza elevati delle radici x , esse crescono circa proporzionalmente ai numeri naturali, i coefficienti decrescono con proporzionalità inversa alla radice quadrata dei numeri naturali. Siccome poi, negli sviluppi, essi sono moltiplicati per funzioni cilindriche, che sono dell'ordine di grandezza di $1/\sqrt{x}$, in definitiva ogni termine dello sviluppo decresce con proporzionalità inversa ai numeri naturali, cioè molto lentamente.

Per veder meglio la cosa, consideriamo ad esempio il caso in cui valgano le condizioni ai limiti [51]. Per valori di x abbastanza grandi, tali condizioni, ricordando le [87], [88], si scrivono:

$$\begin{aligned} [98] \quad & \cos \theta_1(\lambda_i b) + k \sin \theta_1(\lambda_i b) = 0 \\ & \cos \theta_1(\lambda_i a) + k \sin \theta_1(\lambda_i a) = 0 \end{aligned}$$

o anche:

$$\begin{aligned} [99] \quad & \sin \theta_0(\lambda_i b) - k \cos \theta_0(\lambda_i b) = 0 \\ & \sin \theta_0(\lambda_i a) - k \cos \theta_0(\lambda_i a) = 0 \end{aligned}$$

Per le [87], [88] in cui si faccia $p=0$, $B_0=0$, si ha allora:

$$\begin{aligned} [100] \quad Z_0(\lambda_i b) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_i b}} [\cos \theta_0(\lambda_i b) + k \sin \theta_0(\lambda_i b)] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_i b}} (1 + k^2) \cos \theta_0(\lambda_i b) \\ Z_0(\lambda_i a) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_i a}} (1 + k^2) \cos \theta_0(\lambda_i a). \end{aligned}$$

Sostituendo nella [72], in cui si tenga presente essere $Z_1(\lambda_i b) = Z_1(\lambda_i a) = 0$, e tenendo presente che, come si deduce subito dalle [99], è

$$[101] \quad \cos^2 \theta_0(\lambda_i b) = \cos^2 \theta_0(\lambda_i a) ,$$

si ha:

$$[102] \quad C_i = \frac{b}{\pi \lambda_i} (1+k^2)^2 \cos^2 \theta_0(\lambda_i b) \left(\frac{a}{b} - 1 \right) ,$$

e quindi, per la prima delle [99]:

$$[102'] \quad C_i = \frac{b}{\pi \lambda_i} (1+k^2) \left(\frac{a}{b} - 1 \right) .$$

Nell'ipotesi $f(r) = \text{cost.} = 1$ si vede poi facilmente che il numeratore della [71] risulta non superiore a:

$$\frac{a}{\lambda_i} 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i b}} (1 + |k|)$$

e pertanto i coefficienti dello sviluppo risultano non superiori a:

$$\frac{2a}{b^{3/2}} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{1 + |k|}{(1+k^2) \left(\frac{a}{b} - 1 \right)} .$$

D'altra parte essi sono poi moltiplicati per le funzioni $Z_0(\lambda_i r)$, le quali sono, in valore assoluto, non superiori a:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_i b}} (1 + |k|) .$$

Perciò in definitiva i termini dello sviluppo non superano il valore:

$$\frac{4a}{b(a-b)} \frac{1}{\lambda_i} \frac{(1 \pm k)^2}{(1+k^2)} = \frac{4a}{b(a-b)} \frac{1}{\lambda_i} \left(1 \pm \frac{2k}{1+k^2} \right) .$$

E poichè il valore del termine entro parentesi varia poco, oscillando fra 0 e 2, l'ordine di grandezza dei termini dello sviluppo è definito da $1/\lambda_i$, cioè dal reciproco dei numeri naturali, come si era affermato.

Per avere termini dell'ordine di grandezza di $1/100$ occorre dunque calcolare 100 termini della serie, ciò che, evidentemente, non è affatto pratico.

La seconda difficoltà a cui si è accennato richiede che per valori dell'argomento superiori a 16 le funzioni di BESSEL e di NEUMANN vengano calcolate mediante i loro sviluppi asintotici.

Per avere il diagramma completo delle tensioni e degli spostamenti occorre dunque, anche conoscendo già i coefficienti degli sviluppi in serie, calcolare un gran numero di valori di tali funzioni mediante tali sviluppi. Questa difficoltà potrà essere superata mediante la costruzione, tutt'altro che difficile, di estese tabelle delle funzioni di BESSEL e di NEUMANN, ma allo stato attuale sussiste e non c'è mezzo di evitarla.

Si conclude pertanto che, come già affermato in precedenza, la soluzione ottenuta, come pure, più generalmente, le soluzioni che richiedono lo sviluppo di funzioni arbitrarie in serie di funzioni cilindriche, non si presta a una comoda applicazione tecnica e può perciò essere conveniente farne uso solo in casi di grande importanza, quando si disponga di speciali sussidi per i complessi calcoli numerici che occorre svolgere.

NUOVO TIPO DI RAPPRESENTAZIONE PROSPETTICA (*)

(Con una tavola)

G. GIORGI

Accademico Pontificio

SYMMARIVM. — Significatur nova quaedam ratio exprinendi prospectum, a prof. FRANCISCO LA GRASSA inventa, qua vitantur nonnulla classicarum prospectus expressionum incommoda.

La rappresentazione prospettica che da tutti si adopera consiste nel proiettare da un punto di vista gli oggetti esterni, sopra un piano verticale; ed è un caso particolare della proiezione centrale. Si ottiene un disegno in cui le rette sono rimaste rette, in cui le lunghezze in direzione perpendicolare al piano di proiezione vengono accorciate sempre più quanto più rimangono lontane, il che dà appunto l'effetto prospettico della distanza. Questo effetto prospettico viene però a mancare per le lunghezze prese lungo rette verticali e così pure lungo rette orizzontali od oblique che siano parallele al piano di proiezione; nelle prospettive di progetti architettonici le conseguenze si risentono particolarmente nocive per le rette verticali: se si ha una torre o un edificio molto alto, diviso in tanti piani di uguale altezza, i successivi segmenti che ne misurano le altezze vengono rappresentati tutti uguali anche nel disegno, e questo produce un effetto falso, perchè un osservatore che guardi nel vero quei diversi segmenti, li vede sotto un

(*) Nota presentata il 3 gennaio 1947.

angolo visuale sempre più piccolo quanto più si allontanano verso l'alto; e quindi si aspetterebbe di vedere rappresentati sempre più impiccoliti i segmenti alti, nello stesso modo come quelli che si allontanano dall'osservatore in direzione normale.

Il risultato è lo stesso quando si fa una fotografia di un monumento con un buon obbiettivo rettolineare, e tenendo la lastra verticale, secondo le regole classiche; i campanili in fotografia appaiono più lunghi che in realtà.

Vi è qui un assurdo? No, l'occhio vede diversamente da ciò che vede l'apparecchio fotografico quando è adoperato nel modo usuale; perchè l'occhio quando è fisso ha un campo limitato di visione (un grado o due appena); e quando noi osserviamo per esempio un campanile, giriamo l'occhio verso l'alto a mano a mano che guardiamo in alto, e quindi non facciamo la proiezione su un piano fisso. Soltanto gli apparecchi fotografici così detti panoramici fanno qualche cosa di simile a ciò che fa l'occhio, perchè ruotano in tutto il loro insieme intorno al punto nodale posteriore dell'obbiettivo, e proiettano su uno strato sensibile collocato su una superficie cilindrica, anzichè piana; generalmente ciò si fa con la rotazione intorno a un asse verticale, e serve per riprodurre paesaggi estesi in orizzontale, ed evita l'inconveniente lamentato per le lunghezze che si estendono in senso orizzontale, a destra e a sinistra di chi guarda. Con un tale apparecchio, disposto in altro modo, si potrebbe ottenere lo stesso per le verticali, ma non per le verticali e le orizzontali simultaneamente.

L'architetto risente le conseguenze dell'inconveniente di cui parliamo, specialmente per le verticali, e più raramente per le orizzontali, quando facendo il progetto di un monumento, ne costruisce a priori la rappresentazione prospettica col metodo tradizionale, per poter prevedere quale effetto farà il monumento dopo fabbricato. Se si tratta di edifici sviluppati verso l'alto, accade che a costruzione eseguita, questi si presentano più bassi di quanto uno si attendeva. Questo disappunto fu lamentato nella esecuzione del Teatro Massimo di Palermo, progettato dall'architetto BASILE (padre): a edificio quasi ultimato, si vide che i fastigi della cupola e del timpano retrostante si presentavano come schiacciati verso il basso, non rendevano più l'effetto che dovevano; e fu dovuto modificare il progetto in sede di ultimazione, e adattarlo, con spesa addizionale non lieve. Notiamo poi

che lì non si tratta di torri o di costruzioni di grande altezza; la sproporzione era già sensibile in un edificio di quel tipo.

L'architetto prof. LA GRASSA si è preoccupato di questo inconveniente, a cui di solito non pensiamo, e ha ideato, in modo molto semplice, un procedimento di rappresentazione prospettica che vale ad evitarlo. La sua regola è questa: dal punto di vista prescelto si proietta la veduta, non su un piano, ma su una sfera avente per centro il punto di vista. Un punto-oggetto sarà rappresentato da un punto-immagine, il quale avrà la latitudine φ rispetto al piano equatoriale orizzontale condotto pel punto di vista, e la longitudine θ rispetto al piano verticale passante pel punto di vista e per quel punto-oggetto che deve corrispondere al centro dell'immagine. Assunta allora una opportuna costante di proporzionalità K , la rappresentazione in un piano si fa assumendo come coordinate cartesiane del punto rappresentativo, queste:

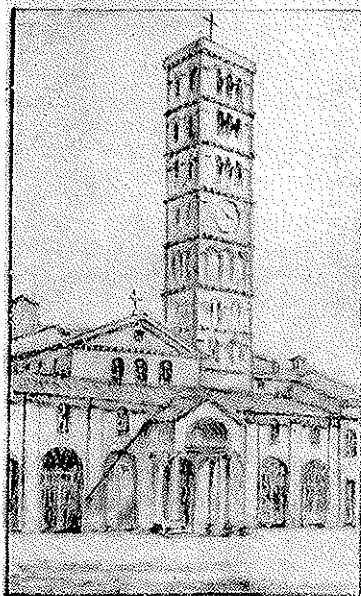
$$x = K\varphi ; \quad y = K\theta$$

La rappresentazione che si ottiene non è fra quelle che in cartografia si classificano fra le equivalenti, le conformi o le prospettiche. Inevitabilmente, le linee rette non sono rappresentate rigorosamente da linee rette; ma questo non sarebbe possibile senza venir meno alle altre finalità che si vogliono raggiungere: la geometria proiettiva lo vieta. Però, nei casi pratici che interessano l'architetto, la deviazione riesce insensibile: se le rette più lunghe dell'oggetto non sono troppo discoste dal centro della figura, rimangono sensibilmente rettilinee. Questo metodo può paragonarsi, sotto certi aspetti a quello della rappresentazione BONNE usata dai cartografi, la quale anche essa risolve il problema di conciliare approssimativamente certe finalità che sarebbero a rigore incompatibili.

Più di ogni ragionamento, interessa giudicare a occhio il risultato. Riproduco qui due figure che mi ha dato il prof. LA GRASSA, e che riproducono la chiesa di S. M. in Cosmedin, di Roma. Quella a sinistra è fatta con la prospettiva tradizionale, ed è la stessa che si ottiene con la fotografia; quella a destra è riprodotta con la prospettiva nuovo tipo (*prospettottica* nella terminologia dell'inventore). Se qualche dubbio rimane attraverso il resoconto teorico, scompare guardando

quelle figure. È evidente che quella di destra dà l'impressione della realtà: in quella di sinistra il campanile appare sproporzionatamente alto, e fa perdere quell'impressione gradevole che si ha del monumento nella realtà.

Ho creduto necessario segnalare e confermare col ragionamento e con la dimostrazione pratica, la proposta di questa innovazione, che si deve al prof. LA GRASSA, e che è tanto interessante, così per la teoria quanto per le applicazioni pratiche.



S. MARIA IN COMEDINI. ROMA.
 CON LA "PERSPECTIVA LINEARE."
 DEL MEDESIMO PUNTO DI VISTA.



LIBERTO OTTICO
 CON LA "NUOVA RAPPRESENTAZIONE PROSPETTICA."
 "PERSPECTIVOTICA." LA STESSA.

ACTINISCUS NEI MARI ITALIANI^(*)

(Con sei figure)

D. VITO ZANON S. O.

SVMMARIVM. — Dantur notitiae circa genus *Actiniscus* Ehr., algam unicellularem endoscheletro siliceo praeditam, Silicoflagellatarum familiae propinquam, cuius praesentia in mari Adriatico et Tyrrhemico primo indicatur.

Accennai in un mio studio edito nel 1931 [10] sul « Mare sporco del Golfo di Fiume », alla presenza in Adriatico dell'*Actiniscus sirius* Ehr.

Avendone recentemente rinvenuto un congenere anche nel Tirreno, e precisamente in Sardegna, credo utile dirne qualche cosa per isprunare i ricercatori nostrani ad occuparsi di questi microorganismi ancor poco conosciuti nella loro citologia e biologia.

Il genere fu istituito nel 1840 dall'EHRENBERG che per primo li rinvenne fossili in un calcare terziario di Grecia, e viventi nel fango del porto di Cristiania, nominando quello fossile: *Dichtyocha (Actiniscus) pentasterias*, quello vivente: *Dichtyocha (Actiniscus) sirius*.

L'EHRENBERG riteneva questi microorganismi appartenenti al regno animale come i Radiolari, di cui hanno qualche rassomiglianza, come la *Dichtyocha*, che oggi è positivamente riconosciuta come alga unicellulare a scheletro siliceo della Famiglia delle Silicoflagellate, e come le Diatomee anch'esse decisamente riconosciute per alghe.

Più tardi, nel 1844, il KÜTZING [8] li ascrisse fra le alghe, sicchè anche il nostro sommo algologo G. B. DE TONI li menziona nella sua

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Gola il 20 novembre 1946.

Sylloge algarum omnium [3], ponendoli tuttavia fra i generi da escludersi dalle Alge Bacillariacee o Diatomee, e ciò dietro le osservazioni dello SCHÜTT [11] che nel 1911 credette di identificare nell'*Actiniscus* lo scheletro siliceo di una Flagellata chiamandola a sua volta *Gymnaster*.

Sono microorganismi delle dimensioni di circa 40 μ , formati da uno scheletro siliceo che ha per base un disco dal quale si partono ordinariamente cinque raggi, talora biforcati, a forma di stella, più o meno curvati in sotto, formando concavità. Sopra il disco sorge una placca pentagonale, più o meno regolare, che regge tante creste quanti sono i raggi della stella. I raggi sono riuniti fra loro da espansioni silicee e della loro nervatura mediana ispessita e fornita talora di creste silicee si partono ramificazioni più o meno ispessite a reticolato decrescente verso la punta.

Hovasse e Deflandre sono i Protistologi Francesi moderni che hanno studiato più a fondo tali microorganismi.

Hovasse d'accordo collo Schütt, ammette che il loro guscio è formato da due stelle poste una contro l'altra, punta contro punta, concavità contro concavità, ma non è ben certo che la cosa sia così, perchè ha osservato anche stelle incastrate una entro l'altra, ed alla osservazione dello Schütt che si possa trattare di endoscheletro di Peridinee, dice che se così fosse realmente, esse sarebbero Peridinee tutt'affatto diverse dalle altre, e, considerata la loro costituzione cellulare e nucleare, essi (i *Gymnaster*) attirerebbero fra le Dinoflagellate tutto il gruppo delle Ebriacee che sono ritenute universalmente come Silicoflagellate.

L'Hovasse appoggia la sua teoria, che gli *Actiniscus* constino di due valve anche all'osservazione fatta dal Wright [12] che nel 1907 rinvenne nel plancton della Nuova Scozia un simile accoppiamento di due valve di *Gymnaster pentasterias*.

Ora, la figura da me data nel citato lavoro del mare sporco di Fiume, mostra appunto due stelle unite fra loro per mezzo di due punte, e appartengono all'*Actiniscus sirius* Ehr.

Faccio osservare che questo materiale proviene dal fondo del mare, mentre la forma rinvenuta a Capo Sperone in Sardegna proviene dal lavaggio di *Corallina* formante un voluminoso ammasso sull'ospite *Cystosira mediterranea*, o quindi costituente un ambiente simile

al fondo di mare, impregnato com'era di fango e di sabbia. Questo per dire che gli *Actiniscus* oltre trovarsi nel plancton marino, più spesso vivono nel fondo.

Il « mare sporco » è un fenomeno frequente nell'Adriatico, per cui, in certe circostanze, si ha uno sviluppo straordinario di Diatomee di fondo, le quali, nel processo di repentina e stragrande riproduzione, emettono per l'azione clorofilliana una grande quantità di bollicine di ossigeno che ad un certo punto funzionano da aerostati, portando seco alla superficie del mare che inquinano per immenso distese, Diatomee, muco e fango del fondo stesso.

Il materiale di studio è stato da me trattato per poche ore con acido nitrico a freddo, processo che adottato per l'esame delle Diatomee marine che, per la maggior parte essendo poco silicizzate sarebbero facilmente intaccate dagli acidi forti a caldo.

Non sarebbe quindi improbabile che almeno una parte della sostanza che ordinariamente serve anche di sostegno ai gusci delle Diatomee epifitiche e che forse si trova anche nell'*Actiniscus*, cioè il coleoderma, sia andato esente dalla corrosione dell'acido anche nel nostro caso, per cui troviamo le due stelle ancora in parte aderenti per alcune delle loro punte. A meno che non ci trovassimo in presenza di un caso di copula fra due individui distinti.

LEMMERMANN [9] nel 1901 riteneva che l'*Actiniscus pentasterias* potesse essere una Silicoflagellata, ma con dubbio potendo anche essere unito alle Peridinee ma con più spiccati caratteri di Radiolario, mentre BELAR [1] nel 1926 sarebbe anch'egli stato propenso a situarlo fra i Radiolari e le Peridinee.

GEMEINHARDT [6] nel 1931 propende pure a collocarlo fra i Radiolari e i Flagellati.

DEFLANDRE [2] nel 1932 non sarebbe d'accordo con l'HovASSE di unire l'*Actiniscus* alle Silicoflagellate della famiglia delle Ebriacee, perchè troppe sono le differenze fra la struttura degli scheletri silicei e fra il loro modo di sviluppo che comporterebbero una certa eterogeneità attuale nella stessa famiglia. Egli le ascriverebbe piuttosto alle Dinoflagellate.

Allo stato attuale degli studi si sarebbe dunque quasi universalmente d'accordo nel ritenere il genere *Actiniscus* come un'alga flagel-

lata vicina alle Silicoflagellate, e giacchè il FRENGUELLI [5] nel 1900 ha messo in evidenza che la impalcatura dello scheletro è formata da silice perforata, egli ne farebbe una famiglia a sè chiamandola delle *Actinisceae*. Egli inoltre propende a mantenere il nome di *Actiniscus* dell'EHRENBERG, anzichè quello di *Gymnaster* dello SCHÜTT.

L'EHRENBERG ha stabilito diverse specie del genere *Actiniscus* di cui alcune però potranno passare in sinonimia, alcune delle quali sono fossili, altre ancora viventi e fossili.

Esse sono:

A. pentasterias Ehr. - Mikrog. taf. 35 A, XXIII, fig. 1; taf. 33, XVII; fig. 1; taf. 36, fig. 18, fig. 61; taf. 19, fig. 45; taf. 20, fig. 48. Rinvenuta nel ghiaccio proveniente dal Mare Artico presso Assistance Bay. Fossile nei depositi tripolacei di Virginia, Is. Nicobari, Egina, Zante.

A. tetrasterias Ehr. - Mikrog., taf. 18, fig. 62. Fossile ad Egina.

A. sirius Ehr. - Ber. Berl. Akad., 1844, pag. 68. Mikrog., taf. 18, figg. 59-60; taf. 33, fig. 1. Vivente sulle coste della Norvegia, nell'Oceano Atlantico. Fossile in Virginia.

A. discus Ehr. - Ber. Berl. Akad., 1844, pag. 45. Mikrog., taf. 18, fig. 49. Kützing, Species algarum, pag. 141. Fossile a Oran.

A. rota Ehr. - Ber. Berl. Akad., 1844, pag. 76. Mikrog. taf. 21, fig. 50. Kützing, Spec. Alg., pag. 141. Fossile a Oran.

A. lancearius Ehr. - Ber. Berl. Akad., 1844, pag. 199. Kützing, Sp. Alg., pag. 141. Vivente nell'Oceano Antartico.

A. vicenarius Ehr. - Abh. Berl. Akad., 1839, pag. 150; 1872, taf. VI, 2, fig. 11. Vivente nel plancton del Golfo Panaragna, in Brasile.

A. stella Ehr. - Mikrog. taf. 22, fig. 52. Fossile a Caltanissetta.

A. elegans Ehr. - Mikrog. taf. 22, fig. 51. Fossile a Caltanissetta.

A. heptogonius Ehr. - Mikrog. taf. 20, fig. 40. Fossile a Zante.

Il MEUNIER [10] ha rinvenuto nei mari artici una specie vivente nel plancton, chiamandola *Gymnaster striatum*. La specie ivi pure trovata e da lui chiamata *Gymnaster helix* è probabilmente una Diatomea del genere *Bacteriastrum*.

I depositi tripolacei di Egina e Zante in Grecia appartengono al Miocene superiore. Quelli di Caltanissetta ed Oran appartengono al Miocene medio.

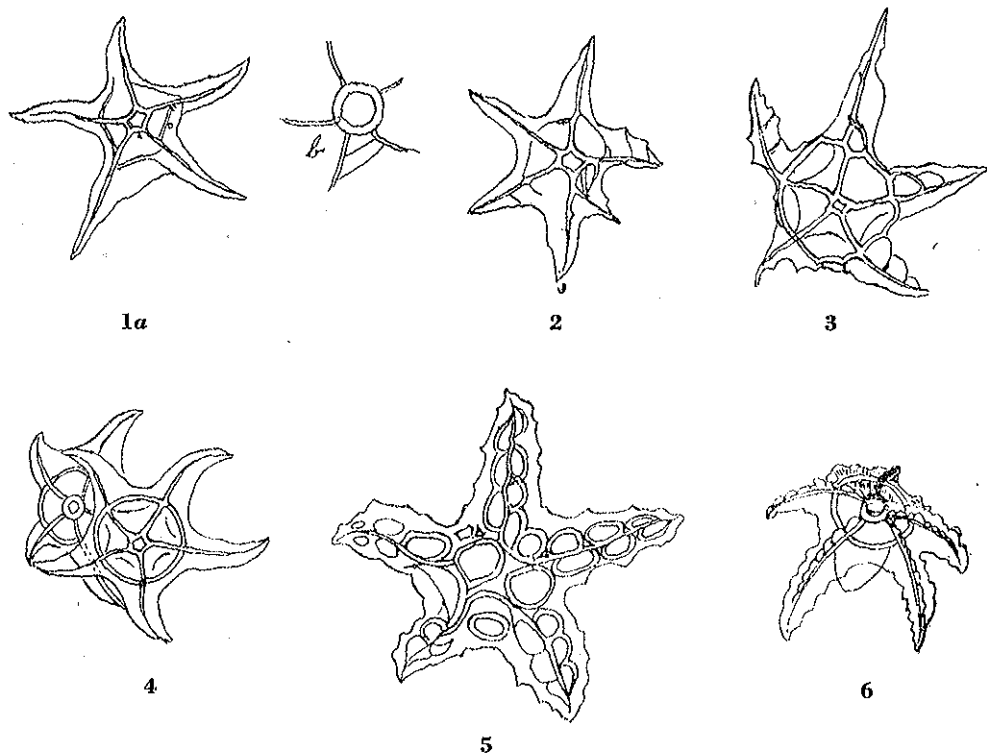
Recentemente il FRENGUELLI, *loc. cit.*, rinvenne le specie: *pentasterias*, *stella* ed *elegans* nel deposito tripolaceo di Moron in Ispagna, ascritto dai geologi al Miocene inferiore.

L'*A. sirius* venne dallo stesso rinvenuto fossile anche a S^{ta}. Monica (California), deposito appartenente al Miocene medio.

L'Aquitano adunque, al quale appartiene il deposito di Moron, è l'orizzonte più antico in cui vennero ritrovati fossili questi microorganismi, giunti invariati fino ai nostri tempi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BÉLAR K., *Der Formwechsel der Protistenkerne, ein vergleichend morphologische*. G. Fischer, Jena, 1926.
- [2] DEFLANDRE G., *Remarques sur quelques Ébriacées*. « Bull. Soc. Zool. de Fr. », T. LVII, 1932, pag. 302.
- [3] DE TONI G. B., *Sylloge algarum omnium*. Vol. II, Bacillarieae, Patavii, 1891.
- [4] EHRENBERG G., *Mikrogeologie; das Erden und Felsen schaffende Wirken des unsichtbar kleinen selbständigen Lebens auf das Erde*, Leipzig, 1844.
- [5] FRENGUELLI G., *Considerationes sobre los Silicoflagellados fósiles*. « Rivista del Museo de la Plata » (Buenos Aires), T. II, Sect. Paleont., 1940.
- [6] GEMEINHARDT K., *Organismenformen auf der Grenze zwischen Radiolaren und Flagellaten*. « Ber. d. Dent. Botan. Gesellsch. », 49-2, pagg. 103-110, Berlin, 1931.
- [7] HOVASSE R., *L'enantiomorphisme des squelettes chez les Silicolagellées*. « Bull. Soc. Zool. de Fr. », LVII, 1932.
- [8] KÜTZING F. T., *Species Algarum*, 1849.
- [9] LEMMERMANN E., *Silicoflagellatae; Erg. Reise nach dem Pazifik, H. Schauinsland 1896-97*. « Ber. d. Botan. Gesellsch. », XIX, Berlin, 1901.
- [10] MEUNIER A., *Microplankton des Mers de Barents et de Kara*. Duc d'Orleans, Campagne Arctique du 1907, Bruxelles, 1910.
- [11] SCHÜTT F., *Die Peridinien des Planktonexpedition*, I Teil., « Hensen, Exp. d. Plankton d. Humboldt. Stiftung », Kiel u. Leipzig, 1895.
- [12] WRIGHT A., *The plankton of eastern Nova Scotia waters*. « Furter Contrib. to Canadian Biol. Sectional Paper », n. 22, Ottawa, 1907.
- [13] ZANON V., *Esame di un campione di « Mare sporco » del Golfo di Fiume*. « Mem. Pont. Accad. delle Scienze Nuovi Lincei », vol. XV, Roma, 1931.



SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. — *Actiniscus stella* Ehr. — Rinvenuto nel fango del « Mare sporco » di Fiume. La fig. b mostra il disco terminale sotto altro punto di messa a fuoco.

- » 2. — *Actiniscus stella* Ehr. — Del « mare sporco » di Fiume, forma anomala con un sesto raggio.
- » 3. — *Actiniscus pentasterias* Ehr. — Del « mare sporco » di Fiume.
- » 4. — *Actiniscus sirius* Ehr. — Del « mare sporco » di Fiume. Due gusci ancora aderenti per due estremità dei raggi.
- » 5. — *Actinircus elegans* Ehr. — Nel lavaggio di alghe marine di Capo Sperone, in Sardegna.
- » 6. — *Actiniscus* sp., differisce dall'*Q. Sirius* per avere le nervature mediane dei raggi fornite di creste. Sopra il disco basale si eleva il disco terminale che mostra in parte la sua divisione in creste prominenti. Rinvenuto nel « mare sporco » di Fiume.

CONTRIBUTO ALLA CONOSCENZA
DEI *PHORIDAE* (INSECTA, DIPTERA)
TERMITOFILI DEL BRASILE (*)

(Con sei figure)

FILIPPO SILVESTRI

Accademico Pontificio

SYMMARIVM. — Dipterorum Phoridarum species 7 Auctor nominat in Brasilia, in Termitorum nidis lectas, quarum tres ut species novas describit et duas ad genera nova etiam refert.

Ricordo in questa nota 7 specie di *Phoridae* da me trovate nel Brasile nei viaggi del 1935 e 1937, tra le quali figurano 3 specie nuove e 2 generi nuovi (*Typhlophorina* e *Paurophora*) presentanti caratteri molto particolari. Di queste specie le seguenti: *Typhlophorina psociformis*, *Ternitophorides heterospinalis*, *Oryptophora coeca*, *Paurophora Borgmeieri* sono da considerarsi come Termitofili *euxeni*, mentre le altre (*Puliciphora ossuaria*, *Puliciphora (Ternitometoecus) inquirenda*, *Acantistoptera* sp.) come termitofili accidentali.

1. *Puliciphora ossuaria* Schmitz

Raccolsi un esemplare femmina di questa specie, nei dintorni di S. Paolo (Brasile) in una galleria di conservazione di erbe secche di *Syntermes grandis* (Ramb). Questa specie deve considerarsi come termitofilo accidentale, perchè i tipi, che servirono per la descrizione della specie, furono raccolti su ossa in Parecy Novo (Brasile meridionale).

(*) Nota presentata il 30 gennaio 1947.

2. *Puliciphora (Ternitometoecus) inquirenda* sp. n.

(Fig. I-II)

Femina. Corpus capite et thorace cum antennis pedibusque umbrinis, abdomine lamina mediana tergiti 3ⁱ (2ⁱ apparentis) subtestacea, eiusdem tergiti parte laterali et tergitis 4^o ad 7^{um} isabellinis, ventre et segmentis 8^o ad 10^{um} pallidioribus.

Caput macrochaetis typicis 8 + 8 robustis, minutissime spinulosis, oculis magnis, brevissime setosis, antennis aristae articulinis 1^o et 2^o brevibus subaequalibus, 3^o parte proximali vix hirta, cetera multo et brevissime plumata, palpis brevibus (mm. 0,20 longis), parum arcuatis, margine convexo macrochaetis brevibus robustis spinulosis 5-6 et macrochaetis parvis 2 proximalibus nec non setis brevioribus nonnullis, rostro brevi (0,20 longo), labro lateribus convexis labii latera parum superante, acuto, labio subrectangulari, labellis latiusculis, setis paucis brevibus et brevioribus instructis.

Thorax. Pronotum perparvum fere perpendiculare lateraliter sublobato setis numerosis brevissimis instructum; mesoscutum transverse subrectangulare setis brevissimis sat numerosis et macrochaetis 6 longis, (mm. 0,28) robustis nudis, quarum 2 anticae laterales et 4 posticae, alis nullis, halteribus nullis.

Pedes omnes macrochaetis nullis, setis brevissimis numerosis, 1ⁱ paris tibia inermi, tarsi articulo 1^o setis paucis (7) per marginem internum quam ceterae parum longioribus; pedes 2ⁱ paris tibia calcare interno longiusculo, spinuloso, tarsi articulo 1^o setis c. 12 quam ceterae parum longioribus sed robustioribus, pedes paris 3ⁱ tibia calcare brevi externo et interno longo nudis, tarsi articulo 1^o facie interna setarum pectinibus 9 aucto.

Abdomen praeter laminam tergalem medianam tergiti 3ⁱ (2ⁱ apparentis) parum corneam setis brevissimis transverse 6-7 irregulariter seriatis instructam, dermate molli aciculis minimis omnino obsesso et setis brevissimis sparsis, a segmento 8^o valde attenuatum subcylindraceum, tergito 6^o (5^o apparente) glandula mediana antica parva instructo, tergito 10^o parvo subtriangulari setis proximalibus 2 et apicalibus 4 brevibus instructo, sternito 10^o minore, setis apicalibus bre-

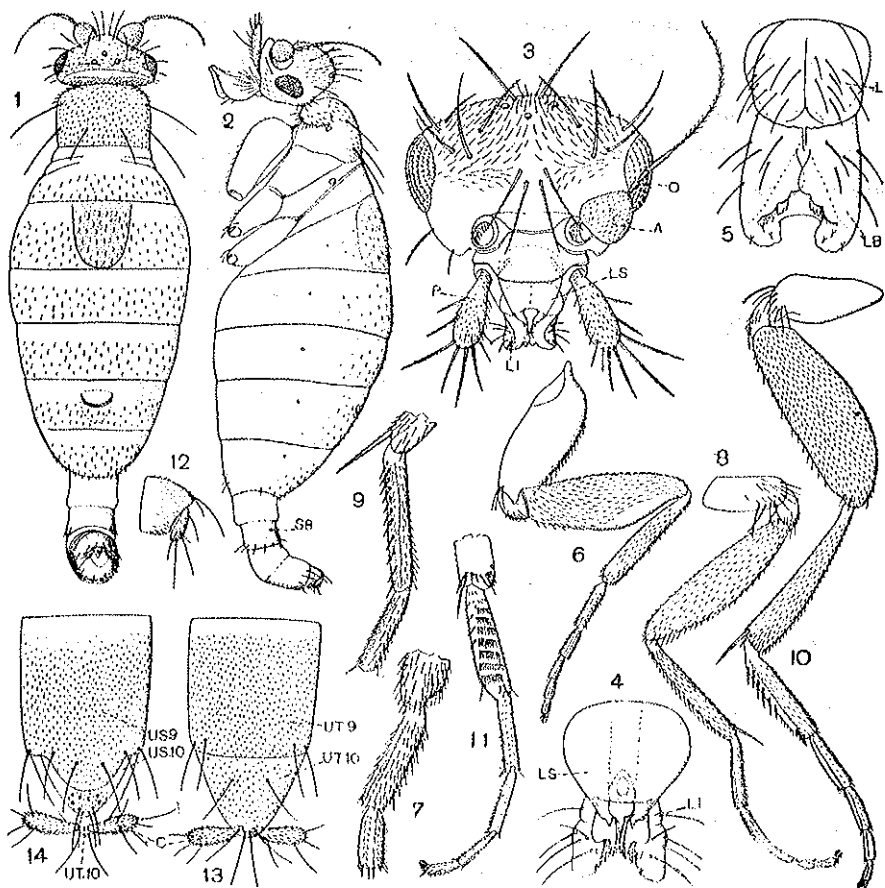


FIG. I.

Puliciphora (Ternitometoecus) inquirenda, femina: 1. corpus pronum; 2. corpus lateraliter inspectum; 3. caput pronum; 4. rostrum pronum; 5. rostrum supinum; 6. pes 1^a paris; 7. eiusdem tibiae apex et tarsi articuli 1^{us} et 2^{us} ex facie interna inspecti; 8. pes 2^a paris; 9. eiusdem tibiae apex et tarsi articuli 1^{us} et 2^{us} ex facie interna inspecti; 10. pes 3^a paris; 11. eiusdem tibiae apex et tarsus et praetarsus ex facie interna inspecti; 12. abdominis pars postica a segmento 10^o lateraliter inspecta; 13. 14. abdominis pars postica a segmento 9^o prona et supina (figg. varie ampliatae).

rioribus 4 et minimis proximalibus utrimque 3-4; cerci breves apicem versus paullum incrassati setis brevibus apicalibus 3 et praeapicalibus 2.

Long. corporis mm. 2,10, lat. capitis 0,20, long. antennarum 0,50, rostri 0,24, lat. abdominis segmenti 5ⁱ 0,66, long. pedum paris 3ⁱ 2,20.

Mas. Corpus brunneum pedibus parum pallidioribus, abdomine parte ventrali avellanea; alae hyalinae pallide brunneis.

Palpi quam feminae macrochaetis parum brevioribus; mesoscutum macrochaetis lateralibus utrimque 6, quarum 2 posticae quam ceterae parum longiores, et macrochaetis 2 sublateralibus (utrimque 1), scu-

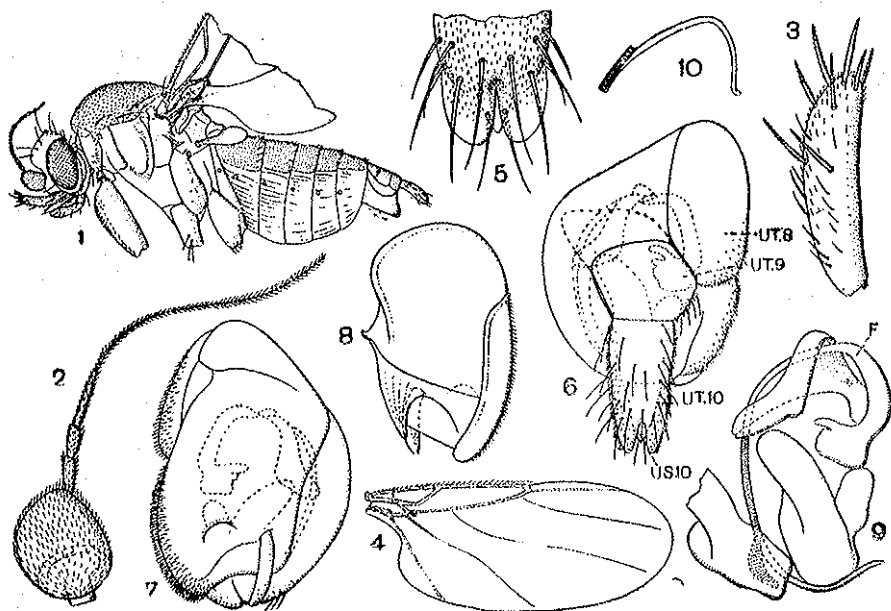


FIG. 11.

Puliciphora (Ternitometoecus) inquirenda, mas.: 1. animalculum lateraliter inspectum; 2. antenna; 3. palpus maxillaris; 4. ala; 5. abdominis apex supra inspectum; 6. abdominis pars postica a segmento 8° prona; 7. abdominis pars postica a segmento 8° (10° abrupto) supina; 8. sternitum 8^{um} a facie interna inspectum; 9. organum copulativum; 10. pseudoflagelli pars distalis: F organi copulativi pseudoflagellum, litterae ceterae ut in fig. I. (figg. varie ampliatae).

tello macrochaetis 2, tegulis macrochaetis brevioribus 2 et setis paucis minoribus. Alae subcosta brevissima ad costam subperpendiculari, R1 brevi et angulum obtusum pone medio formante, R2-R4 fuis, R5 obsoleto, M1 et M2 integris, Cu integro, 1A obsoleta; halteres breves aliquantum clavati.

Abdomen quam caput et thorax simul sumpta parum longius, usque ad segmentum 7^{um} gradatim parum angustatum, segmento 8° angustiore, 9° quam 8^{um} et 10° praesertim quam 9^{um} multo angustiore,

tergitis 3° et 7^{um} quam cetera parum longioribus, tergitis 3° ad 7^{um} setis nonnullis brevissimis instructis, segmentis 8° et 9° asymmetricis ut fig. II, 6 et 7 demonstrant, segmento 10° depressum duplo longiore quam ad basim latiore, setis brevissimis c. 11 + 11 instructum, apice anguste aliquantum sinuoso, sterniti apicem manifestum relinquente.

Organum copulativum (Fig. II, 9) flagello longo sub sterniti noni basi oriente instructo.

Long. corporis mm. 2,10, long. alarum 2, alarum lat. 0,90, long. pedum 3ⁱ paris 1,50.

Habitat. Brasilia: Campo Grande (Matto Grosso); exempla descripta in nidi cuniculo a *Syntermes grandis* relicto legi.

Observatio. Speciem hanc ad subgen. *Termitometoecus* Borgm. et Schmitz refero, quia feminae thorax rudimentis alarum et halterum caret, et ad speciem novam quia maris metatarsus primus haud dilatatus est.

Gen. *Typhlophorina* nov.

(Fig. III)

Corpus elongatum abdomine ovali parum convexo a segmento 6° gradatim parum angustato, segmentis a 9° ad ultimum angustioribus.

Caput parvum, pronum $1/4$ longius quam postice latius, supra setis brevissimis numerosis instructum linea apodemali mediana signatum et antice setis submedianis 2 brevibus et 2 subanticis vix brevioribus, setis duabus posticis submedianis brevibus nec non setis brevibus marginalibus anticis utrimque 3, ocellis et oculis nullis, antennis anticis sublateralibus, quam capitis latitudo duplo longioribus, articulo 3° subpyriformi, parum longiore quam latiore, flagello articulino 1° quam 2^{us} paullum longiore, arista quam articulini 1^{us} et 2^{us} simul sumpti $3/4$ longiore plumis brevibus ad apicem gradatim brevioribus, palpis porrectis parte distali paullum dilatata, superficie praesertim marginali externa setis brevioribus nonnullis subtilibus et apice macrochaetis brevibus duabus brevissime spinulosis, rostro brevi, palporum apicem haud superante, latiusculo, labro quam labium vix brevior.

Thorax quam caput aliquantum angustior, pronoto membranaceo dermate aciculis minimis obsesso et setis nonnullis brevioribus, me-

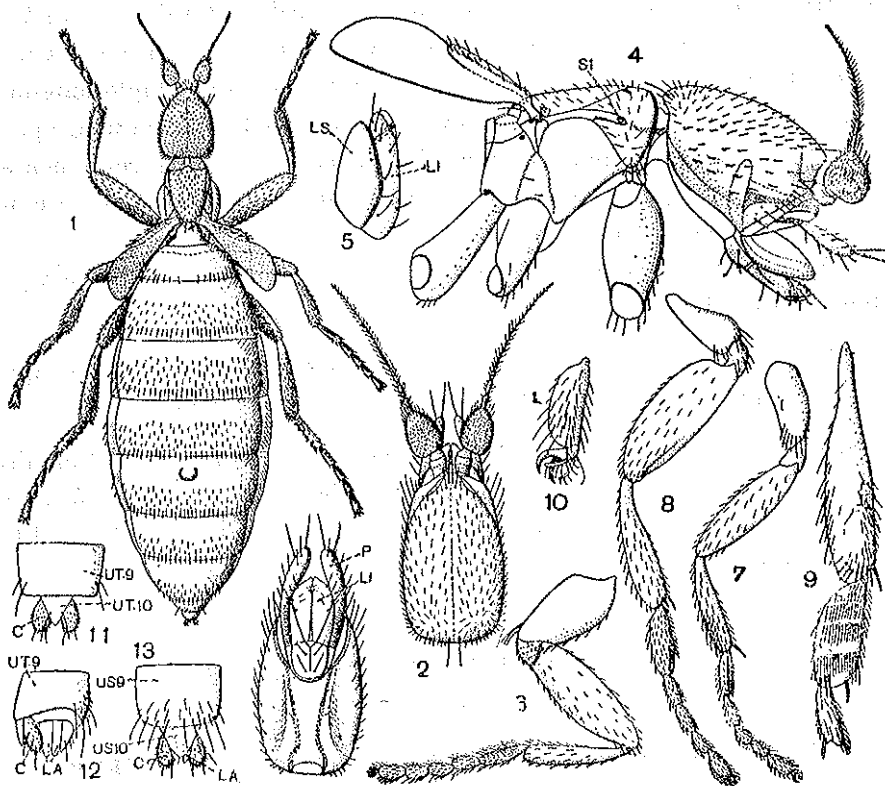


FIG. III.

Typhophorina psociformis: 1. animalculum pronum; 2. caput pronum; 3. caput supinum; 4. caput et thorax lateraliter inspecta; 5. rostrum lateraliter inspectum; 6. pes 1ⁱ paris; 7. pes 2ⁱ paris; 8. pes 3ⁱ paris; 9. pedis 3ⁱ paris tibia et tarsi articuli 1^{us} et 2^{us} ex facie interna inspecta; 10. tarsi articulus ultimus et praetarsus lateraliter inspecti; 11.-13. abdominis pars postica a segmento 9^o supra, lateraliter et subtus inspecta: C cerci, LA laminae anales, LI labium, LS labrum, S stigma thoracicum, UT urotergitum, US urosternitum (figg. variae ampliatae).

soscutum subrectangulare fere 2/5 longiore quam latiore superficie laevigata setis brevissimis sparsis sat numerosis et postice setis submedianis brevibus utrinque 2, quarum interna quam externa parum longior est, scutello perparvo nudo.

Alae obsoletae (mm. 1,50 long. et 0,40 latae), vena tantum forsitan radiali simplici usque ad medium marginem anticum extensa et setis brevioribus nonnullis longitudinaliter biseriatis, superficie alari tota setis minimis obsessa; halteres nulli.

Pedes 1ⁱ paris coxa longiuscula sed quam femor brevior, praeter setis marginalibus externis nonnullis brevissimis, nuda, femore setis paucis brevissimis sparsis, ad apicem parum longioribus et magis numerosis, tibia breviter et sparse setosa et per marginem internum distalem setis parum magis numerosis et parum longioribus, tarsi articulo 1^o setarum breviorum, pectinibus longitudinalibus duobus (marginali interno et submarginali interno); pedes 2ⁱ paris tibia calcare interno longiusculo, attenuato, tarsi articulo 1^o setarum breviorum pectine marginali interno et submarginali longitudinalibus aucto, pedes 3ⁱ paris tibia calcaribus 2 (brevior et brevi), tarsi articulo 1^o brevi, articulos 2^{um} et 3^{um} simul sumptos longitudine paullum superante, margine interno pectine setarum breviorum et facie interna setarum pectinibus transversalibus 4, praetarsos forma typica.

Abdomen elongatum subellipticum convexiusculum segmento 5^o quam caput 2/3 latiore, tergito 2^o (1^o apparente) brevi setis brevissimis uniseriatis posticis et paucis lateralibus, tergitis 3^o ad 8^{um} longitudine subsimilibus latitudine a 5^o gradatim angustatis, superficie setis brevissimis transverse 3-4 seriatis instructis, 6^o (5^o apparente) glandula mediana antica parva, sternitis 2^o ad 8^{um} setis nonnullis sparsis brevissimis, segmento 9^o brevi et quam praecedens multo angustiore, supra setis brevioribus 8 posticis et c. 10 praecedentibus; cerci breviores apicem versus parum latiores, setis brevioribus apicalibus 3.

Mas ignotus.

Typus: *Typhlophorina psociformis* sp. n.

Observatio. Genus hoc valde peculiare est et capitis, thoracis, abdominis forma a *Puliciphora* et a generibus proximis facile distinguendum est.

3. *Typhlophorina psociformis* sp. n.

Corpus pallide avellaneum totum, notis ceteris vide generis descriptionem et figuras.

Long. corporis mm. 1,30, long. capitis 0,22, eiusdem lat. 0,20, rostri long. 0,12, long. antennarum 0,24; lat. thoracis 0,18; long. pedum paris 3ⁱ 0,80.

Habitat. Brasilia: Jabaquara (S. Paulo); exempla nonnulla in nido *Anoplotermes hypogei* inter operarios et larvas ambulancia legi.

Termitophorides heterospinalis Borgmeier

(Fig. IV)

Riferisco a questa specie due esemplari che raccolsi in un nido di *Cornitermes lagoasinus* Silv. e la ridescrivo colle necessarie figure. La descrizione del Borgmeier fu fatta su esemplari raccolti a Morro Velho (Minas Geraes) in nido di termite indeterminato.

Caput cum antennis et trophis, thorax cum pedibus brunneis, abdomine stramineo.

Corpus elongatum antice parum, postice a segmento 7° multo attenuato (segmentis 7° ad 10^{um} maxima pro parte retractilibus).

Caput breve postice latum, si pronum (in positione naturali) duplo postice latius quam longius, circumlitione subsemiovali, macrochaetis superis 14: posticis 6, praecularibus utrimque 1, frontalibus subanticis submedianis 1 + 1, lateralibus utrimque 1, anticis submedianis 1 + 1; ocellis sistentibus; oculis sat magnis, hirtellis; antennis articulo 3° subpyriformi, flagello quam antennae pars proximalis aliquantum magis quam duplo longiore, flagelli articulis 1° e 2° subaequalibus brevibus, parte cetera quam articuli dicti paullum magis quam duplo longiore brevissime plumosis, palpis porrectis, macrochaetis 5 longis robustis brevissime plumosis instructis, rostro subtili quam palpi (macrochaetis exclusis) paullum longiore, labro triangulari acuto, labellis attenuatis, tractu longo separatis et singulo apice ramo externo latiusculo et interno angustiore diviso.

Thorax mesoscuto macrochaetis 4 + 4, quarum 2 submedianae subposticae et utrimque 3 laterales (subpostica, submediana, lateralis), scutello macrochaetis brevibus 2; alae brevissimae (cum macrochaetis mm. 0,40 longis), lamina parva irregulari ut fig. IV, 16 demonstrat, macrochaetis longiusculis robustis 5 aucta; halteres longiusculi (mm. 0,20 longis), elongati subovales.

Pedes 1ⁱ paris coxa quam femor parum brevior, facie externa setis brevissimis instructa, tibia macrochaetis externis superis robustis (subproximali et subdistali), 2ⁱ paris tibia macrochaetis superis 3 et macrochaetis 2 apicalibus (internis supera et infera) longis, 3ⁱ paris tibia

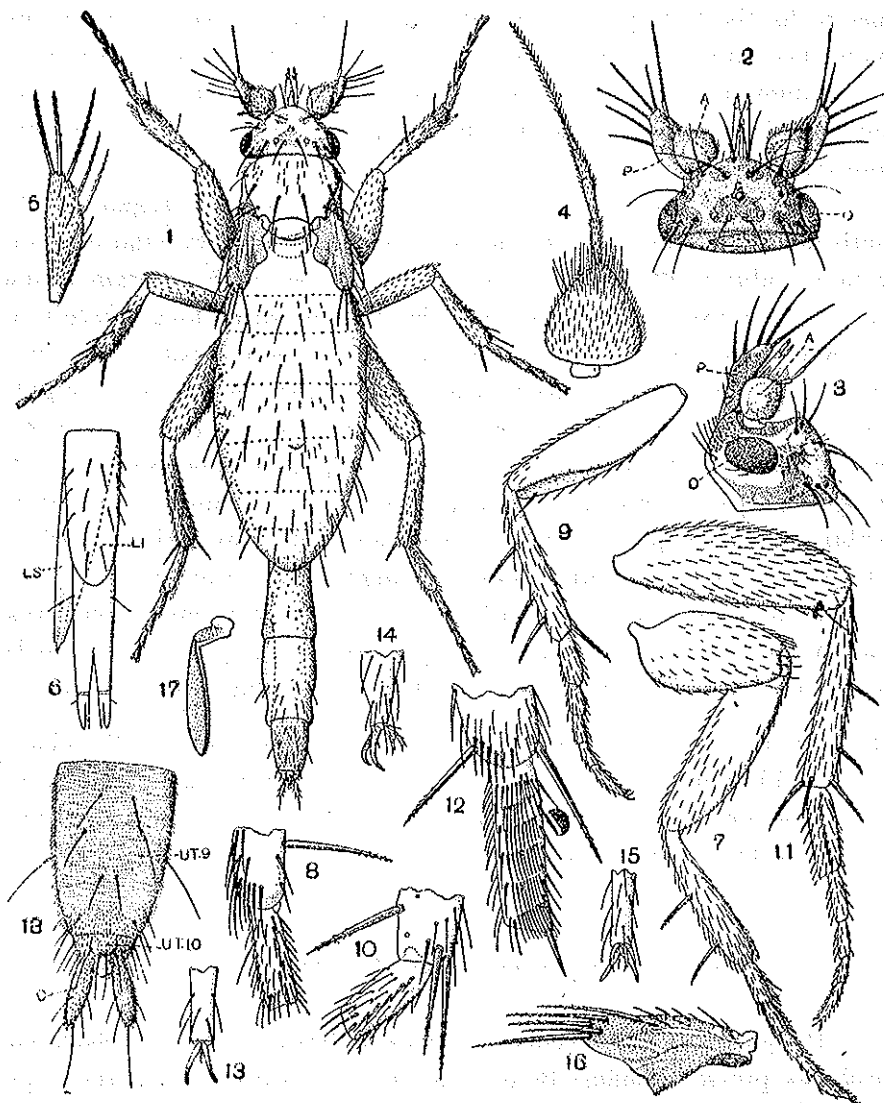


FIG. IV.

Termitophorides heterospinalis: 1. femina prona; 2. caput pronum; 3. caput lateraliter inspectum; 4. antenna; 5. rostrum supinum; 6. pes 1^{us} paris; 7. eiusdem tibiae apex et tarsi articulus 1^{us} ex facie interna inspecti; 8. pes 2^{us} paris a femore; 9. eiusdem tibiae apex et tarsi articulus 1^{us} ex facie interna inspecti; 10. pes 3^{us} paris a femore; 11. eiusdem pedis tibiae apex et tarsi articulus 1^{us} ex facie interna inspecti; 12-14. tarsi apex et praetarsus supra, lateraliter et subtus inspecti; 15. ala; 16. halter; 17. abdominis pars postica a segmento 9^o (8^o apparente) prona: C. cerci, LI labium, LS labrum, UT₁₀ urotergitum 10^{um}, US₁₀ urosternum 10^{um} (figg. varie ampliatæ).

macrochaetis ut 2ⁱ paris, tarsi articulo 1° facie interna setarum brevium pectinibus 6 aucta, tarsi omnes articulo ultimo attenuato, praetarsi unguibus attenuatis modice arcuatis, pulvillis utrimque singulo ad oppositum cum laciniis tangente, empodio seta brevi mediana composito.

Abdomen tergitis et sternitis totis membranaceis, segmentis 2-5 setis nonnullis brevissimis et macrochaetis posticis 4, 6, 8, 8 (ad mm. 0,12 longis) subtus a 3° setis nonnullis brevibus per partem latam medianam et setis paucis sublateralibus et lateralibus parum longis, tergito 6° (5° apparente) apertura glandulari mediana subantica parva, tergitis 7° et 8° setis brevibus et macrochaetis nonnullis longiuseulis irregulariter transverse biseriatis, 8° setis 3 + 3 superis, 9° supra setis 2, 2, 2 submedianis et 2 lateraliibus, subtus setis 8 proximalibus, segmento 10° tergito perparvo subsemiovali setis 4 instructo, sternito circumlitione subtriangolari superficie praeter peluriam setis brevissimis c. 16 instructo; cerci breves subcylindracei, singulo setis brevibus 6.

Long. corporis cum segmentis posticis extroflexis mm. 2, cum segmentis dictis introflexis 1,60; lat. capitis 0,30; long. antennarum 0,34, rostri 0,24, alarum cum setis apicalibus 0,40, pedum paris 3ⁱ 1,40.

Habitat. Exempla tria legi ad Lagoa Santa (Minas Geraes) Brasilia in nido *Cornitermes lagoasinus* Silv. inter larvas et operarios, sed pedum articuli ultimi forma speciem hanc etiam super termitidos corpus insipientem suspicio.

Cryptophora coeca Borgmeier

Di questa specie raccolsi pochi esemplari in un nido di *Syntermes molestus* presso Bomfim (Bahia) mentre si trovavano a cavallo sopra il corpo di larve o di piccoli soldati e li ricordai in altra nota (¹), nella quale detti anche le figure delle parti più caratteristiche del corpo.

(¹) SILVESTRI F., *Primo contributo alla conoscenza dei Termitofili viventi con specie di Syntermes*. « Commentationes, Pontificia Acad. Scient. », IX (1945), pag. 559, fig. XVIII.

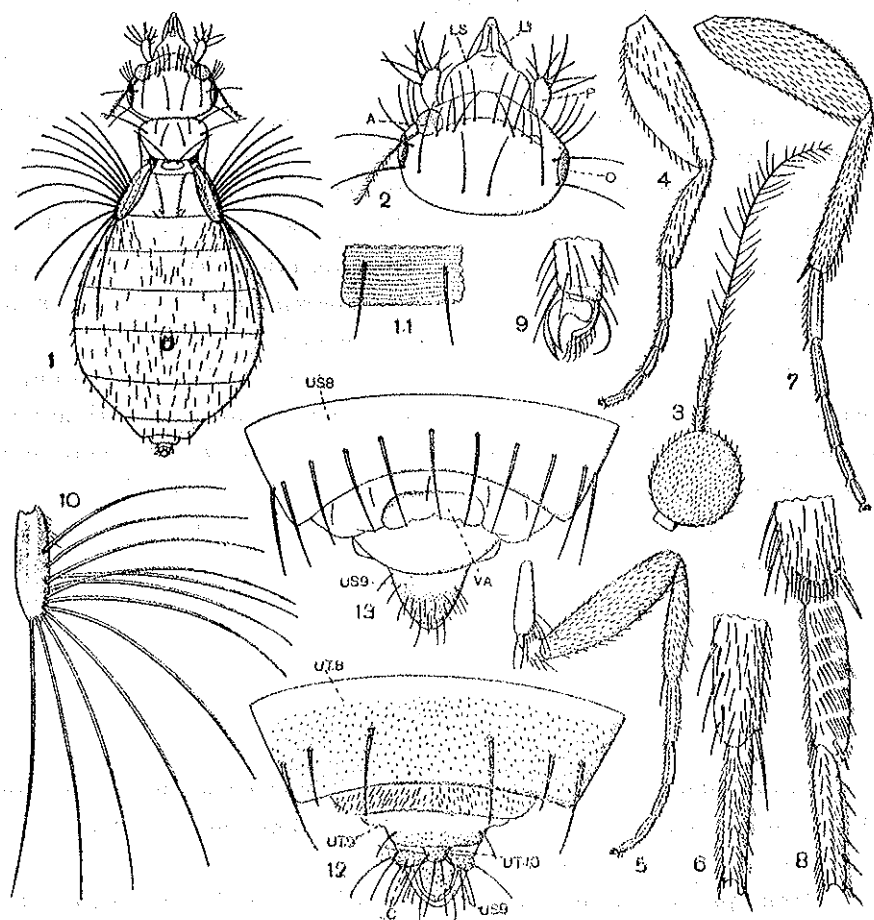


FIG. V.

Acanthistoptera sp.: 1. animalculum pronum; 2. caput pronum; 3. antenna; 4. pes 1ⁱ paris a femore; 5. pes 2ⁱ paris a facie externa inspectus; 6. eiusdem tibiae apex et tarsi articulus 1^{us} a facie interna inspecti; 7. pes 3ⁱ paris a femore ex facie externa; 8. eiusdem tibiae apex et tarsi articuli 1^{us} et 2^{us} ex facie interna; 9. tarsi apex et praetarsus lateraliter inspecti; 10. ala; 11. urotergiti 8ⁱ dermatis particula molto ampliata; 12-13. corporis pars postica ab urito 8^o prona et supina. (figg. varie ampliatae).

6. *Acantistoptera* sp.

(Fig. V)

L'esemplare da me raccolto si trovava in un nido di *Nasutitermes arenarius* var. presso Jabaquara (S. Paolo) in una galleria periferica tra operai e nasuti, ma non si potè studiare nelle sue relazioni col l'ospite. Le altre specie finora descritte furono raccolte in nidi di Formicho, perciò fino a che non saranno osservati altri esemplari col detto termite è legittimo il dubbio che l'esemplare trovato nel nido di *Nasutitermes* vi sia arrivato accidentalmente.

Del genere *Acantistoptera* si conoscono 6 specie molto affini e distinguibili con certezza solo col confronto di esemplari tipici; in mancanza di questi io coll'esame dell'unico esemplare raccolto non sono riuscito a riferirlo ad alcuna delle specie descritte, nè a rilevare le differenze per fondarne una specie nuova; perciò mi limito a dare qui le figure dell'esemplare esaminato affinchè coloro, che avranno più ricco materiale, possano decidere in proposito.

Gen. *Paurophora* nov.

Corpus elongatum antice parum, postice usque ad uritum 6^{um} inclusum magis angustatum, segmentis sequentibus angustioribus subcylindraceis.

Caput pronum aliquantum postico latius quam longius, supra convexiusculum setis tantum brevissimis numerosis instructum, tantum antice setis marginalibus duabus brevibus (sublaterali et laterali), macrochaeta parva marginali praeoculari et setis brevibus aliis 8-9; ocellis nullis; oculis parvis corneolis paucioribus; antennis subanticis, sublateralibus, articulo 3° subpiriformi, flagello articulo 1° quam 2° aliquantum longiore, articolino 3° quam 1° et 2° simul sumpti aliquantum magis quam duplo longiore, plumato, plumis longiusculis; palpis quam rostrum aliquantum longioribus, apicem versus aliquantum latioribus, margine externo convexo, superficie distali macrochaetis inferis 3 et margine antico macrochaetis 3 et seta nonnulla brevior proximali, ro-

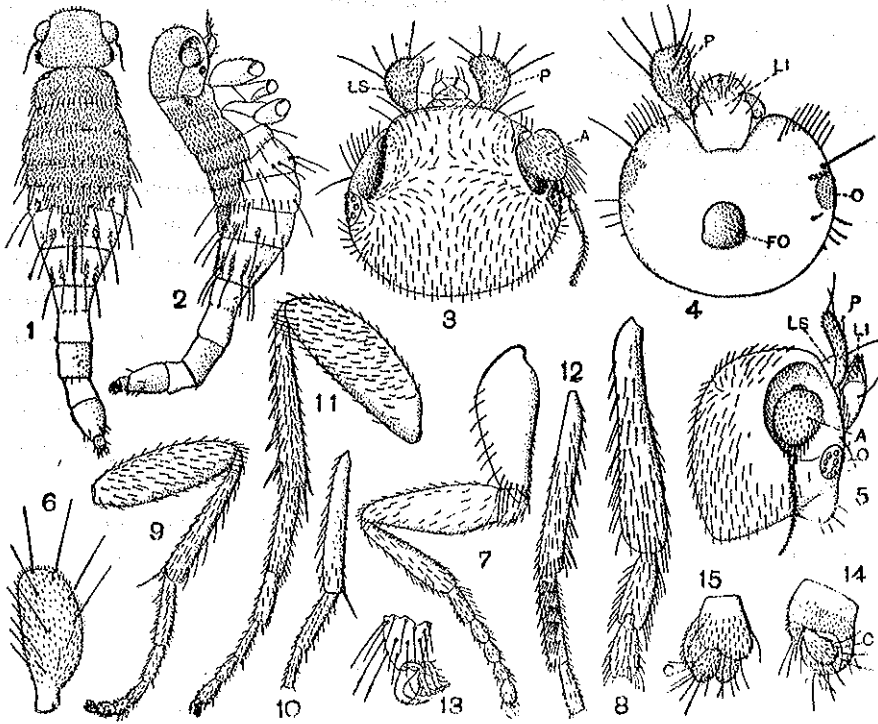


FIG. VI.

Paurophora Borgmerti: 1-2. animalculum primum et lateraliter inspectum; 3-4. caput primum et supinum; 5. caput lateraliter inspectum; 6. palpus maxillaris; 7. pes 1ⁱ paris a facie interna inspectus; 8. 1ⁱ paris tibia et tarsi articuli 1^{us} et 2^{us} a facie externa inspecti; 9. pes 2ⁱ paris a femore a facie externa inspecta; 10. eiusdem pedis tibia et tarsi articuli 1^{us} et 2^{us} a facie interna inspecta; 11. pes 3ⁱ paris a femore ex facie externa inspecta; 12. eiusdem pedis tibia et tarsi articuli 1^{us} et 2^{us} a facie interna inspecta; 13-14. abdominis articulus ultimus a dorso (oblique) et a ventre inspectus (figg. variae ampliatae).

stro perbrevis (ad mm. 0,26 longo), lato, certe tantum ad cibum a termite recipiendum apto.

Thorax pronoto tantum lateraliter breviter distincto, cetera parte dorsuali mesoscutum tantum distincto, capitis latitudinem aequante, parum magis quam duplo postice latiore quam longiore, setis brevissimis sparsis numerosis instructo et setis brevibus (mm. 0,06 longis) submarginalibus posticis uniseriatis numerosis inter sese parum remotis aucto; alae nullae; halteres nulli.

Pedes 1ⁱ paris coxa femoris longitudinem subaequante facie interna praeter margines nuda, femore sparse et breviter setoso, tibia, praeter setas brevissimas sat numerosas, setis nonnullis brevibus marginalibus et serie setarum brevium apicali transversa, tarsi articuli 1^o setis brevioribus sat numerosis et serie setarum brevium marginali interna; pedes 2ⁱ paris coxa brevi, femore setis brevioribus instructo, tibia praeter setas breviores calcari brevi et calcari longiusculo apicalibus interni instructa, 3ⁱ paris tibia margine supero (externo) setis brevibus robustis 6-7, calcaribus ut tibia praecedens et seta brevior apicali robusta supera interna ad calcaris longi latus, facie interna serie apicali transversali setarum brevium, tarsi articulo 1^o facie interna pectinibus 6 setarum brevium, setis 2 apicalibus internis robustioribus, ut tarsi articuli 2^{us} et 3^{us}, praetarsi omnes unguibus pulvilli laminaribus breviter plumatis, empodio seta simplici constituto.

Abdomen segmento 2^o (1^o apparente) quam thorax paullum latiore, tergito lato ad mesoscutum thoracale setis etiam simili, segmentis 3^o et 4^o tergitis quam 2^{um} paullum latioribus similiter corneis et praeter setas 4^o macrochaeta robusta laterali, 5^o macrochaetis sublaterali et laterali, tergito 6^o parte cornea parum lata setis ut praecedentia vestita et macrochaetis posticis submedianis utrimque 1, paratergitis area angustiore cornea setis brevioribus et macrochaeta postica auctis, tergito 6^o area mediana angusta cornea setis brevioribus et macrochaetis posticis submedianis 1 + 1, paratergitis eisdem 4ⁱ similibus, 7^o parte cornea mediana angustissima, areis submedianis angustissimis corneis parte membranacea a mediana superatis, brevissime setosa et macrochaeta longa (mm. 0,12) apicali et paratergitis sublaterali et laterali, sternitis membranaceis, 3^o macrochaetis 2 submedianis, sternitis 4^o ad 7^{um} macrochaetis posticis 2 + 2 (submedianis et sublateralibus) nec non seta nonnulla brevi; segmentis 8^o et 9^o quam praecedentia angustioribus elongatis subcylindraceis, setis nonnullis apicalibus brevioribus, 10^o tergito perparvo postice subsemiovali setis brevibus 4 instructo, cercis brevioribus (mm. 0,04 longis), parum clavatis, setis 7 brevibus instructis.

Observatio. Genus hoc ad *Chonocephalus* Wand. proximum est, sed fronte macrochaetis nullis, scuti thoracalis et abdominis forma et macrochaetis facile distinguendum est.

Typus: *Paurophora Borgmeieri* sp. n.

7. *Paurophora Borgmeieri* sp. n.

Caput, thorax cum abdominis partibus dorsualibus corneis brunneis, cetero avellaneo; notis ceteris vide generis descriptionem et figuras.

Long. corporis mm. 1,60; lat. capitis 0,28; long. antennarum 0,20; lat. abdominis segmenti 5ⁱ 9,36; long. pedum paris postici, 1,10.

Habitat. Brasilia: Manguinhos (Rio de Janeiro); exemplum descriptum inter operarios *Anoplotermitis reconditi* legi et ad Collegam Dr. Thomaz Borgmeier, qui primus multas legit et descripsit *Phoridarum* species, dico.

SUL MOTO DI UN SOLIDO IMMERSO IN UN FLUIDO (*)

NOTA II

FRANCESCO SBRANA

SUMMARY. — Nonnulla animadvertuntur de quibusdam scriptis ab Auctore ante paucos annos editis, circa motum solidi in fluido submersi.

In una Nota con questo titolo, pubblicata qualche anno fa ⁽¹⁾, riprendevo tra l'altro il noto problema del moto di un solido avente la forma di un ellissoide di risoluzione, immerso in un fluido incomprimibile nell'ipotesi che il moto indotto nel fluido sia irrotazionale. Consideravo in particolare il caso in cui il moto del solido sia elicoidale, lungo l'asse di figura del solido stesso; se l'ellissoide è accorciato, e solido e fluido sono sollecitati unicamente dalla gravità, l'accelerazione del baricentro G è data allora da

$$[1] \quad a = \frac{m - m_1}{m + C m_1} g,$$

essendo m la massa del solido, m_1 la massa di un ugual volume di fluido, g l'accelerazione della gravità, e

$$C = \frac{tg\beta - \beta}{\beta - \sin\beta \cos\beta},$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 4 gennaio 1947.

(1) In: «Acta Pont. Acad. Nov. Linc.», Anno LXXXVIII, (1934-35), pagg. 162-182. A quella Nota fanno seguito altre due: *Sul moto di un solido ellissoidico omogeneo immerso in un liquido* («Rend. del Circ. Matem. di Palermo», tomo LX, 1936, pagg. 90-101); *Ancora sul moto di un solido ellissoidico omogeneo immerso in un liquido*, (ibidem, tomo LXII, 1938-39, pagg. 14). In quest'ultima Nota dev'essere soppresso il n. 3.

dove $c = a \cos \beta$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, ed a , c , (con $c < a$), sono i due semiassi della ellisse meridiana.

Dalla [1] deducevo che se l'ellissoide si riduce ad un *disco circolare*, il moto di G diviene uniforme.

Solo recentemente sono venuto a conoscenza di una recensione della Nota anzidetta⁽¹⁾, nella quale riferendosi alla mia asserzione sul moto del disco è detto:

« In questo caso l'Autore cade in equivoco concludendo essere possibile soltanto moto uniforme. Dall'essere infinito il rapporto tra la massa apparente addizionale e la massa del liquido spostato non risulta infatti che la massa apparente sia senz'altro infinita giacchè in questo caso la massa del liquido spostato è manifestamente nulla ».

Stimo ora doveroso ritornare sull'argomento per chiarire il mio pensiero.

Introducendo anzitutto le densità rispettive ρ e ρ_1 del solido e del fluido, si ha dalla [1],

$$[2] \quad a = \frac{\rho - \rho_1}{\rho + C\rho_1} g .$$

Ciò premesso, poichè C tende $a + \infty$ quando β tende a $\frac{\pi}{2}$ (assumendo sempre valori minori di $\frac{\pi}{2}$), cioè quando c tende a zero (restando naturalmente positiva), fissata una accelerazione ε piccolissima, si può determinare una lunghezza c_0 tale che per $c < c_0$ sia

$$|a| \leq |\varepsilon| .$$

In altri termini, *l'accelerazione a si può rendere piccola a piacere, scegliendo un'ellissoide sufficientemente schiacciato.*

Se proprio si volesse invece passare dal solido a tre dimensioni al solido a due dimensioni, occorrerebbe riprendere la [1], ammettere

(¹) Cfr. « *L'Aerotecnica* », notiziario tecnico del Ministero di Aeronautica e Atti dell'Associazione Italiana di Aerotecnica, vol. XV, luglio-agosto 1935, n. 7-8, pag. 829.

che m resti costante nel passaggio del solido dalle tre alle due dimensioni; sostituire poi m , col prodotto di ρ_1 per il volume $\frac{4}{3}\pi a^3 c$; e fare tendere c a zero. Avendosi

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{4}{3} \pi a^3 c C = \frac{4}{3} \pi a^3 \lim_{\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \beta - \beta \cos \beta}{\beta - \sin \beta \cos \beta} = \frac{8}{3} a^3 ,$$

si troverebbe nel caso del disco l'accelerazione

$$[3] \quad a = \frac{m}{m + \frac{8}{3} \rho_1 a^3} g .$$

dove m è la massa del disco, a il suo raggio, e ρ_1 la densità del fluido.

È da notarsi però che eseguendo il passaggio al limite ora accennato anche per le velocità delle particelle fluide, si trova che *diviene infinita la componente tangenziale della velocità di ogni particella che rasenti il disco* (mentre naturalmente la componente normale si annulla).

SAGGIO DI UN'APPLICAZIONE DEL CALCOLO DELLE MATRICI ALLA TEORIA DEGLI ERRORI(*)

ALESSANDRO MARCANTONI

SYMMARIVM. — Auctor, adhibito algoritmo calculi matricum, simplici ratione invenit notas illas leges de « indirectis observationibus » deque « observationibus conditioni obnoxiiis ». Haec via, quae celerior est et magis perspicua ceteris usque adhuc adhibitis, per se ipsa varios usus ostendere potest..

1. **PREMESSE.** — Nel corso di *Geodesia* da me ultimamente tenuto per incarico della Facoltà di scienze dell'Università di Pisa, ho avuto occasione di svolgere un breve capitolo sulla Teoria degli errori, ove ho fatto sistematicamente uso dell'algoritmo del calcolo con matrici.

Un'applicazione di questo genere si può vedere, per esempio, nel lavoro del JENSEN citato nella *Bibliografia* alla fine di questa Nota, ma in esso l'argomento è trattato incompletamente, in quanto non viene esaminato il calcolo degli errori medi. Ora è appunto nella ricerca dei parametri di errore, e precisamente nella ricerca dei *coefficienti di peso e di correlazione*, che l'algoritmo delle matrici si mostra particolarmente adatto, sia per la semplicità che esso porta ai procedimenti deduttivi, sia come guida per la pratica del calcolo numerico. Ritengo pertanto possa interessare un breve riassunto dei procedimenti da me seguiti, che mi propongo di esporre in questa Nota.

Per quanto riguarda le definizioni e le operazioni elementari sulle matrici, non è qui luogo di richiamarle perchè generalmente note.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Armellini il 25 Novembre 1946.

dove $a_i, b_i, \dots, g_i, k_i$ sono funzioni di quantità direttamente misurate, e le v_i sono i *residui*. Brevemente, le [5] si potranno scrivere

$$[5'] \quad Az + k = v ,$$

avendo posto

$$[5''] \quad A = \begin{Bmatrix} a_1 b_1 \dots g_1 \\ \dots \dots \dots \\ a_n b_n \dots g_n \end{Bmatrix} , \quad z = \begin{Bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_g \end{Bmatrix} , \quad k = \begin{Bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} , \quad v = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}$$

In conformità al *principio dei minimi quadrati*, i valori più plausibili z_i saranno quelli per cui risulterà

$$[vv] = \text{minimo}$$

ossia, differenziando

$$v_1 dv_1 + v_2 dv_2 + \dots + v_n dv_n = 0 .$$

Quest'ultima si può scrivere brevemente

$$[6] \quad dv_{-1} v = 0 ;$$

d'altra parte, la [5], tenuta presente la [1] del § precedente, dà

$$v_{-1} = k_{-1} + z_{-1} A_{-1} , \quad dv_{-1} = dz_{-1} A_{-1} ,$$

e pertanto con quest'ultima e la [5'] la [6] diviene

$$dz_{-1} (A_{-1} A z + A_{-1} k) = 0 .$$

Come sopra si è osservato, affinchè questa relazione sia identicamente verificata, dovrà essere nullo il g -complesso verticale dei coefficienti delle dz . Posto allora

$$[7] \quad D = A_{-1} A$$

si ricava

$$[8] \quad Dz + A_{-1} k = 0$$

La [8] rappresenta un sistema di g equazioni lineari nelle g incognite z_i . La D (che la [7] mostra chiaramente essere quadrata e di ordine g) è la matrice dei coefficienti e, poichè le [5] si sono supposte indipendenti, essa è certamente non degenera; il secondo termine è il g -complesso verticale dei termini noti. Volendo esplicitare la [8], tenute presenti le [5''], indichiamo rispettivamente con $a, b \dots g, k$ gli n -complessi verticali costituiti dagli elementi $a, b \dots g, k$ ($i = 1 \dots n$). Avremo allora

[II]

$$D = \begin{Bmatrix} a_{-1} \\ b_{-1} \\ \vdots \\ g_{-1} \end{Bmatrix} \{a | b | \dots | g\} = \begin{Bmatrix} a_{-1}a & a_{-1}b & \dots & a_{-1}g \\ b_{-1}a & b_{-1}b & \dots & b_{-1}g \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{-1}a & g_{-1}b & \dots & g_{-1}g \end{Bmatrix}, \quad A_{-1} = \begin{Bmatrix} a_{-1} \\ b_{-1} \\ \vdots \\ g_{-1} \end{Bmatrix} k = \begin{Bmatrix} a_{-1}k \\ b_{-1}k \\ \vdots \\ g_{-1}k \end{Bmatrix}$$

Ora, indicando con p e q due qualsiasi degli n -complessi verticali precedenti, si ha

[III]

$$p_{-1}q = p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_nq_n = [pq].$$

Risulta pertanto dalla [8] il sistema delle equazioni esplicitato:

$$[9] \quad \begin{Bmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [ag] \\ [ba] & [bb] & \dots & [bg] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [ga] & [gb] & \dots & [gg] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} [ak] \\ [bk] \\ \vdots \\ [gk] \end{Bmatrix} = 0$$

Il problema delle osservazioni indirette viene così formalmente ricondotto a quello della risoluzione del sistema [9], facilmente costruibile coi coefficienti del sistema generato [5].

3. - Il sistema [9] dicesi *sistema normale* o anche *gaussiano*. La matrice dei suoi coefficienti, come subito si scorge, è *simmetrica*: è questa una proprietà generale di tutte le matrici rappresentabili come il prodotto (sempre eseguibile) di una matrice qualunque per la propria trasposta. Infatti dalla [7] si ha

$$D_{-1} = (A_{-1}A)_{-1} = A_{-1}(A_{-1})_{-1} = D;$$

cioè D coincide colla sua trasposta, come è appunto per le matrici (quadrate) simmetriche. Inoltre, la diagonale principale è formata da elementi del tipo $[mm]$, che sono essenzialmente positivi. Una tale matrice verrà detta *matrice normale*.

Notiamo che se con $a_{m,n}$ si indica il termine di posto (m, n) in una matrice normale, poichè esso assume l'aspetto della somma di prodotti $[mn]$, e stanti le identità

$$[mm] + [nn] - 2[mn] = [(m-n)^2] > 0$$

$$[mm][nn] - [mn]^2 = \frac{1}{2} \sum_{r,s}^n (m_r n_s - m_s n_r)^2 > 0 ,$$

si avrà sempre

$$[10] \quad -1 \leq \frac{2a_{r,s}}{a_{r,r} + a_{s,s}} \leq +1 , \quad -1 \leq \frac{a_{r,s}}{+\sqrt{a_{r,r} a_{s,s}}} \leq +1 .$$

Di particolare importanza è la considerazione della matrice D^{-1} , reciproca della D , (che nel nostro caso esiste, essendo D non degenera). Indicando con $\alpha_{r,s}$ gli elementi di D^{-1} , si avrà

$$\begin{pmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [ag] \\ [ba] & [bb] & \dots & [bg] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [ga] & [gb] & \dots & [gg] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,g} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,g} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{g,1} & \alpha_{g,2} & \dots & \alpha_{g,g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ossia gli elementi $\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}, \dots, \alpha_{g,i}$ dell' i^{esimo} colonna si possono ricavare da un sistema di equazioni identiche alle [9], dove lo i^{esimo} termine noto è uguale ad 1, e tutti gli altri sono nulli.

La [8], moltiplicata per D^{-1} , dà formalmente la soluzione del sistema:

$$[8'] \quad z = -D^{-1} A_{-1} k ,$$

relazione che, come subito si scorge, sintetizza le g seguenti

$$[8''] \quad z_i = -\alpha_{i,1}[ak] - \alpha_{i,2}[gk] - \dots - \alpha_{i,g}[gk] \quad (i=1 \dots g)$$

Si può immediatamente constatare che *anche* D^{-1} è una matrice normale. Infatti, poichè D^{-1} è evidentemente simmetrica, tenendo presente la [7] si ha identicamente

$$D^{-1} = D^{-1} D D^{-1} = D^{-1} A_{-1} A D^{-1} = (A D^{-1})_{-1} (A D^{-1}) ;$$

cioè D^{-1} può rappresentarsi come il prodotto di una matrice per la sua trasposta, il che conferma l'asserto.

In particolare, varrà dunque la relazione di simmetria

$$\alpha_{r,s} = \alpha_{s,r}$$

e saranno valide pure le [10], ove al posto delle $a_{r,s}$ si pongano le $\alpha_{r,s}$. È pure utile notare fin d'ora che se D è una matrice normale, ogni matrice del tipo

$$T = S_{-1} D S ,$$

potendosi porre sotto la forma

$$T = S_{-1} A_{-1} A S = (A S)_{-1} (A S) ,$$

è essa pure una matrice normale.

4. - Vogliamo ora valutare i pesi e gli errori medi delle incognite z_i . A tale scopo riprendiamo la formula risolutiva

$$[8'] \quad z = - D^{-1} A_{-1} k .$$

Cominciamo col notare che, poichè i quadrati degli errori si ritengono trascurabili, questi, in sostanza, vengono assimilati a differenziali. Inoltre, come è noto, i coefficienti delle equazioni generate possono ritenersi privi di errore, mentre gli errori v_i possono ritenersi confinati nei soli termini noti k_i . Differenziando perciò la [8'], ove D ed A si considerino come costanti, si potranno sostituire dz e dk rispettivamente con x e v , dove v ha il solito significato ed x è il g -complesso verticale degli errori $x_1 \dots x_g$ da cui sono affette le z .

Si ha così:

$$[11] \quad x = -D^{-1} A_{-1} v$$

Ciò posto consideriamo la matrice

$$xx_{-1} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_g \end{Bmatrix} \{x_1 x_2 \dots x_g\} = \begin{Bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \dots & x_1 x_g \\ x_2 x_1 & x_2^2 & \dots & x_2 x_g \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_g x_1 & x_g x_2 & \dots & x_g^2 \end{Bmatrix}$$

ossia, in base alla [11],

$$xx_{-1} = D^{-1} A_{-1} v v_{-1} A D.$$

Prendendo i valori medi, ricordando la [1'] del § 1, si ha allora

$$[12] \quad M(xx_{-1}) = D^{-1} A_{-1} M(vv_{-1}) A D.$$

Ora, le v_i sono errori di osservazioni indipendenti, ridotte tutte all'unità di peso: sarà perciò

$$[13] \quad M(v_r v_s) = M(v_r) M(v_s) = 0 \quad (r \neq s); \quad M(v_i^2) = m_0^2 \quad (i = 1 \dots n)$$

essendo m_0 l'errore medio dell'unità di peso. È inoltre

$$vv_{-1} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} \{v_1 v_2 \dots v_n\} = \begin{Bmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & \dots & v_1 v_n \\ v_n v_1 & v_2^2 & \dots & v_2 v_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n v_1 & v_n v_2 & \dots & v_n^2 \end{Bmatrix}$$

e quindi per le [12], indicando con I la matrice di ordine n :

$$M(vv_{-1}) = \begin{Bmatrix} m_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_0^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_0^2 \end{Bmatrix} = I m_0^2$$

Sostituendo nella [12], si ha così

$$M(xx_{-1}) = D^{-1} A_{-1} m_0^2 A D^{-1} = D^{-1} A_{-1} A D^{-1} \cdot m_0^2 = D^{-1} D D^{-1} m_0^2$$

ossia infine

$$[14] \quad M(xx_{-1}) = D^{-1} m_0^2$$

relazione la quale dimostra che *gli elementi della matrice reciproca* D^{-1} *son proporzionali agli errori medi dei prodotti delle incognite a due a due.* Più esplicitamente, colle notazioni adottate sarà

$$[14'] \quad M(x_r x_s) = \alpha_{r,s} m_0^2.$$

In particolare, indicando con $m_{r'}$ l'errore medio di una $z_{r'}$, e con $p_{r'}$ il suo peso, posto nella [14'] $s=r$, si ottiene

$$[15] \quad m_{r'}^2 = \alpha_{r,r} m_0^2, \quad p_{r'} = \frac{1}{\alpha_{r,r}}.$$

Ancora, indicato con $\sigma_{r,s}$ il *coefficiente di correlazione* fra due incognite z_r e z_s , definito, come è noto, dalla

$$\sigma_{r,s} = \frac{M(x_r x_s)}{\sqrt{M(x_r^2) M(x_s^2)}}$$

si ottiene

$$[16] \quad \sigma_{r,s} = \frac{\alpha_{r,s}}{\sqrt{\alpha_{r,r} \alpha_{s,s}}}$$

Questa espressione, in generale, non sarà nulla, in quanto gli errori della z_i non sono indipendenti, perchè legati dalle n ($> n$) relazioni che provengono dalle [5]. Tenute presenti le già segnalate proprietà delle matrici normali ed in particolare le [10], si vede che verrà sicuramente soddisfatta la limitazione

$$-1 \leq \sigma_{r,s} \leq +1,$$

propria del coefficiente di correlazione.

Prendiamo in questa relazione i valori medi, tenendo presenti le [14'] e le [15]. Avremo così

$$n \cdot m_0^2 = [\lambda\lambda] + ([aa] \alpha_{1,1} + \dots + [ag] \alpha_{1,g}) m_0^2 + \dots + ([ga] \alpha_{g,1} + \dots + [gg] \alpha_{g,g}) m_0^2 .$$

Ora le g quantità messe in evidenza fra parentesi non sono che i g elementi della diagonale principale del prodotto $DD^{-1}=1$; essi sono perciò tutti uguali ad 1, sicchè rimane semplicemente

$$nm_0^2 = [\lambda\lambda] + gm_0^2 ,$$

da cui scende senz'altro

$$[18] \quad m_0 = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-g}}$$

Avuto così m_0 , le [15] permettono di calcolare gli errori medi tutte le incognite. Più in generale, se

$$y = r_0 + r_1 z_1 + \dots + r_g z_g$$

è una funzione lineare delle z , tenuta presente anche la [14'], il suo errore medio risulterà dalla

$$[19] \quad m_y^2 = (r_1^2 \alpha_{1,1} + \dots + 2r_1 r_g \alpha_{1,g} + \dots + r_g^2 \alpha_{g,g}) m_0^2$$

o anche, introducendo un quadrato simbolico di ovvio significato,

$$[19'] \quad m_y^2 = (r_1 \alpha_1 + \dots + r_g \alpha_g) m_0^2 .$$

Se y è funzione *non lineare* delle z , varranno ancora le [19] e [19'], dove al posto di $r_1 \dots r_g$ si pongano le derivate parziali di y stessa rispetto a $z_1 \dots z_g$.

5. OSSERVAZIONI CONDIZIONATE. — Supponiamo ora che le quantità $z_1 \dots z_g$, per le quali si sono ottenute le n equazioni generate [5] o [5'], siano fra loro legate da un certo numero q ($< g$) di *equazioni di condizione*, fra loro indipendenti, che devono essere rigorosamente verificate; siano queste:

$$[20] \quad f_i(z_1 \dots z_g) = 0 \quad (i = 1 \dots q).$$

Cominceremo allora col fare un calcolo di *prima approssimazione*, prescindendo dalle [20]: si otterranno certi *valori provvisori* $z_1^0 \dots z_g^0$ che soddisferanno al sistema normale

$$[21] \quad D z^0 + A_{-1} k = 0.$$

Introdotte le z_i^0 nelle [5] si otterrebbero dei residui λ_i , cioè

$$[22] \quad A z^0 + k = \lambda.$$

Indichiamo ora con $\zeta_1 \dots \zeta_g$ le correzioni da dare alle z^0 , affinchè le [20] siano ugualmente soddisfatte: sia cioè

$$[23] \quad z = z^0 + \zeta.$$

Sottraendo la [22] dalla [5'] risulta intanto

$$[5''] \quad A \zeta + \lambda = v.$$

Inoltre, introdotta la [23] nelle [20] e sviluppando con TAYLOR, trascurando, al solito, le potenze superiori delle ζ_i , si ottiene un sistema di *equazioni di condizione ridotte alla forma lineare* del tipo

$$[20'] \quad M \zeta + M_0 = 0$$

con

$$M = \begin{Bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_g \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_1 & Q_2 & \dots & Q_g \end{Bmatrix} M_0 = \begin{Bmatrix} A_0 \\ \dots \\ Q_0 \end{Bmatrix}$$

dove si è posto

$$[20''] \quad A_0 = f_1(z^0 \dots z_g^0) \dots Q_0 = f_1(z_1^0 \dots z_g^0)$$

$$[20''] \quad A_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} \right) \dots A_g = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_g} \right)_0 ; \dots Q_1 = \left(\frac{\partial f_g}{\partial z_1} \right)_0 \dots , Q_g = \left(\frac{\partial f_g}{\partial z_g} \right)_0 .$$

Le ζ_i , oltre che alla condizione

$$[24] \quad [vv] = \text{minimo} ,$$

devono soddisfare alla [20']. Ora, differenziando la [24], e tenuta presente la [5''], si ha

$$dv_{-1} v = d\zeta_{-1} A_{-1} (A\zeta + \lambda) = 0$$

ossia, ricordando la [17] del § 4,

$$[25] \quad d\zeta_{-1} D\zeta = 0$$

Differenziando la [20'] e trasponendo, si ha poi

$$[25'] \quad d\zeta_{-1} M_{-1} = 0 .$$

Affinchè le [25] e [25'] siano soddisfatte, in base a quanto si è richiamato nel § 1, dovrà esistere un q -complesso verticale

$$K = \begin{Bmatrix} K_1 \\ \dots \\ K_q \end{Bmatrix}$$

tale che risulti

$$[26] \quad D\zeta = M_{-1} K .$$

Ora, la [26] dà

$$[26'] \quad \zeta = D^{-1} M_{-1} K ;$$

introducendo questa nella [20'] e ponendo

$$[27] \quad \Delta = M_{-1} D^{-1} M ,$$

si ottiene così

$$[28] \quad \Delta K + M_0 = 0 .$$

Come mostra la [27], e in base a quanto si è osservato nel § 3 sulle matrici normali, si vede che Δ è una matrice normale di ordine q , mentre K ed M_0 sono due q -complessi verticali, rispettivamente di incognite e di termini noti; inoltre per la supposta indipendenza delle [20], e quindi delle [20'], Δ è certamente non degenere. La [28] rappresenta quindi un sistema normale, da cui si possono ricavare le incognite K . Ricavate queste, la [26'] ci dà modo di calcolare le correlazioni ζ , colle quali, per il modo in cui si è operato, le [20] e [20'] sono rigorosamente soddisfatte.

6. - Per quanto riguarda la precisione dei risultati, l'errore medio dell'unità di peso si determina immediatamente, osservando che le [5] e [20], considerate insieme, si possono riguardare come $n + q$ equazioni generate, di cui le prime coi valori z compensati danno luogo a certi residui $v_1 \dots v_n$, mentre le altre hanno residui nulli. La [18] del § 4 si muta così nella

$$[29] \quad M_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n + q - g}} .$$

Volendo ora i pesi ed i coefficienti di correlazione per le z compensate, osserviamo che dalle [23] [26'] e [28] si ottiene

$$[30] \quad z = z_0 - D^{-1} M_{-1} \Delta^{-1} M_0 .$$

Come già per le equazioni generate, anche per le equazioni di condizione ridotte alla forma lineare gli errori possono ritenersi concentrati nei soli termini noti $A_0 B_0 \dots Q_0$ e, al solito, sono assimilabili ai differenziali delle rispettive grandezze. In conformità a ciò, comin-

Prendendo nella [VIII] i valori medi, si ottiene dunque

$$[IX] \quad M(xx_{-i}) = (I - D^{-1}T)D^{-1}(I - TD^{-1})m_0^2$$

da cui sviluppando e notando che è

$$TD^{-1}T = M_{-i} \Delta^{-1} MD^{-1} M_{-i} \Delta^{-1} M = M_{-i} \Delta^{-1} \Delta \Delta^{-1} M = M_{-i} \Delta^{-1} M = T$$

si ottiene alla fine

$$[33] \quad M(xx_{-i}) = B m_0^2,$$

ove si è posto

$$[34] \quad B = D^{-1} - D^{-1}TD^{-1}$$

Se dunque indichiamo con $\beta_{i,k}$ gli elementi di B , avremo

$$[35] \quad M(x_i x_k) = \beta_{i,k} m_0^2 \quad (i, k = 1 \dots g).$$

Le [33], [34] e [35] mostrano chiaramente che:

1°) i pesi e gli errori medi delle z_i compensate sono rispettivamente

$$[36] \quad P_i = \frac{1}{\beta_{i,i}}, \quad m_i^2 = \beta_{i,i} m_0^2;$$

2°) il coefficiente di correlazione fra due z compensate è

$$[36'] \quad \sigma_{i,k} = \frac{\beta_{i,k}}{\sqrt{\beta_{i,i} \cdot \beta_{k,k}}};$$

3°) B è una matrice normale, perchè prodotto di due trasposte, come si vede per esempio dalla [IX]: quindi resta verificato che le [36] e [36'] danno per i pesi valori positivi e per le $\sigma_{i,k}$ valori assoluti non superiori all'unità;

4°) anche $D^{-1}TD^{-1}$ è una matrice normale, e quindi gli elementi della sua diagonale principale sono essenzialmente positivi: indicando allora al solito, con $\alpha_{i,i}$ gli elementi di D^{-1} , la [34] dà

$$0 < \beta_{i,i} < \alpha_{i,i} \quad (i = 1 \dots g),$$

ossia, detti p_i e i pesi delle z_i^0 (non compensate)

$$P_i > p_i ;$$

si vede cioè che la compensazione fa aumentare i pesi.

7. Lasciando al lettore gli sviluppi, del resto facilissimi, del caso generale, esplicheremo i precedenti risultati per il caso di *quantità condizionate direttamente osservate*. Siano dunque $z_1^0 \dots z_g^0$ i valori dedotti direttamente dalle osservazioni per dette quantità e $p_1 \dots p_g$ i rispettivi pesi. Dovendo soddisfare rigorosamente le [20], al solito, si porrà

$$[23'] \quad z_i = z_i^0 + \zeta_i$$

e quindi, sostituendo, ne verranno ancora le equazioni di condizione ridotte alla forma lineare [20']. Posto poi

$$[37] \quad \sqrt{p_i} \zeta_i = \lambda_i ,$$

le [23'], ridotte all'unità di peso, divengono

$$\sqrt{p_i} z_i - \sqrt{p_i} z_i^0 = \lambda_i \quad (i = 1 \dots g) .$$

Queste g relazioni si possono compendiare nell'unica seguente

$$[38] \quad Az + \sqrt{p} z^0 = \lambda$$

dove z , $\sqrt{p} z^0$ e λ sono i g -complessi verticali formati rispettivamente colle z_i , le $\sqrt{p_i} z_i^0$ e le λ_i , e inoltre è

$$[39] \quad A = \begin{Bmatrix} \sqrt{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{p_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{p_g} \end{Bmatrix}$$

Ne viene, con calcoli elementari

$$[39'] \quad D = A^{-1} A = \begin{Bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_g \end{Bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{Bmatrix} 1/p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/p_g \end{Bmatrix}$$

e pertanto, in base alla espressione [27] della matrice normale, il sistema normale alle correlate, come risulta svolgendo operazioni semplicissime, acquista l'aspetto

$$[40] \quad \begin{Bmatrix} \left[\frac{AA}{p} \right] & \dots & \left[\frac{AQ}{p} \right] \\ \dots & \dots & \dots \\ \left[\frac{QA}{p} \right] & \dots & \left[\frac{QQ}{p} \right] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ Q_0 \end{Bmatrix} = 0.$$

Determinare le K , dalla [26'], moltiplicando a sinistra per D , si ha

$$D\zeta = M^{-1}K$$

ossia

$$\begin{Bmatrix} p_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & p_g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \dots \\ \zeta_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 & \dots & Q_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_g & \dots & Q_g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_g \end{Bmatrix},$$

relazione che, esplicitata dà luogo alle

$$[41] \quad p_i \zeta_i = A_i K_1 + \dots + Q_i K_g \quad (i = 1 \dots g)$$

da cui si hanno le correzioni ζ_i cercate.

Venendo alla precisione dei risultati, poichè in questo caso è $n = g$, la [29] dà intanto, tenendo presente la [37],

$$[29'] \quad m_0 = \pm \sqrt{\frac{p \zeta^2}{q}}$$

Per la ricerca dei coefficienti di peso e di correlazione, conviene anzitutto moltiplicare la [34] per D , sia a destra che a sinistra. Si ha così

$$DBD = D - T,$$

ossia per le [39'], indicando al solito con $\beta_{i,k}$ gli elementi di B e con $T_{i,k}$ quelli di T :

$$[42] \quad \begin{Bmatrix} p_i^2 \beta_{ii} & \dots & p_i p_g \beta_{ig} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_g p_i \beta_{gi} & \dots & p_g^2 \beta_{gg} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & p_g \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} T_{i,i} & \dots & T_{i,g} \\ \dots & \dots & \dots \\ T_{g,i} & \dots & T_{g,g} \end{Bmatrix}$$

dove, in base alla [32], detti $\xi_{r,s}$ gli elementi della reciproca Δ^{-1} , è

$$[42'] \quad \begin{Bmatrix} T_{i,i} & \dots & T_{i,g} \\ \dots & \dots & \dots \\ T_{g,i} & \dots & T_{g,g} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_i & \dots & Q_i \\ \dots & \dots & \dots \\ A_g & \dots & Q_g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_{i,i} & \dots & \xi_{i,g} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{g,i} & \dots & \xi_{g,g} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_i & \dots & A_g \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_i & \dots & Q_g \end{Bmatrix}.$$

Determinati così i $T_{i,k}$. La [42] esplicitata dà

$$[43] \quad \begin{aligned} p_i^2 \beta_{i,i} &= p_i - T_{i,i} \\ p_i p_k \beta_{i,k} &= -T_{i,k} \end{aligned} \quad (i, k = l \dots g).$$

I pesi ed i coefficienti di correlazione risultano pertanto

$$P_i = \frac{1}{\beta_{i,i}} = \frac{p_i}{1 - \frac{T_{i,i}}{\beta_{i,i}}}, \quad \sigma_{r,s} = \frac{\beta_{i,k}}{\sqrt{\beta_{i,i} \beta_{k,k}}} = \frac{-T_{i,k}}{\sqrt{(p_i - T_{i,i})(p_k - T_{k,k})}}$$

Si possono così anche in questo caso calcolare gli errori medi delle incognite e di qualsiasi loro funzione derivabile.

8. CONCLUSIONE. — I procedimenti sopra svolti mostrano con quanta speditezza e facilità, valendosi di poche nozioni elementari il calcolo delle matrici porti a trovare risultati ed a conoscere proprietà, che con metodi classici risultano attraverso considerazioni e sviluppi assai più lunghi e prolissi.

Naturalmente, spetta poi alla Teoria degli errori dare uno svolgimento pratico alle formule, facendo in modo di trovare per il calcolo numerico adeguati algoritmi. La parte concettuale, invece, si può lasciare, di massima, al calcolo delle matrici, che colla chiarezza derivante dalla sua coincisione, si dimostra un prezioso strumento anche per altre ricerche in questo campo.

BIBLIOGRAFIA

- CHERUBINO S., *Geometria analitica*. Milano 1940.
- FRAZER R. A., DUNCAN W. I., COLLAR A. R., *Elementary Matrices*. Cambridge 1938.
- MARUSSI A., *Ricerca dei coefficienti di correlazione, ecc.* «Riv. Catasto e S. S. T. T. E. E.», n. 4, 1941.
- MARCANTONI A., *Sul significato dei coefficienti, ecc.* «Rivista Catasto e S. S. T. T. E. E.», n. 4, 1940; *Pesi e correlazioni, ecc.* «Acc. d'Italia Rend. Fis.», fasc. I, vol. III, 1941, e «Ist. Lombardo Rend. Scienze», vol. LXXV, fasc. I, 1941-42.
- JENSEN H., *Herleitung einiger Ergebnisse der Ausgleichrechnung mit Hilfe von Matrizen.* «Ist. Geod. Copenaghen», n. 13. 1939.
- JORDAN W., *Aandbuch der Vermessungskunde*, Bd. I. Stuttgart 1935.
- PIZZETTI P., *Geodesia teoretica*. Bologna, 1928.

A PROPOSITO DI UN TEOREMA DI TERASAKA (*)

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

SYMMARIVM. — Ostendit Auctor secundum TERASAKA quadrata critica quae attinent ad planum autohomeomorphismum t , qui indicatricem retineat et unitis punctis careat (id est quadrata quae suam imaginem, cum t mutatur, tangunt), si in certa plani regione, libere definita, contineantur, in finitum classium numerum distribui; quae classes singulae singulis elementis constare putari possunt, si respiciamus theorema terasakianum, quo ad quadrata critica extenditur theorema v. KERÉKJÁRÓ, quod est de segmentis vel radiis praecipuis segmenti translationis autohomeomorphismi t .

I segmenti di traslazione di un autoomeomorfismo piano t , privo di punti uniti e conservante l'indicatrice, contenuti in un segmento, costituiscono con un insieme chiuso. Questa è la sostanza di un mio lemma ⁽¹⁾, dal quale segue ⁽²⁾ che i segmenti di traslazione, contenuti in un segmento dato, si possono distribuire in un numero finito di classi, in guisa che tutti gli elementi della stessa classe abbiano comuni due punti fissi, fondamentali uno per uno e l'altro per l'altro dei due campi adiacenti alla traiettoria generata dall'elemento corrente

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi il 27 luglio 1947.

(¹) G. SCORZA DRAGONI, *Intorno ad alcuni teoremi sulle traslazioni piane*. [«Memorie della R. Accademia d'Italia», Classe di Scienze fis., mat. e nat., vol. IV (1933), pagg. 159-212], n. 12.

(²) *Loc. cit.*, § 11.

Per la terminologia rimando alla Memoria citata in (¹), oppure a:

G. SCORZA DRAGONI, *Una estensione dell'ultimo teorema geometrico di Poincaré* [ibidem, vol. IV (1933), pagg. 213-269]; la lettura del § 2 di questa seconda Memoria è più che sufficiente.

di quella classe; segue, cioè ⁽³⁾, che i segmenti di traslazione contenuti in un segmento dato si possono suddividere in un numero finito di classi, ciascuna delle quali si comporti come costituita da un solo elemento nei riguardi del teorema di v. KERÉKJÁRTÓ sull'esistenza dei raggi e dei segmenti fondamentali ⁽⁴⁾, nel senso che tutti gli elementi di quella classe hanno comuni o due segmenti o due raggi, o un segmento e un raggio, fondamentali per essi relativamente uno ad uno e l'altro all'altro dei due campi adiacenti alle singole traiettorie generate dai singoli elementi di quella classe.

Orbene, TERASAKA ha dimostrato ⁽⁵⁾ pei quadrati critici della trasformazione t , cioè per quei quadrati del piano che toccano la propria immagine nella t , un teorema analogo a quello di v. KERÉKJÁRTÓ, ricordato in ⁽⁴⁾, circa l'esistenza di segmenti o raggi fondamentali per un segmento di traslazione. Inoltre è evidente che i quadrati critici del piano costituiscono un insieme chiuso, rispetto ed una conveniente nozione di distanza. Sicchè è naturale domandarsi se per i quadrati critici contenuti, per esempio, in un rettangolo è ancora possibile una suddivisione in un numero finito di classi, ciascuna delle quali si comporti come se fosse costituita da un solo elemento.

In questa Nota preciserò la domanda e le darò una risposta affermativa.

Sicchè la questione, che posi altrove ⁽⁶⁾ per i segmenti di traslazione contenuti in un rettangolo e paralleli ad una direzione fissa, ha una risposta favorevole (e giustificabile in modo abbastanza rapido), se trasportata ai quadrati critici di TERASAKA.

Circa la quale questione, nella sua forma originale, desidero far rilevare che credo di avere ormai fornito i mezzi per risolverla con

⁽³⁾ Si avverta che qui chiamo raggio fondamentale, quello che nelle Memorie citate in ⁽¹⁾, in ⁽²⁾ e nella successiva ⁽⁶⁾ dicevo semiretta fondamentale.

⁽⁴⁾ B. v. KERÉKJÁRTÓ, *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré* [*Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae*], tomo IV (1938), pagg. 86-102], pagg. 94-96.

Ma si veda anche *loc. cit.* ⁽¹⁾, nn. 28 e 29.

⁽⁵⁾ H. TERASAKA, *Ein Beweis des Brouwerschen ebenen Translationssatzes* [*Japanese Journal of Mathematics*], vol. VII (1930), pagg. 61-69], pag. 66, teorema II.

⁽⁶⁾ G. SCORZA DRAGONI, *Sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano e sulle loro curve di accumulazione* [*Memorie della R. Accademia d'Italia*], Classe di Scienze fis., mat. e nat., vol. IX (1937), pagg. 1-75].

la Memoria citata in ⁽⁶⁾ e con una Nota recente ⁽⁷⁾; e che ritengo che essa possa esser risolta in senso favorevole, anche se posta per *tutti* i segmenti di traslazione contenuti in un rettangolo dato ⁽⁸⁾. Non entro qui in dettagli ulteriori; mi limito ad accennare, cfr. la successiva nota ⁽²⁴⁾, che la questione va precisata in modo analogo a quello qui seguito nei §§ 4 e 5, estendendo cioè le nozioni di segmento e raggio fondamentale ^(*).

§ 1. - PRELIMINARI

1. - Nel piano (reale euclideo) ambiente sia data una trasformazione topologica t , che conservi il senso delle rotazioni e sia priva di punti uniti.

Secondo TERASAKA, *loc. cit.* ⁽⁵⁾, pag. 61, un insieme chiuso E del piano (in particolare un dominio) è un insieme (un dominio) *critico*, rispetto a t , se E e la sua immagine $t(E)$ nella t hanno punti comuni, e questi appartengono tutti e alla frontiera di E e a quella di $t(E)$.

In particolare il quadrato Γ , di contorno γ , è un quadrato critico, se o $\Gamma \cdot t(\Gamma) \neq 0$ o $\Gamma \cdot t(\Gamma) = \gamma \cdot t(\gamma)$. Per il che occorre e basta che l'intersezione $\Gamma \cdot t(\Gamma)$ sia diversa da zero ed appartenga a γ .

2. - Orientiamo il piano, cioè fissiamo un vero positivo delle rotazioni.

Sia Γ un quadrato critico, di contorno γ .

⁽⁷⁾ G. SCORZA DRAGONI, *Estensioni alle quasi-traiettorie di un teorema di Brouwer sulle traiettorie di un autoomeomorfismo piano* [*Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei*], serie 8, vol. I (1946), pagg. 156-161].

⁽⁸⁾ La questione cui si allude nel testo può essere risolta anche coi teoremi contenuti in questa Nota e nell'altra mia *A proposito di un teorema sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni* [*Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*], serie 8, vol. I (1947), pagg. 697-704]; però nella soluzione che si ottiene per questa via bisogna sostituire i segmenti e i raggi fondamentali con dello opportune spezzato, analogamente a quanto ho fatto nella Nota ora citata.

^(*) La questione cui si allude nel testo è completamente risolta, nel senso affermativo, in una mia memoria in corso di stampa presso gli « *Annali dell'Università di Trieste* » [nota aggiunta sulle bozze].

Allora, per definizione, i punti di Γ sono non interni a $t(\Gamma)$.

Se $\Gamma \cdot t(\Gamma)$ si riduce a un solo punto K , cioè se $\gamma \cdot t(\Gamma) = K$, $\gamma - K$ è tutto esterno a $t(\Gamma)$. Il punto K^{-1} appartiene anch'esso a γ e, insieme con K , divide γ in due archi, che sono i due soli archi di traslazione contenuti in γ . Diremo *primo* quello di questi due archi che si percorre per primo, quando ci si sposti su γ nel verso positivo a partire da K^{-1} ; *secondo* l'altro; *speciali* entrambi.

Se $\Gamma \cdot t(\Gamma) = \gamma \cdot t(\gamma)$ non si riduce a un solo punto, γ contiene ⁽⁹⁾ un arco ed uno solo, che abbia gli estremi (distinti) su $t(\gamma)$, i cui punti diversi dagli estremi siano esterni a $t(\Gamma)$ e possano esser congiunti con l'infinito senza incontrare ulteriormente $\gamma \cdot t(\gamma)$. Siano A e B gli estremi di questo arco; sia μ l'altro arco di γ , avente gli stessi estremi. Ogni punto di μ , diverso da A e B , è separato dall'infinito mediante $\gamma \cdot t(\gamma)$ ⁽¹⁰⁾.

I punti $t^{-1}(A)$ e $t^{-1}(B)$ appartengono a γ , anzi $\gamma - \mu$ ⁽¹¹⁾. Inoltre è lecito supporre di avere scelti i simboli in modo che, se si percorre γ nel verso positivo a partire da $t^{-1}(A)$, i punti $t^{-1}(A)$, A , B , $t^{-1}(B)$ si incontrino nell'ordine scritto.

⁽⁹⁾ Per le affermazioni di questo numero si veda *loc. cit.* ⁽⁵⁾, pag. 64.

⁽¹⁰⁾ Per queste affermazioni si veda anche: M. VOLPATO, *Sull'esistenza di punti uniti nelle trasformazioni topologiche del cerchio* [«Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», serie 8, vol. I (1946), pagg. 704-709].

⁽¹¹⁾ Questa circostanza si può dimostrare anche nel modo che segue.

Rammentiamo che, secondo un teorema di BROUWER [*Ein Beweis des ebenen Translationssatzes*, «Mathematische Annalen», vol. 72 (1912), pagg. 37-54, teorema 8]:

1) se P è un punto del piano, la successione $P, t(P), t^{-1}(P), t^2(P), t^{-2}(P), \dots$ è divergente.

Ciò promesso, facciamo vedere che $t^{-1}(A)$ e $t^{-1}(B)$ non possono essere interni a μ . Infatti, i punti interni a μ sono separati dall'infinito mediante $\gamma \cdot t(\gamma)$. Quindi, se $t^{-1}(A)$ fosse, p. es., interno a μ , $t^{-1}(\gamma)$ conterrebbe punti separati dall'infinito mediante $\gamma \cdot t(\gamma)$. D'altra parte $t^{-1}(\gamma)$ non può tagliare γ , perchè Γ è un quadrato critico; inoltre $t^{-1}(\gamma)$ non può incontrare $t(\gamma)$, sempre perchè γ è un quadrato critico — cfr. *loc. cit.* ⁽⁵⁾, pag. 63, teorema I —; quindi $t^{-1}(\gamma)$ sarebbe separata dall'infinito mediante $\gamma \cdot t(\gamma)$. E lo stesso accadrebbe allora anche per $t^{-2}(\gamma), t^{-3}(\gamma), \dots$, che non incontrano nemmeno loro nè γ , nè $t(\gamma)$ — cfr. *loc. cit.* ⁽⁵⁾, pag. 63. E ci si troverebbe in contraddizione con la proposizione 1) di questa nota ⁽¹¹⁾. Inoltre, dalla $t(\gamma) \cdot t^{-1}(\gamma) = 0$ segue subito che $t^{-1}(A)$ e $t^{-1}(B)$ non possono essere estremi di μ [e la cosa si potrebbe anche escludere in altri modi più diretti]. Donde la conclusione.

L'arco α di γ , di estremi $t^{-1}(A)$ ed A , non contenente B , è allora perfettamente individuato ed è un arco di traslazione. Esso è il *primo arco speciale* di γ . Il *secondo arco speciale* di γ è l'arco β di γ di estremi $t^{-1}(B)$ e B e non contenente A ; anche questo secondo arco speciale è un arco di traslazione. Denoti ν l'arco di γ , di estremi $t^{-1}(A)$ e $t^{-1}(B)$, che non contiene μ .

I punti interni di ν sono i punti di γ separati dall'infinito mediante $t^{-1}(\gamma) \div \gamma$. Infatti ν nella t^{-1} ha per γ e $t^{-1}(\gamma)$ l'ufficio, che μ ha per γ e $t(\gamma)$ nella $t^{(12)}$.

3. - Introduciamo una metrica nella totalità dei quadrati del piano.

Fissiamo allo scopo un sistema di assi cartesiani ortogonali x e y , dato un quadrato, conduciamo per il centro di questo due assi ξ ed η , rispettivamente equiversi agli assi x e y ; assumiamo ξ e η come nuovi assi cartesiani; diciamo primo, il vertice di quel quadrato che appartiene all'insieme $\xi > 0, \eta \geq 0$, secondo quello che appartiene all'insieme $\xi \leq 0, \eta > 0$, terzo quello che appartiene all'insieme $\xi < 0, \eta \leq 0$, quarto quello che appartiene all'insieme $\xi \geq 0, \eta < 0$.

Ciò premesso, siano Γ_1 e Γ_2 due quadrati del piano. Facciamone ruotare uno attorno al proprio centro di un angolo χ , in maniera che a rotazione eseguita i suoi lati siano ordinatamente paralleli a quelli dell'altro. La misura in radianti ω di χ è perfettamente individuata in modulo, se le si impone la condizione $0 \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{4}$. Dopo si calcolino le distanze $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ dei primi, dei secondi, dei terzi, dei quarti vertici del quadrato rimasto fermo e di quello ottenuto mediante la rotazione. La somma $|\omega| + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$ è la *distanza* $\overline{\Gamma_1 \Gamma_2}$ di Γ_1 e Γ_2 .

È evidente che questa nozione di distanza verifica la $\overline{\Gamma_1 \Gamma_2} = 0$, se, e soltanto se, $\Gamma_1 = \Gamma_2$; è indipendente dell'ordine con cui si considerano Γ_1 e Γ_2 ; soddisfa alla solita relazione triangolare.

4. - Siano Q_0 e Q_1 due quadrati critici del piano (relativi a t), fisso il primo, variabile il secondo.

(12) Si rammenti che anche t^{-1} è un autoomorfismo piano, che conserva l'indicatrice e non ammette punti invarianti.

Se $i = 0$, oppure $i = 1$, denotiamo con:

q_i il contorno di Q_i ;

con

c_i e d_i il primo e il secondo arco speciale di q_i , di estremi rispettivi $t^{-1}(C_i)$, C_i e $t^{-1}(D_i)$, D_i ;

e con:

m_i l'arco di q_i di estremi C_i e D_i , che non contiene $t^{-1}(C_i)$ e $t^{-1}(D_i)$, ed n_i l'arco di q_i di estremi $t^{-1}(C_i)$ e $t^{-1}(D_i)$, che non contiene C_i e D_i .

Si noti che non si è escluso che possa essere $C_i = D_i$.

5. - Supponiamo ora che sia $C_0 = D_0$. Allora, in conformità di quanto si è fatto nel n. 2, indichiamo con una lettera diversa, per esempio H_0 , il punto C_0 .

Indi è chiaro che:

In queste ipotesi, se la distanza $\overline{Q_0 Q_1}$ è minore di un conveniente numero positivo, tutti i punti comuni a Q_1 e $t(Q_1)$ [a Q_1 e $t^{-1}(Q_1)$] sono contenuti in un intorno prefissato di H_0 [di $t^{-1}(H_0)$];

cioè, che;

In queste ipotesi, prefissato un numero positivo ε , esiste un δ positivo, in maniera tale, che dalla $\overline{Q_0 Q_1} < \delta$ seguano le $\overline{C_1 H_0} < \varepsilon$, $\overline{D_1 H_0} < \varepsilon$, $\overline{t^{-1}(C_1) t^{-1}(H_0)} < \varepsilon$, $\overline{t^{-1}(D_1) t^{-1}(H_0)} < \varepsilon$ e l'appartenenza di c_i e d_i rispettivamente agli ε -intorni di c_0 e d_0 .

- vale a dire, agli insiemi dei punti (del piano) che hanno una distanza minore di ε rispettivamente da c_0 e d_0 -.

In particolare, se P_0 è un punto interno al primo [al secondo] arco speciale di q_0 e se ρ e δ sono positivi e abbastanza piccoli, da $\overline{Q_0 Q_1} < \delta$ segue che gli eventuali punti di q_1 aventi da P_0 una distanza minore di ρ , sono interni al primo [al secondo] arco speciale di q_1 :

6. - Quest'ultimo risultato sussiste tal quale, anche se $C_0 \neq D_0$.

Infatti, gli eventuali punti interni a m_1 [ad n_1] sono separati dall'infinito mediante $q_1 + t(q_1)$ [mediante $t^{-1}(q_1) + q_1$]; quindi, se l'affermazione fatta non fosse verificata, il punto P_0 sarebbe o separato dall'infinito mediante $q_0 + t(q_0)$ [mediante $t^{-1}(q_0) + q_0$] o contenuto in $t(q_0)$ [in $t^{-1}(q_0)$]; e tutto ciò contraddirebbe l'ipotesi fatta su P_0 .

Di qui e del teorema di PINCHERLE-BOREL è facile dedurre che:

Se l_0 è un arco interno a c_0 [a d_0], estremi inclusi, e se δ è abbastanza piccolo, l_0 ha una distanza positiva dagli insiemi descritti da m_1 e n_1 sotto la condizione $Q_1 Q_0 < \delta$. Naturalmente questo vale, sia se è $C_0 = D_0$, che se è $C_0 \neq D_0$.

§ 2. - ALTRE PROPOSIZIONI PRELIMINARI

7. - Riprendiamo i simboli e le ipotesi del n. 2.

Consideriamo cioè di nuovo il quadrato critico Γ e gli archi speciali α e β sul contorno γ di Γ . E $\sigma(\alpha) = \sum_{-\infty}^{+\infty} t^p(\alpha)$, $\sigma(\beta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} t^p(\beta)$ siano le traiettorie generate da α e β .

In conformità di ciò, se Γ è un quadrato critico, porremo

$$\sigma(\Gamma) = \sum_{-\infty}^{+\infty} t^p(\Gamma).$$

Allora $t(\alpha)$ e $t^{-1}(\alpha)$, $t(\beta)$ e $t^{-1}(\beta)$ hanno soltanto un estremo su γ e, tolto questo, sono esterni a Γ . Inoltre una curva semplice e aperta, il cui interno sia interno a Γ , non può tagliare la propria immagine.

Di qui e da un noto teorema di BROUWER⁽¹³⁾ si deduce facilmente che è $\Gamma \cdot \sigma(\alpha) = \alpha$; cioè che i punti di $\Gamma - \alpha$ giacciono tutti dalla stessa banda di $\sigma(\alpha)$, o, in altri termini, che tutti i punti di $\Gamma - \alpha$ appartengono allo stesso campo adiacente a $\sigma(\alpha)$ ⁽¹⁴⁾. Diciamo $\Sigma(\alpha)$

⁽¹³⁾ Precisamente da questo:

Una linea semplice e aperta ρ taglia la propria immagine nella t , se i suoi estremi possono essere pensati come estremi di un arco di traiettoria, il quale contenga nell'interno un arco di traslazione e formi con ρ una curva semplice e chiusa;

per il quale teorema si veda BROUWER, *loc. cit.*⁽¹¹⁾, pag. 44; v. KERÉKJÁRTÓ, *loc. cit.*⁽⁴⁾, pag. 92; G. SCORZA DRAGONI, *Criteri per l'esistenza di elementi uniti nelle trasformazioni topologiche del cerchio e loro applicazioni* [« Annali di Matematica pura ed applicata », in corso di stampa], § 6.

⁽¹⁴⁾ Quest'ultima circostanza segue da alcuni teoremi di BROUWER; p. es. si vedano gli ultimi quattro teoremi a pag. 167 della Memoria citata in ⁽¹⁾. Per maggiore chiarezza del testo, conviene anche rammentare esplicitamente che

1) una traiettoria è una linea semplice;

e che
2) una traiettoria non può riavvicinarsi indefinitamente ad una posizione per la quale sia già passata;

a norma di altri due teoremi di BROUWER [cfr. *loc. cit.*⁽¹¹⁾, teoremi 1 e 3].

il campo adiacente a $\sigma(\alpha)$, situato dalla banda opposta di $\Gamma - \alpha$ rispetto a $\sigma(\alpha)$; cioè, non contenente nessun punto di Γ e (quindi) di $\sigma(\Gamma)$ — si rammenti che $\Sigma(\alpha)$, per definizione, è aperto e quindi non contiene nemmeno punti di $\sigma(\alpha)$ —.

Allo stesso modo si riconosce che uno, ed uno solo, $\Sigma(\beta)$, dei due campi adiacenti a $\sigma(\beta)$ non contiene nessun punto di $\sigma(\Gamma)$, mentre l'altro contiene tutti i punti di $\sigma(\Gamma) - \sigma(\beta)$.

Diremo che $\Sigma(\alpha)$ e $\Sigma(\beta)$ sono rispettivamente il *primo* e il *secondo campo adiacente* a $\sigma(\Gamma)$.

8. — Consideriamo ora un quadrato critico Q_0 fisso ed una variabile Q_1 , analogamente a quanto abbiamo fatto nei nn. 4, 5 e 6. E riprendiamo i simboli là introdotti.

Se $\overline{Q_0 Q_1} < \delta$, con δ positivo e convenientemente piccolo, il centro Z_1 di Q_1 è interno a quei campi adiacenti alle traiettorie $\sigma(c_0)$ e $\sigma(d_0)$, generate rispettivamente da c_0 e d_0 , che contengono il centro Z_0 di Q_0 .

Inoltre, a norma di quanto si è detto alla fine del n. 6, e sempre se riesce $\overline{Q_0 Q_1} < \delta$, con δ positivo e conveniente, una semiretta r prefissata, con l'origine in Z_0 , che incontri c_0 [o d_0] in un punto interno P_0 , incontra q_1 in un punto P_1 interno o a c_1 , o a d_1 , anzi (interno) a c_1 [o a d_1]. Indi i punti di r esterni a Q_1 e prossimi a P_1 sono interni a $\Sigma(c_1)$ [o a $\Sigma(d_1)$], così come i punti di r esterni a Q_0 e prossimi a P_0 sono interni a $\Sigma(c_0)$ [o a $\Sigma(d_0)$].

§ 3. — SUL TEOREMA DI TERASAKA

9. — A proposito dei quadrati critici, TERASAKA ha dimostrato⁽¹⁵⁾ il seguente teorema:

Se Γ è un quadrato critico; λ un arco speciale del contorno γ di Γ ; $\Sigma(\lambda)$ il relativo campo adiacente a $\Sigma(\Gamma) = \sum_p^{+\infty} t^p(\Gamma)$, di guisa che esso è anche un campo adiacente a $\sigma(\lambda) = \sum_p^{+\infty} t^p(\lambda)$, o esiste un quadrato critico Θ , di contorno \mathfrak{F} , che

I) è contenuto in $\Sigma(\lambda) + \sigma(\lambda)$;

(15) Loc. cit. (5), pagg. 66-68.

II) ha comune con $\sigma(\lambda)$ soltanto un segmento (ordinario, non nullo) contenuto in \mathfrak{S} ed in λ , anzi o interno a λ , o coincidente con λ ;

o esiste una regione chiusa e convessa Ω , delimitata da due semirette ortogonali aventi l'origine comune, la quale o è libera (cioè non ha punti comuni con la propria immagine) o è critica, ed inoltre

I') è contenuta in $\Sigma(\lambda) + \sigma(\lambda)$

e

II') ha comune con $\sigma(\lambda)$ soltanto un segmento (ordinario, non nullo), contenuto nel contorno di Ω e interno a λ .

Le due alternative non si escludono a vicenda. Inoltre:

Se λ è un segmento, si può sempre supporre verificata la prima alternativa;

e:

Se λ un segmento e se $\mathfrak{S} \cdot \sigma(\lambda) = \lambda$, si può senz'altro supporre che λ sia un lato di Θ .

Tutte queste affermazioni sono o enunciate esplicitamente, o dimostrate implicitamente nel passo citato nella nota ⁽¹⁵⁾.

È poi chiaro che:

Se λ non è un segmento esso stesso, il segmento $\mathfrak{S} \cdot \lambda$, considerato in II), è interno a λ .

Se si presenta il caso della regione Ω , si può dire, volendo, che Θ è diventato infinitamente grande e tocca sempre la propria immagine, al finito o all'infinito.

10. - Esaminiamo un po' meglio che cosa accada nella prima delle due alternative considerate nel numero precedente.

Consideriamo il quadrato critico Θ e i due archi speciali φ e ψ di \mathfrak{S} .

I punti del segmento $s = \mathfrak{S} \cdot \lambda$ sono tutti non interni sia a $t^{-1}(\Theta)$ che a $t(\Theta)$; anzi i punti interni di s sono esterni alle immagini di Θ nella t e nella t^{-1} . Infatti \mathfrak{S} ha comune con $\sigma(\lambda)$ soltanto il segmento s , contenuto in λ ; quindi tutti i punti di $\sigma(\lambda) - s$ sono esterni a Θ , perchè altrimenti sarebbe contraddetta la proposizione 1) della nota ⁽¹¹⁾. In particolare, i punti interni a $t(s)$ e $t^{-1}(s)$ sono esterni a Θ . Donde la conclusione voluta.

In ciò è implicito che i punti interni ad s non sono separati dall'infinito mediante $t^{-1}(\mathfrak{S}) + \mathfrak{S} + t(\mathfrak{S})$; infatti questo insieme è contenuto

in $\Sigma(\lambda) + \sigma(\lambda)$, mentre i punti interni a Γ appartengono al campo adiacente a $\sigma(\lambda)$ e diverso da $\Sigma(\lambda)$ e quindi possono essere congiunti coll'infinito senza incontrare $\Sigma(\lambda) + \sigma(\lambda)$, a norma di un teorema di BROUWER [*loc. cit.* (¹¹), lemma 4]; dopo di ciò è facile dedurre che un punto interno ad s può essere congiunto coll'infinito mediante una semilinea che ha soltanto l'origine su s ; c. v. d.

Ne segue (n. 2) che s è contenuto o tutto in φ , o tutto in ψ . Ma φ e ψ hanno al più gli estremi comuni. Quindi:

Nelle ipotesi poste, o

α) uno dei due archi speciali di \mathfrak{S} è interno a $\Sigma(\lambda)$;

oppure

β) φ e ψ hanno comuni gli estremi e questi cadono entrambi su $\sigma(\lambda)$; uno dei due archi speciali di \mathfrak{S} è interno a $\Sigma(\lambda)$, a meno degli estremi.

In questa seconda alternativa, o φ , o ψ coincide con s e quindi con λ . Infatti, poniamo per esempio che s appartenga a φ . Allora, poichè $s = \mathfrak{S} \cdot \sigma(\lambda)$, gli estremi di φ appartengono a s : donde $\varphi = s$. Quindi φ appartiene all'arco di traslazione λ ; ma è esso stesso un arco di traslazione; dunque φ deve coincidere con λ . E di qui segue di nuovo che i punti interni di ψ sono allora interni a $\Sigma(\lambda)$.

In particolare, l'alternativa β) si può presentare soltanto se λ è un segmento. Anzi (cfr. n. 9, in fine): *se si presenta l'alternativa β), si può supporre che uno dei due archi speciali di \mathfrak{S} sia costituito da un lato di \mathfrak{S} e l'altro dalla somma degli altri tre lati.*

§ 4. - ANCORA SUL TEOREMA DI TERASAKA

11. - Sia dato di nuovo il quadrato critico fisso Q_0 ; sia l_0 un arco speciale del contorno q_0 di Q_0 ; $\Sigma(l_0)$ il relativo campo adiacente a $\sigma(Q_0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} t^p(Q_0)$; si ponga al solito $\tau(l_0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} t^p(l_0)$.

Si supponga che l'applicazione del teorema di TERASAKA a Q_0 e $\Sigma(l_0)$ conduca a una regione angolare R soddisfacente alle I') e II') del n. 9.

Consideriamo due intorni circolari aperti U_0 e V_0 , uno dell'uno e l'altro dell'altro dei due estremi del segmento $R \cdot \sigma(l_0) = R \cdot l_0$. Supponiamo che U_0 e V_0 abbiano raggi uguali e una distanza positiva fra di loro.

E sopprimiamo da R tutti i punti delle semirette che abbiano le origini in U_0 e V_0 , che incontrino uno solo di questi interni e che siano parallele alla retta che contiene il segmento $R \cdot l_0$. Diciamo R' la figura che si ottiene così da R .

Consideriamo adesso un rettangolo r' , che abbia $R' \cdot l_0$ come lato, sia situato rispetto ad l_0 dalla banda opposta di R' , e sia tanto sottile da non contenere nessun punto di $\sigma(l_0)$ diverso da quelli di $R' \cdot l_0$ [ipotesi lecita in virtù della 2) della nota ⁽¹⁴⁾ e del fatto che $R \cdot l_0$ e, *a fortiori*, $R' \cdot l_0$ sono interni a l_0] e da non incontrare la propria immagine [ipotesi lecita perchè $R' \cdot l_0$ è interno ad l_0 e quindi ha una distanza positiva dalla propria immagine].

Atteso il fatto che r' e R' sono situati da bande opposte di $\sigma(l_0)$, dalle altre ipotesi si deduce che, posto

$$T_0 = R' + r',$$

risulta $t(T_0) \cdot T_0 = t(R') \cdot R'$ ⁽¹⁵⁾.

In definitiva:

L'insieme T_0 è chiuso, illimitato, delimitato da una linea semplice e aperta in senso stretto ⁽¹⁷⁾, e gode delle seguenti proprietà:

a) l'intersezione di T_0 e $\sigma(l_0)$ si riduce ad un segmento (non nullo) interno ad l_0 il cui interno è interno a T_0 ;

b) l'insieme $T_0 - T_0 \cdot \Sigma(l_0)$ è limitato e non incontra la propria immagine, inoltre appartiene a Q_0 ;

c) l'insieme $T_0 - T_0 \cdot Q_0$ appartiene a $\Sigma(l_0)$;

d) l'insieme $t(T_0) \cdot T_0$ o è vuoto, o è contenuto e nell'intersezione delle frontiere di $t(T_0)$ e di T_0 e nell'insieme $\Sigma(l_0)$.

Per esprimere tutti questi fatti, diremo che T_0 è un *insieme fondamentale* relativo a Q_0 e $\Sigma(l_0)$.

12. - L'insieme T_0 gode di altre proprietà di struttura, che è inutile conglobare nella definizione, ma le cui conseguenze sono importanti.

⁽¹⁵⁾ Cfr. *loc. cit.* (2), § 3.

⁽¹⁷⁾ Chiamo così le immagini biunivoche e continue di una retta che contengono tutti i propri punti di accumulazione (al finito), cioè le linee semplici e aperte secondo BROUWER. In *loc. cit.* (1), n. 7, dicevo invece linee semplici, aperte, serrate.

Sia Q un quadrato critico variabile; sia l un arco speciale del contorno q di Q , e precisamente il primo o il secondo, se e l_0 è rispettivamente il primo o il secondo arco speciale di q_0 ; in corrispondenza, sia $\Sigma(l)$ il primo o il secondo campo adiacente a $\sigma(Q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} t^p(Q)$.

Allora è facile dedurre, dalla costruzione di T_0 e dalle proprietà esposte nei nn. 5 e 6, che:

Se Q è abbastanza vicino a Q_0 , l'insieme T_0 definito nel numero precedente è fondamentale anche per Q e $\Sigma(l)$.

Infatti delle affermazioni implicite in questa, l'unica non evidente è quella espressa dalla: l'intersezione di T_0 e della traiettoria $\sigma(l)$, generata da l , si riduce ad un segmento contenuto in l .

Ora dalle proprietà ricordate dei nn. 5 e 6, dalla *a*), dal fatto che $T_0 \cdot \sigma(l_0)$ è un segmento interno e l_0 e dalla struttura metrica di T_0 segue che l'intersezione di T_0 e di $t^{-1}(l) \dot{+} l \dot{+} t(l)$ è un segmento interno ad l .

Ma allora, di qui e dal fatto che una curva contenuta in T_0 non può mai tagliare la propria immagine segue, in virtù del teorema della nota ⁽¹⁸⁾, che $T_0 \cdot \sigma(l)$ e $T_0 \cdot l$ coincidono; donde la conclusione ⁽¹⁸⁾.

13. - Si supponga ora che l'applicazione del teorema di TERASAKA al quadrato critico Q_0 ed al campo adiacente $\Sigma(l_0)$ conduca ad un quadrato critico Q' verificante le I) e II) del n. 9 e tale che il segmento $s_0 = Q'_0 \cdot \sigma(l_0) = Q' \cdot l_0$ o sia interno ad l_0 o coincida con l_0 . Inoltre, in conformità di quanto è detto alla fine del n. 9, se l_0 è un segmento, esso sia anche un lato del contorno q' di Q' .

Si indichi con l' quell'arco speciale di q' che (n. 10) non contiene punti di s_0 .

Si applichi il teorema di TERASAKA a Q' e al campo $\Sigma(l')$ adiacente alla traiettoria $\sigma(l')$, generata da l' , e situato, rispetto a questa, dalla banda opposta di Q' - di guisa che risulta $\Sigma(l') \cdot Q = 0$ -.

Si perviene così o a un quadrato critico Q'' o a una regione angolare R'' , verificanti proprietà analoghe alle I), II), I') e II') del n. 9 e a quelle del n. 10.

Dimostriamo che se esiste Q'' , esso è interno a $\Sigma(l_0)$; se esiste R'' , R'' è interna a $\Sigma(l_0)$.

⁽¹⁸⁾ Cfr. p. es., loc. cit. ⁽¹⁾, nn. 21 e 22.

Infatti, si supponga che esista Q'' .

Se l' è interno a $\Sigma(l_0)$, $\sigma(l')$ o $\Sigma(l')$ sono entrambi interni a $\Sigma(l_0)$, e l'affermazione è evidente⁽¹⁹⁾.

Se l' non è interno a $\Sigma(l_0)$, esso ha gli estremi su $\sigma(l_0)$ e i punti interni in $\Sigma(l_0)$, v. n. 10; inoltre esso è costituito dalla somma di tre lati di q' (v. n. 10 in fine e si tenga presente che l_0 è un lato di q'). Ma allora, v. n. 9, $Q'' \cdot \sigma(l')$ è un segmento interno a l' , e quindi a $\Sigma(l')$. D'altra parte $\Sigma(l')$ è contenuto in $\Sigma(l_0)$, anche in questo caso⁽²⁰⁾; e $\Sigma(l_0)$ è aperto, per definizione; epperò Q'' è interno a $\Sigma(l_0)$.

Si supponga ora che esista R'' .

I punti di R'' o appartengono a $\Sigma(l')$, o appartengono a $\sigma(l')$. Nella prima alternativa sono interni a $\Sigma(l_0)$, come risulta da quanto precede. Nella seconda sono interni a l' , per la II') del n. 9; ma i punti interni a l' sono sempre interni a $\Sigma(l_0)$, come si è già visto; dunque, ecc.

14 - Manteniamo le ipotesi e le notazioni del numero precedente.

Consideriamo due interni circolari (aperti) U_0 e V_0 , uno di uno e l'altro dell'altro dei due estremi del segmento $s_0 = q' \cdot \sigma(l_0) = q' \cdot l_0$. Supponiamo che la somma dei loro raggi sia minore di s_0 e tanto piccola da aversi $U_0 \cdot Q'' = V_0 \cdot Q'' = 0$, oppure $U_0 \cdot R'' = V_0 \cdot R'' = 0$, se invece di Q'' esiste R'' .

Gli insiemi $S' = (Q' + Q'') - (U_0 + V_0) \cdot Q'$, o $T' = (Q' + R'') - (U_0 + V_0) \cdot Q'$, si saldano sempre a $\sigma(l_0)$ lungo un segmento $s' = s_0 - (U_0 + V_0) \cdot s_0$ interno a s_0 e quindi a l_0 .

Aggiungiamo ora a S' [a T'] un rettangolo r' , avente il segmento s' come base, situato rispetto a $\sigma(l_0)$ dalla banda opposta di S' [di T'], tanto sottile da non incontrare la propria immagine e da non contenere punti di $s(l_0)$ oltre quelli di s' . E poniamo

$$S_0 = S' + r' \quad [T_0 = T' + r'];$$

di guisa che $t(S_0) \cdot S_0 = t(S') \cdot S'$ [$t(T_0) \cdot T_0 = t(T') \cdot T'$], — cfr. n. 11 a proposito della $t(T_0) \cdot T_0 = t(R') \cdot R'$.

(19) Anzi la cosa è già nota: per una deduzione esplicita di queste circostanze, si cfr. *loc. cit.* (2), n. 11.

(20) Cfr. *loc. cit.* (2), n. 14: il fatto che gli estremi di l' appartengano a $\sigma(l_0)$ non ha importanza.

L'insieme S_0 contiene Q'' , quindi incontra la propria immagine; anzi non è difficile riconoscere che S_0 è un dominio critico [perchè tali sono Q' e Q'' e perchè Q' e Q'' sono situati da bande opposte rispetto a $\sigma(l')$, mentre $t(S_0) \cdot S_0 = t(S') \cdot S'$]. Inoltre esso è topologicamente equivalente ad un quadrato; quindi anche per il suo contorno vi è luogo a determinare due archi speciali, cfr. del resto *loc. cit.* (5) pag. 64. Orbene: è facile riconoscere che uno di questi coincide con l'arco speciale del contorno q'' di Q'' , contenuto in $\Sigma(l')$, a meno degli estremi, eventualmente. In definitiva:

Se esiste l'insieme S_0 , esso è delimitato da una curva chiusa di Jordan e gode delle seguenti proprietà:

a') l'intersezione di S_0 e $\sigma(l_0)$ si riduce a un segmento, interno a λ_0 e il cui interno è interno a S_0 ;

b') l'insieme $S_0 - S_0 \cdot \Sigma(l_0)$ appartiene a Q_0 e non incontra la propria immagine;

c') l'insieme $S_0 - S_0 \cdot Q_0$ appartiene a $\Sigma(l_0)$ e contiene il quadrato critico Q'' ,

d') l'insieme S_0 è esso stesso critico e $t(S_0) \cdot S_0$ appartiene a $\Sigma(l_0)$;

e') detto l'' l'arco speciale di q'' speciale anche per il contorno di S_0 , $S_0 - l''$ è contenuto in uno dei campi adiacenti alla traiettoria $\sigma(l'')$ generata da l'' , e precisamente a quello che contiene $Q'' - l''$,

la e') essendo conseguenza appunto del fatto che anche S_0 è critico.

Per esprimere tutte queste circostanze, diremo che S_0 è un insieme fondamentale relativo a Q_0 e $\Sigma(l_0)$

Inoltre è chiaro che la costruzione, data per Q_0 e $\Sigma(l_0)$, si può ripetere per Q'' e per il campo adiacente a $\sigma(l'')$ e non contenente punti di Q'' ; il che in sostanza equivale a dire che quella costruzione si può ripetere per S_0 e per il campo adiacente a $\sigma(l'')$, e non contenente punti di S_0 .

E ancora, si riconosce facilmente che:

Se esiste l'insieme T_0 , esso gode di proprietà analoghe alle a), b), c) e d) del numero 11.

15. - Anche in questo caso si riconosce che dalle proprietà di S_0 e T_0 , implicite nella loro costruzione o esplicite nelle a'), ..., e') o nelle a), ..., d), discende una proposizione analoga a quella data nel n. 12. Precisamente la:

Se $\Sigma(I_0)$ è il primo [il secondo] campo adiacente a Q_0 , gli insiemi S_0 e T_0 , definiti nel numero precedente sono fondamentali per il primo [il secondo] campo adiacente ad ogni quadrato critico abbastanza vicino a Q_0 ;

ed è chiaro che questa enunciazione si riferisce a quelli che esistono degli insiemi S_0 e T_0 .

§ 5. - SULLA TOTALITÀ DEI QUADRATI CRITICI.

16. - Sia G un insieme limitato del piano e ne sia F l'involucro chiuso.

I quadrati critici che hanno il centro in G sono contenuti fra i quadrati critici che hanno il centro in F . Sia \mathcal{F} l'insieme di questi ultimi.

Inoltre è chiaro che se un quadrato del piano è d'accumulazione per quadrati critici col centro in F , nel senso che deriva dalla nozione di distanza introdotta nel n. 3, esso stesso è un quadrato critico col centro in F . L'insieme \mathcal{F} è quindi chiuso.

Un quadrato col centro in F e che contenga F e $t(F)$ nell'interno non può certo esser critico; ma F e $t(F)$ sono limitati; quindi i lati dei quadrati critici col centro in F ammettono un estremo superiore finito. E di qui è facile dedurre che l'insieme \mathcal{F} è compatto (in sé) ⁽²¹⁾.

Inoltre \mathcal{F} è uno spazio metrico. Indi, per quanto precede, \mathcal{F} è un bicompatto ⁽²²⁾; cioè \mathcal{F} rientra nell'ambito degli insiemi astratti a cui è possibile applicare il teorema di PINCHERLE-BOREL.

17. - Sia ora Γ un quadrato di \mathcal{F} . E si dicano:

α e β il primo e il secondo arco speciale del contorno γ di Γ ;

$\Sigma(\alpha)$ e $\Sigma(\beta)$ il primo e il secondo campo adiacente a $\sigma(\Gamma) =$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} t^p(\Gamma);$$

$S(\alpha)$ e $S(\beta)$, se esistono, due insiemi analoghi all' S_0 del n. 14 e relativi rispettivamente a Q e $\Sigma(\alpha)$ a Q e $\Sigma(\beta)$;

⁽²¹⁾ Per la terminologia che adotto, si veda P. ALEXANDROFF e H. HOPF, *Topologie* [Springer, Berlino (1935)], pag. 84.

⁽²²⁾ *Loc. cit.* nota ⁽²¹⁾, pag. 87, teorema VI.

$T(\alpha)$ e $T(\beta)$, se esistono, due insiemi analoghi al T_0 del n. 11 o del n. 14 ⁽²³⁾ e relativi risp. a Q e $\Sigma(\alpha)$, a Q e $\Sigma(\beta)$.

Allora, dalle proposizioni dei nn. 12 e 15 e dalla bicompattezza di \mathcal{F} è facile dedurre che:

L'insieme \mathcal{Q} dei quadrati critici coi centri nell'insieme G , chiuso o non, ma limitato, si può decomporre in un numero finito di classi, in maniera tale che i quadrati di una stessa classe ammettano almeno un insieme, fondamentale per tutti, comune a tutti, e relativo ai rispettivi primi campi adiacenti, ed almeno un insieme, fondamentale per tutti, comune a tutti, e relativo ai rispettivi secondi campi adiacenti.

Infatti, attesa la bicompattezza di \mathcal{F} e i teoremi del § prec., è possibile scegliere un numero finito di quadrati $\Gamma_1, \dots, \Gamma_w$ di \mathcal{F} e determinare gli interni W_1, \dots, W_w di questi, in modo che ogni Γ di \mathcal{F} cada in almeno uno degli interni W_1, \dots, W_w ; e che se Γ cade in W_i ($i=1, \dots, w$), quelli esistenti degli insiemi $S(\alpha_i)$ e $T(\alpha_i)$ ovvero degli insiemi $S(\beta_i)$ e $T(\beta_i)$ si possano pensar come fondamentali, per Γ e $\Sigma(\alpha)$ i primi, per Γ e $\Sigma(\beta)$ i secondi — naturalmente il significato di α_i e β_i , e quindi di $S(\alpha_i)$, $T(\alpha_i)$, $S(\beta_i)$ e $T(\beta_i)$ è palese —.

Dopo di ciò è agevole ottenere una suddivisione di \mathcal{F} , epperò di \mathcal{Q} in un numero finito di classi del tipo voluto; e si può imporre la condizione ulteriore che due classi distinte siano prive di elementi comuni ⁽²⁴⁾.

⁽²³⁾ In questo momento applico il postulato di ZERMELO. Ma, se si vuole, basta riesaminare le dimostrazioni di TERASAKA e quelle qui svolte, per convincersi che l'uso di quel postulato si può eliminare.

⁽²⁴⁾ Per suddividere i segmenti di traslazione contenuti in un rettangolo in un numero finito di classi, ciascuna comportantesi come un solo elemento, bisogna estendere le nozioni di segmento e di raggio fondamentale seguendo l'indirizzo qui tenuto nei nn. 11 e 14: e cioè, sopprimere la condizione che i segmenti e i raggi fondamentali per un segmento di traslazione e un campo adiacente alla relativa traiettoria siano ortogonali al segmento di traslazione; e sostituire altresì la condizione che quei segmenti e quei raggi fondamentali siano interni, a meno dell'origine, a quel campo adiacente con l'altra di avere su quella traiettoria un punto soltanto (interno a quel segmento di traslazione) e di penetrare nell'altro campo adiacente a quella traiettoria con un segmento, che non incontri la propria immagine (cioè abbastanza corto).

OSSERVAZIONE. — Il teorema di questo numero permette di dimostrare l'ultimo teorema geometrico di POINCARÉ, sugli autoomeomorfismi di una corona circolare, applicando il procedimento dimostrativo dato da TERASAKA per il teorema di BROUWER in *loc. cit.* ⁽⁵⁾ pag. 69; così come la suddivisione dell'insieme dei segmenti di traslazione contenuti in un segmento in un numero finito di classi, comportantesi ciascuna come costituita da un solo elemento, si presterebbe a dimostrare quel teorema di POINCARÉ col procedimento dato, in questo ordine di idee, da V. KERÉKJÁRTÓ ⁽²⁵⁾.

⁽²⁵⁾ Cfr. *loc. cit.* ⁽⁴⁾; *loc. cit.* ⁽²⁾, § 5.

SUI DEPOSITI MORENICI PREWÜRMIANI DEI COLLI BERICI E SULLA LORO PROVENIENZA (*)

(Con due tavole)

GIORGIO DAL PIAZ
Accademico Pontificio

SYMMARIVM. — Exstare declaratur morenicas reliquias Prewürmianas (Ris-
sianas) in Bericorum declivi ad septentrionem vergente; easdem comprobatur
ortas esse ex vallium Athesis ac superioris Medoaci Maioris glaciatis molibus,
quae, superata Lavaronis regione in dorso montis porrecta, ac per Astyci et con-
tiguas valles descendentes, Bericos quidem colles attigerint.

Un fatto di singolare importanza per lo studio dell'espansione
glaciale nell'area del Veneto centrale è rappresentato dalla recente
scoperta di avanzi morenici prewürmiani nei Colli Berici a sud di
Vicenza.

Nel mese di febbraio dello scorso anno, il prof. GIUSEPPE PERIN,
benemerito ricercatore e studioso dei fenomeni geologici che interes-
sano la regione collinosa dei Berici, mi spedì in esame alcuni ciot-
toli di rocce cristalline da lui raccolti sul monte Lungo e sul monte
Mottolone che fanno parte del settore orientale del gruppo Berico e
sorgono a pochi chilometri a sud del lago di Fimon. Già nel settembre
del 1945 in una breve pubblicazione sull'attività naturalistica svolta
nei dintorni di Costozza vicentina, il prof. PERIN aveva fatto un fu-
gace cenno all'esistenza, come egli scrisse, di *strani depositi alluvio-
niali (o glaciali?) nei più alti strati dell'Oligocene berico* (1). L'esame

(*) Nota presentata nella riunione privata del 13 gennaio 1947.

(1) PERIN G., *Briciole di attività scientifica a Costozza*, « L'amico dei buoni
fanciulli », n. 5, pag. 70, Verona, 1945.

dei ciottoli inviatimi, rispondenti in grande maggioranza a quarziti accompagnate da elementi di porfiriti, di porfido quarzifero e di qualche raro granito, tutti più o meno arrossati in superficie dal terriccio nel quale erano originariamente avvolti, richiamò subito alla mia mente analoghi materiali di natura morenica di Cornuda, e specialmente del lato destro dell'anfiteatro del Garda lungo i fianchi del Chiese.

Per quanto l'idea che ciottoli morenici di origine alpina potessero trovarsi a quasi quaranta chilometri di distanza dalle più avanzate testimonianze moreniche frontali finora note e rappresentate dall'anfiteatro würmiano di Cogollo allo sbocco della valle dell'Astico apparisse a prima impressione fantastica, attraverso l'esame critico delle varie ipotesi essa finì col dimostrarsi l'unica interpretazione che potesse ragionevolmente spiegare la strana presenza di siffatti materiali esotici sui Colli Berici.

Dopo un breve scambio di lettere col prof. PERIN, decidemmo di recarci sul terreno per esaminare la cosa direttamente sul posto.

Il conte ALVISE DA SCHIO volle gentilmente accompagnarci colla sua automobile nelle varie località da esaminare, della quale cosa lo ringrazio sentitamente.

Salendo dal paese di Barbarano, situato al piede del versante orientale dei Berici, ci trovammo ben presto sul dorso del gruppo collinresco e non fu piccola la mia meraviglia quando in corrispondenza al M. Lungo, la cui sommità tocca la quota 440 metri sul mare, ebbi a fare la constatazione che tutto il cocuzzolo della collina (che ha il basamento formato da calcari grossolani dell'Oligocene superiore), è costituito da un vasto mantello di terra rossa, dalla quale emergono, perchè messi bene in evidenza dalle recenti piogge, numerosissimi ciottoli di quarziti, di porfiriti e di altre rocce cristalline.

In successive gite, sempre con la guida preziosa del prof. PERIN, potei constatare che analoghi depositi di terra rossa con gli stessi ciottoli di quarzite ed altre rocce cristalline, si trovano in varie località. Per spiegare l'abbondanza della terra rossa dei giacimenti morenici devesi tener presente che tutto all'ingiro i calcari oligocenici che fanno parte della struttura dei Berici, sono intensamente carsici e che la terra rossa proveniente dalla loro decomposizione, copre tuttora il fondo delle numerose doline e, specialmente dove vi è bosco

che esercita un'azione protettiva, anche i fianchi ed il dorso dei colli. Durante il dominio dell'antico ghiacciaio, essa è stata trasportata, specialmente per l'azione di dilavamento delle acque colanti, e mescolata al materiale morenico intensificandone la colorazione rossastra.

L'allegata cartina mostra come i vari depositi morenici, che le acque piovane e le altre azioni meteoriche non hanno ancora distrutto, occupino vari appezzamenti di superficie, formando delle piccole colline, oppure dei mantelli di vario spessore, i quali, nel loro insieme, costituiscono una specie di semicerchio poco lungi dal ciglio che fa passaggio alla sottostante conca del lago di Fimon, esaurientemente descritta dal FABIANI nella sua magnifica monografia geologica sui Colli Berici [11].

Non meno interessante del deposito morenico di M. Lungo, testè menzionato, è quello di M. Mottolone non lungi da S. Gottardo. Il materiale morenico ricopre largo tratto del versante settentrionale e tutto il dorso di questa piccola collina.

Partendo dal villaggio di Fimon e salendo lungo il bosco in direzione di M. Mottolone, si nota già come i calcari dell'Oligocene, che formano come si è detto lo zoccolo roccioso fondamentale della parte più elevata di questo tratto di rilievo collinresco, siano essi pure ricoperti da un grosso mantello di terra di colore rosso-mattone, dalla quale affiorano con particolare frequenza i ciottoli e i massi di quarzite e di altre rocce esotiche. La constatazione riesce più facile in corrispondenza alle pareti di una trincea rispondente ad una mulattiera sui cui fianchi i ciottoli morenici spiccano con maggiore evidenza.

Il dorso di M. Mottolone è costituito da un ripiano abbastanza vasto coltivato a campo. La terra rossa, che forma questo campo, in certi punti è tutta cosparsa di numerosissimi ciottoli di quarzite di svariate dimensioni, ma prevalentemente piccoli, circostanza che sta in relazione col fatto, osservato dai contadini, della forte usura che subiscono gli strumenti agricoli impiegati nella consueta lavorazione del terreno.

Dopo i ciottoli morenici di quarzite, considerati in ordine di frequenza, vengono quelli di porfiriti rossa; assai meno frequenti sono invece quelli di scisti, di verrucano, di porfiriti verdi, di porfidi quarziferi e di granito. Rarissimi i ciottoli di arenaria, e addirittura eccezionali quelli calcarei.

Riguardo alle dimensioni dei singoli elementi, pur predominando i formati piccoli e di media grandezza, esse sono assai varie. Si riscontrano però anche dei massi di ragguardevoli dimensioni, del peso di qualche quintale, rispondenti generalmente a quarziti ed a porfiriti rosse normali e conglomeratiche. Abbastanza comuni, specialmente sul cocuzzolo di M. Lungo, i ciottoli di proporzioni medie rispondenti a rocce feldspatiche; frequentissimi, come si è detto, gli elementi silicei di mediocri e piccole dimensioni, provenienti in gran parte dal disgregamento delle filladi quarzifere, delle quali, non di rado, portano ancora le tracce. Non infrequenti sono infine i ciottoli basaltici, la cui presenza non porta però alcun elemento discriminativo, giacchè rocce basaltiche in posto esistono anche in vari punti dei Colli Berici.

Le quarziti sono sempre fresche e, tutte le altre rocce descritte, porfiriti, porfidi quarziferi, scisti, graniti, assai poco o per nulla alterate. In nessun caso si è riscontrato quell'intima alterazione che si avverte in altri ciottoli morenici prewürmiani dei depositi di Bassano e del Montello, i quali, sotto la più piccola pressione, si frantumano riducendosi in un terriccio sabbioso-argilloso [28].

Esaminati di fresco, cioè appena ricavati dal loro deposito originario, i ciottoli morenici di M. Mottolone e di M. Lungo fanno l'impressione di essere più o meno intensamente alterati. L'effetto è però dovuto esclusivamente all'intensa colorazione superficiale derivante dalla terra rossa che li avvolge, la quale, quando sia stato possibile, si è infiltrata anche nelle sottili fessurazioni della roccia. Basta esaminare i ciottoli raccolti dopo averli convenientemente lavati ed eventualmente sezionati, per trarne ben altra impressione. Così ripuliti dal terriccio che li avvolge, specialmente se si tratta di rocce basiche, essi presentano una grande freschezza, che li farebbe confondere coi ciottoli würmiani. In altri casi, e cioè quando si tratta di rocce porfiriche o granitiche, l'alterazione effettiva, cioè non quella apparente dovuta a patina argillosa ed a penetrazioni consimili in corrispondenza delle fessurazioni, si dimostra appena appena incipiente.

In tutti i casi, i ciottoli morenici da noi raccolti sui Colli Berici, in rapporto alla loro sostanziale freschezza, presentano una corrispondente tenacità e resistenza alla rottura, come si trattasse di ciottoli delle comuni alluvioni moderne, ciò che, fatta eccezione agli elementi

silicei, contrasta nettamente coi materiali mindeliani di Bassano e del Montello, che sono sempre profondamente argillificati, tanto che, come si è detto poco fa, sotto la più piccola pressione esercitata con le dita si frantumano completamente.

Per quanto il grado di alterazione dei ciottoli non possa avere da solo valore discriminativo assoluto per giudicare dell'età del deposito morenico che li contiene, non si può negare ch'esso fornisce sempre dei preziosi elementi di orientamento, specialmente quando ci si trovi in regioni dove, a distanze relativamente piccole, esistono materiali in condizioni di conservazione fra loro nettamente diverse e sia possibile quindi istituire degli utili raffronti e stabilire delle serie cronologiche.

Sotto questo aspetto è manifesto che nessuna associazione può essere fatta tra i materiali morenici dei Berici e quelli segnalati nei dintorni di Bassano. Trattasi di due fasi o stati fra loro nettamente diversi. Il raffronto è così stridente, che non si può a meno di concludere che per lo stato di conservazione dei rispettivi ciottoli, i materiali morenici dei Berici appartengono ad un periodo alquanto meno antico di quello mindeliano al quale vennero riferiti i materiali morenici che si trovano allo sbocco della valle del Brenta presso Bassano.

Tenendo giusto conto di queste circostanze e nello stesso tempo delle caratteristiche e dello sviluppo assunto dai più vicini depositi morenici sia antichi (mindeliani), sia recenti (würmiani), si è logicamente condotti a ritenere che i materiali morenici dei Colli Berici appartengono ad una fase intermedia, rispondente al periodo Rissiano, riferimento che si accorderebbe bene, come vedremo fra breve, con la grande estensione assunta dall'invasione glaciale di questo periodo.

Un altro argomento, oltre quelli or ora esposti, che ci induce a ritenere trattarsi di materiali morenici prewürmiani, riferibili con ogni probabilità al periodo Rissiano e non ad un periodo più antico (Mindeliano), sta nel fatto seguente. Tutti i cultori di glaciologia antica compresi i nomi di HEIM, PENCK, DEPÉRET, BECK, KAYSER, WOLDSTEDT, ecc., sono d'accordo nel ritenere che le valli alpine, prealpine e subalpine, sono state fondamentalmente scavate durante il lungo periodo interglaciale Mindel-Riss, che risponde alla formazione dei ben noti Deckenschotter. Ora, nel caso dei Colli Berici si riscontra che depositi mo-

renici del tutto rispondenti a quelli di M. Mottolone e di M. Lungo si trovano anche non lungi dal fondo della valle di Fimon (Pianezze) provando che essi appartengono ad un periodo inevitabilmente posteriore a quello dell'escavazione valliva, avvenuta subito dopo il Mindeliano.

Chi s'è occupato di questi argomenti, sa quanto difficile ed aleatorio riesca lo stabilire un sincronismo delle varie formazioni quaternarie e quanto incerto si presenti il riferimento dei resti di una morena prewürmiana ad una glaciazione piuttosto che ad un'altra. Quando si tratti poi di lembi isolati e rispondenti ad un unico tipo, come è nel nostro caso, le difficoltà aumentano. Tuttavia se dobbiamo tentare un qualche riferimento, tenendo presente il grado di conservazione dei singoli ciottoli e i ricordati rapporti fra la morfologia interglaciale e i successivi depositi morenici prewürmiani, questo non può farsi che per il periodo Rissiano.

Circa la provenienza di questi materiali morenici dei Berici, tenuta presente la loro posizione topografica e la natura litologica dei singoli ciottoli, non si può a meno di pensare che essa si raccordi col ghiacciaio che scendeva lungo la prospiciente valle dell'Astico, il quale era legato d'altro canto alle masse glaciali dell'alto Brenta ed a quello dell'attiguo e grandioso bacino dell'Adige, che copre un'area di quasi dodicimila chilometri quadrati.

È noto infatti per gli studi di numerosi geologi nazionali e stranieri, che durante il periodo Würmiano il ghiacciaio scendente lungo la valle atesina toccava altezze non inferiori a 1600 metri e che attraverso la depressione di Civezzano, l'altopiano di Piné e la valle di Vigolo Vataro defluivano da esso imponenti masse glaciali verso la Valsugana.

Per l'eccezionale afflusso di ghiacci nell'alta valle del Brenta, in corrispondenza alla conca Pergine-Caldonazzo doveva formarsi un vasto ingorgo, tanto più che l'angustia del tratto successivo della stessa valle del Brenta e lo sbarramento determinato dalla corrente del Cismon scendente per le depressioni di Arsiè e di Fastro ne ostacolavano i deflussi, provocando un inevitabile rigurgito.

In queste condizioni di cose, dall'alta Valsugana, gravida di masse glaciali che durante lo stesso periodo Würmiano toccavano anche qui livelli fra i 1500 e i 1600 metri, i ghiacci accumulati alla testata del Brenta,

pressati da nord e da ovest dalla potente colata atesina, impossibilitati a defluire integralmente lungo il corso naturale della valle, trovavano un facile sfogo debordando sul fianco destro, cioè verso mezzodì, dove, superato il ciglio di M. Rover (m. 1261), e l'alta valle Centa, che ha il suo valico a Carbonare (m. 1076), si distendevano sul largo ed ondulato altopiano di Lavarone e regioni contigue del lato orientale, per riversarsi poi nella sottostante e profonda valle dell'Astico (vedi fig. 1 e 2 della tav. II).

Di qui, sempre durante il periodo Würmiano, la fiumana ghiacciata si stendeva fino oltre Arsiero presso lo sbocco della valle, dove fra Cogollo e Mosson costituiva il ben noto anfiteatro morenico scoperto e così diligentemente descritto dal NEGRI [7].

Estesi depositi morenici, con frequenti elementi porfirici, granitici e scistosi di provenienza atesina e dell'alto Brenta, si trovano infatti su tutto l'altopiano di Lavarone, nella valle d'Assa e su tutti e due i versanti, settentrionale e meridionale del passo, ciò che attesta il pieno legame esistente fra l'alto Brenta funzionante per così dire da bacino collettore, e il versante meridionale lungo il quale discendevano le correnti glaciali.

Quanto all'estensione assunta dalle varie invasioni glaciali che si sono succedute durante l'Era Quaternaria, le osservazioni compiute da una numerosissima schiera di studiosi, danno risultati diversi da paese a paese. In qualche località delle Alpi orientali, nella valle dell'Iller, nella Lombardia, ecc., è stato constatato che la glaciazione mindeliana ha sorpassato talvolta quella rissiana. In altre regioni, come nella valle dell'alto Reno, le morene rissiane oscillano invece entro limiti corrispondenti a quelli toccati dalle morene mindeliane, alle quali, non di rado, esse si accompagnano, mentre in vari altri casi, sia delle Alpi settentrionali, sia delle Alpi meridionali, la glaciazione rissiana ha sorpassato tutte le altre.

Anche in questo campo relativo all'estensione assunta dalle varie glaciazioni, sarebbe errore ritenere che si possano applicare ovunque gli stessi criteri, schematizzando un fenomeno per sua natura vario e complesso. Le cause che possono aver determinato il maggior allungamento di un ghiacciaio in confronto di un altro sono molteplici e non sempre tali da poter essere valutate e controllate col necessario

rigore. Sta il fatto ad ogni modo, affermato da vari specialisti in argomento e dallo stesso PENCK, che la glaciazione rissiana, indicata dall'HEIM col nome specifico della più grande invasione glaciale (*Die grösste Vergletscherung*), ha assunto un enorme sviluppo.

L'apprezzamento, che è basato su constatazioni di fatto tratte dall'esame di numerose località specialmente della Svizzera, trova singolare riscontro nell'andamento della ben nota curva costruita dal MILANKOVITCH, dalla quale risulta, fra l'altro, che il massimo abbassamento dei limiti altimetrici delle nevi perenni, ha avuto luogo appunto nel periodo Rissiano. Con questo non si vuole escludere che anche nei Berici vi possa essere stata un'espansione mindeliana uguale od anche maggiore, della quale però finora non è nota alcuna traccia.

Ora se si pensa che l'invasione glaciale rissiana ebbe un'estensione di gran lunga superiore a quella würmiana, che per l'area da noi presa in esame in questo studio si è arrestata presso lo sbocco della valle dell'Astico, si potrà rendersi conto come la fronte dell'immane colata di ghiaccio prewürmiana, nell'acme del fenomeno di espansione, abbia potuto spingersi molto più a sud di Arsiero, fino a raggiungere il versante settentrionale dei Berici.

Certo, la corrente maggiore doveva scendere direttamente nella valle dell'Astico scavalcando l'altipiano di Lavarone, ma non v'ha dubbio, a mio avviso, che specialmente durante il periodo Rissiano concorrevano ad ingrossarla masse glaciali talvolta anche ingenti, le quali, pur traendo origine dall'alto bacino del Brenta, percorrevano altra via e scendevano lungo la valle d'Assa per il passo di Vezzena (m. 1402), invadendo, nel loro percorso, anche la parte occidentale dell'altopiano dei Sette Comuni. Alla stessa guisa, attraverso il passo di S. Sebastiano di Folgaria, quello della Borcola (m. 1300) e la depressione del Pian delle Fugazze (m. 1157), il ghiacciaio dell'Astico doveva ricevere considerevoli contributi atesini, indipendentemente da quelli che per la sella di Civezzano e la valle di Vigolo Vattaro, situate alquanto più a nord, vi arrivavano attraverso l'alta conca del Brenta e quindi il già menzionato altopiano di Lavarone.

Ci conforta in questa opinione, oltre alla presenza di materiali erratici a varie quote sui fianchi vallivi alquanto superiori a quelle dei passi congiungenti i rispettivi versanti, il fatto della grande frequenza

fra i materiali morenici dei Berici, di quelle porfirite micacee, talvolta quarzose, di colore rosso-violaceo, degradante fino quasi al bianco-giallastro, per lo più compatte, ma non infrequentemente conglomeratiche, più raramente grigio-verdastre, che sono peculiari degli ammassi di valle Posina, di M. Alba, di Fongara e dei Monti Guizza e Faedo. Tutto ciò dimostra il notevole contributo di materiali che, oltre a quelli provenienti dalla valle dell'Astico, sono discesi attraverso le valli contigue del Vicentino, in modo da ingrossare considerevolmente la colata, la quale, superata l'interposta pianura, raggiunse il gruppo collinoso dei Berici.

Non si può pensare che i materiali morenici di M. Lungo e di M. Mottolone provengano da quel ramo del ghiacciaio del Brenta che scendeva verso Bassano, non solo per le difficoltà topografiche che ne impossibilitavano il diretto raccordo, ma anche per la composizione litologica del tutto diversa dei rispettivi depositi. Noi possiamo constatare infatti che tanto nei depositi morenici würmiani, quanto in quelli prewürmiani dipendenti dal ghiacciaio del Brenta, i ciottoli granitici e i ciottoli di porfidi quarziferi sono frequentissimi, senza che si riscontri alcun elemento di porfirite micacee del Trias, così comuni invece nel Vicentino occidentale. Al contrario, abbiamo visto che nelle morene dei Colli Berici si avverte una evidente scarsità di elementi di porfido quarzifero e specialmente di granito, mentre le porfirite micacee compatte e conglomeratiche sono assai frequenti. Particolarità facile a spiegarsi quando si pensi all'intensa azione erosiva e di trasporto che le masse di ghiaccio, superati i valichi prealpini e l'altopiano di Lavarone, dovevano esercitare sui fianchi ed il fondo delle valli entro le quali si precipitavano per estendersi poi al piano.

Forse ci fu un tempo in cui le immani correnti di ghiaccio sbocanti dalle valli del Vicentino, da quella del Brenta e del Piave si espandevano ai lati fino a formare un'unica piastra ghiacciata come avvenne in vari punti al piede settentrionale delle Alpi.

I ciottoli ed i massi granitici e porfirici segnalati dal TARAMELLI [2] sul Montello; quelli scoperti dal Rossi sulle colline asolane [4] e i depositi morenici dei Berici indurrebbero a legittimare tale ipotesi che fu già ventilata dai menzionati autori.

Per quanto pallide testimonianze, queste pietre parlanti narrano le loro interessanti vicende e facendoci intendere tutta la vastità del grandioso fenomeno al quale è legata la loro storia, ci danno un'idea dell'immensa durata dei tempi durante i quali si è svolto l'intero ciclo dei periodi glaciali che caratterizzano l'Era Neozoica.

Nel chiudere questo scritto mi è cosa gradita inviare i miei più vivi ringraziamenti al prof. GIUSEPPE PERIN che mi fornì l'occasione di occuparmi di così interessante argomento e mi fu guida preziosa nel corso delle escursioni compiute assieme sui Colli Berici.

Istituto di Geologia dell'Università di Padova - gennaio 1947.

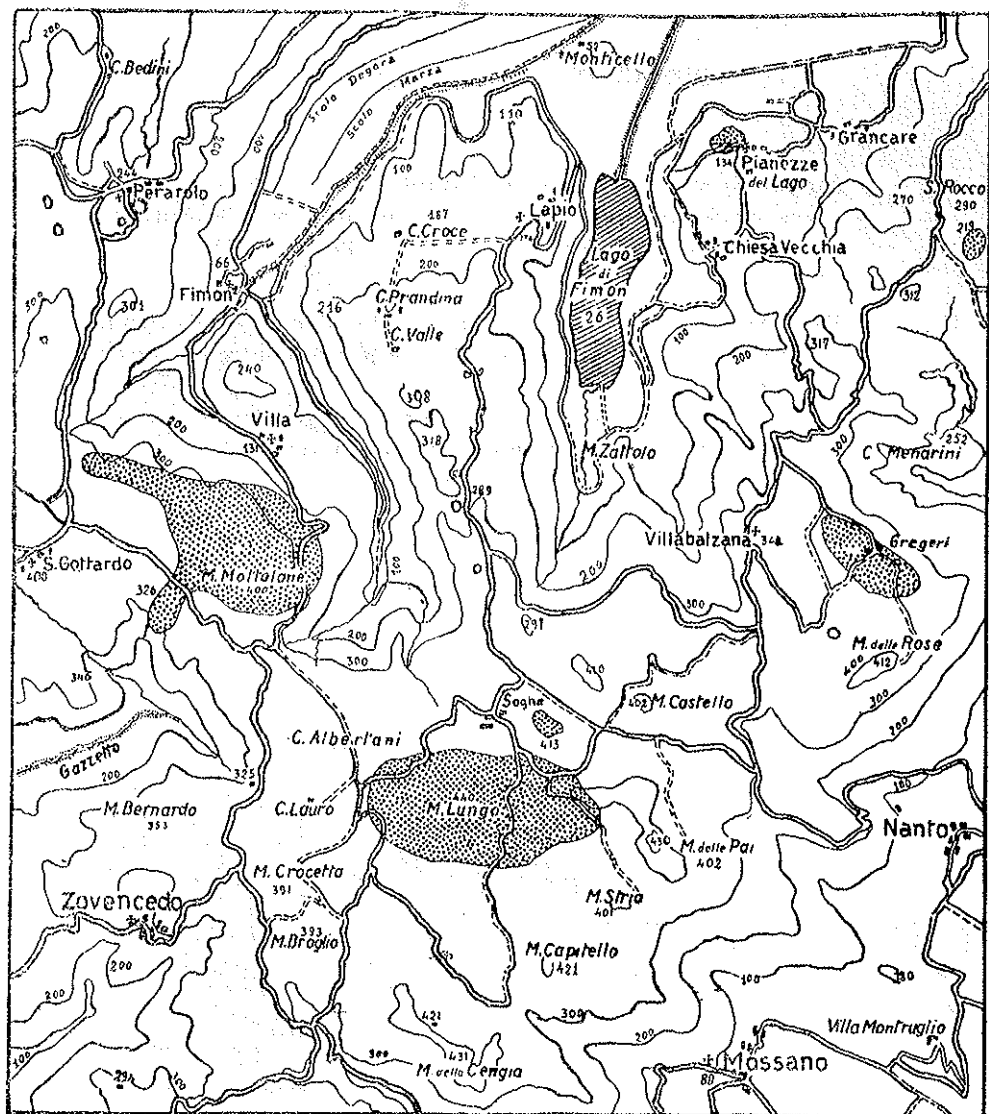
BIBLIOGRAFIA

- [1] SECCO A., *Guida geologico-alpina di Bassano e dintorni*. Stabilimento Roberti, Bassano, 1880.
- [2] TARAMELLI T., *Geologia delle provincie venete*. «Atti della R. Accademia dei Lincei», serie III, vol. VIII, 1881.
- [3] ROSSI A., *Sulla chiusa di Quero e l'epoca glaciale del Piave e del Brenta*. «Bollettino della Soc. Veneto-Trentina di Sc. Nat. in Padova», n. 5, 1881.
- [4] — *Contribuzione alla geologia della provincia di Treviso. Note sull'epoca glaciale*. «Bollettino della Soc. Veneto-Trentina di Sc. Nat.», Tomo II, Padova, 1883.
- [5] SECCO A., *Note geologiche sul Bassanese*. Stabilimento S. Pozzato, Bassano, 1883.
- [6] NEGRI A., *Le valli del Leogra, di Posina, di Laghi e dell'Astico nel Vicentino. Appunti geologici*. «Bollett. R. Comitato Geologico d'Italia», Roma, 1884.
- [7] — *L'anfiteatro morenico dell'Astico e l'epoca glaciale nei Sette Comuni*. «Atti R. Istituto Veneto», t. V, Sez. VI, Venezia, 1887, pag. 589-634.
- [8] DAL PIAZ G., *Note sull'Epoca glaciale nel Bellunese*. «Atti della Soc. Veneto-Trentina di Sc. Nat.», serie II, vol. II, Padova, 1895.
- [9] NEGRI A., *Carta geologica della provincia di Vicenza*. Sezione di Vicenza del C. A. I., Firenze, 1901.
- [10] PENCK A. u. BRÜCKNER E., *Die Alpen im Eiszeitalter*. Vol. III, Leipzig, 1909.
- [11] FABIANI R., *La Regione dei Berici - Morfologia, idrografia e geologia*. Ufficio Idrografico del Magistrato alle Acque, Pubbl. n. 28 e 29, Venezia, 1911.
- [12] — *Sulle rocce eruttive e piroclastiche dei Colli Berici*. «Atti dell'Accademia Veneto-Trentino-Istrianica», Padova, 1911.
- [13] DAL PIAZ G., *Sull'esistenza del Pliocene marino nel Veneto*. «Atti Accademia Scient. Veneto-Trentino-Istrianica», Anno V, Padova, 1912.

- [14] FABIANI R., *La regione del Pasubio*. Ufficio Idrografico del Magistrato alle Acque, Pubbl. n. 10, Venezia, 1920.
- [15] KLEBELSBERG R., *Der Etschgletscher auf den Höhen von Vielgerent*. «Zeitschrift für Gletscherkunde», vol. XI, 1920.
- [16] SCHWINNER R., *Die Oberflächengestaltung des östlichen Suganer Gebietes*. «Ostalpine Formenstudien», Abt. 3, Heft 2, Berlin, 1923.
- [17] FABIANI R., *Carta geologica delle Tre Venezie. Foglio Schio*. Ufficio Idrogr. del Magistrato alle Acque, Venezia, 1925.
- [18] NANGERONI L. G., *Rilevamento geologico del territorio della Provincia di Varese*. I-II. «Istituto Termico di Varese», 1930.
- [19] TREVISAN L., *Di un nuovo rilevamento geologico nell'Altipiano dei Sette Comuni (Tavoletta Asiago)*. «Atti Accad. Veneto-Trentino-Istria», vol. XXIII, 1933.
- [20] KLEBELSBERG (V.) R., *Grundzüge der Geologie Tirols*. Das «Tirol», D. u. Ö. Alpenverein, München, 1933.
- [21] SACCO F., *Il glacialismo veneto*. «L'Universo», a. XVIII, n. 7, Firenze 1937.
- [22] — *L'alta Italia durante l'era quaternaria*. «L'Universo», a. XX, n. 2, Firenze, 1939.
- [23] TREVISAN L., *Il glacialismo quaternario nell'Altipiano dei Sette Comuni (Vicenza)*. «Bollett. del Comitato Glaciol. Ital.», n. 19, Torino, 1939.
- [24] RIVA A., *Notizie sul glaciale della Brianza*. «Bollettino della Soc. Geologica Italiana». Vol. LX, Roma, 1941.
- [25] DAL PIAZ G., *L'Età del Montello*. «Commentationes, Pontificia Academia Scientiarum», vol. VI, n. 8, 1942.
- [26] VENZO S., *Studio geomorfologico sull'altipiano di Lavarone e sull'alta Valsugana (Trentino). Raffronti colla bassa Valsugana e la val d'Adige*. «Atti della Soc. Ital. di Scienze Naturali», vol. LXXXIII, Milano, 1944.
- [27] — *Rilevamento geologico della valle Caballina (Bergamo)*. «Atti della Soc. Italiana di Scienze Naturali», Vol. LXXXIV, Milano, 1945.
- [28] DAL PIAZ G., *Avanzi morenici prewürmiani allo sbocco della valle del Brenta presso Bassano*. «Acta, Pontificia Academia Scientiarum», vol. X, n. 15, Città del Vaticano, 1946.

CARTINA TOPOGRAFICA DELLA PARTE NORD-ORIENTALE DEI COLLI BERICI

SCALA A 1 A 50.000



Le aree punteggiate corrispondono ai materiali morenici prewürmiani.
(M. Lungo, M. Mottolone, C. Gregori, S. Rocco, Pianezze).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA II

Fig. 1. — Parte orientale dell'altopiano di Lavarone, vista da Nord; essa forma da spartiacque fra la valle dell'alto Brenta e la valle dell'Astico. Oltre il margine boscoso precipita la valle dell'Astico.

Fig. 2. — Parte nord-occidentale dell'altopiano di Lavarone vista da Sud-Est. Si osservi il tipo morfologico largo e piatto, a sporgenze arrotondate.

(I due clichés di questa tavola vennero gentilmente concessi a prestito dal prof. S. Venzo che ringrazio vivamente).

S. Sebastiano

Costa d'Agra 1842	Finonchio 1003	Sella di Carbonare 1078	Pendici del Cornetto M. Rust 1282
M. Coston 1751	Sommo Alto Mg Grimma 1614	P. del Sommo	
Val Astico			

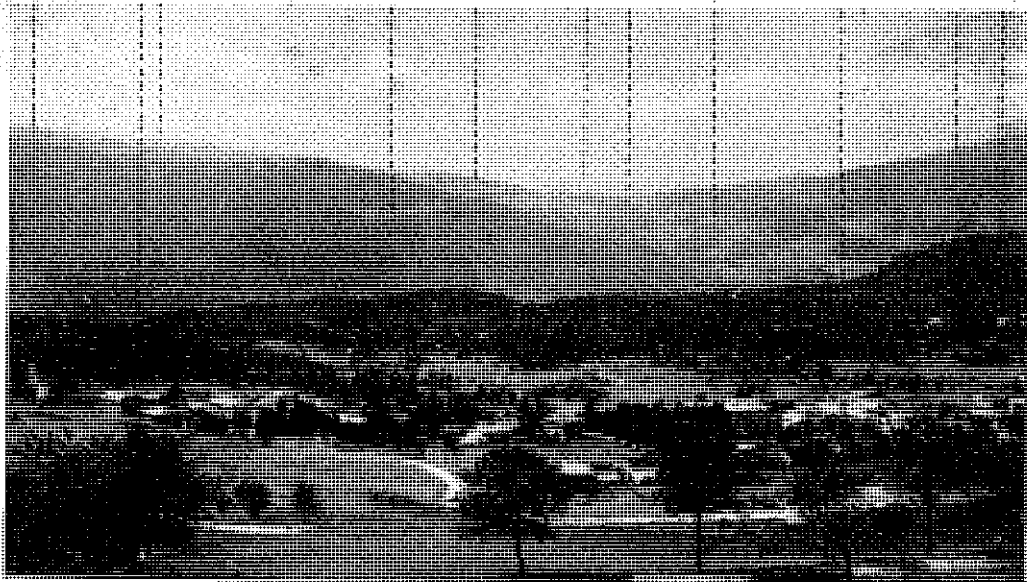


Foto Unterveger - Trento.

FIG. 1.

Becco di Filadonna 2150	Cima Tosa 3175	Cima Brenta 3150
Chiesa 1171	Azzolini 1185	Gionghi 1170
Ronchetti		Gasperi 1220
		Paganella

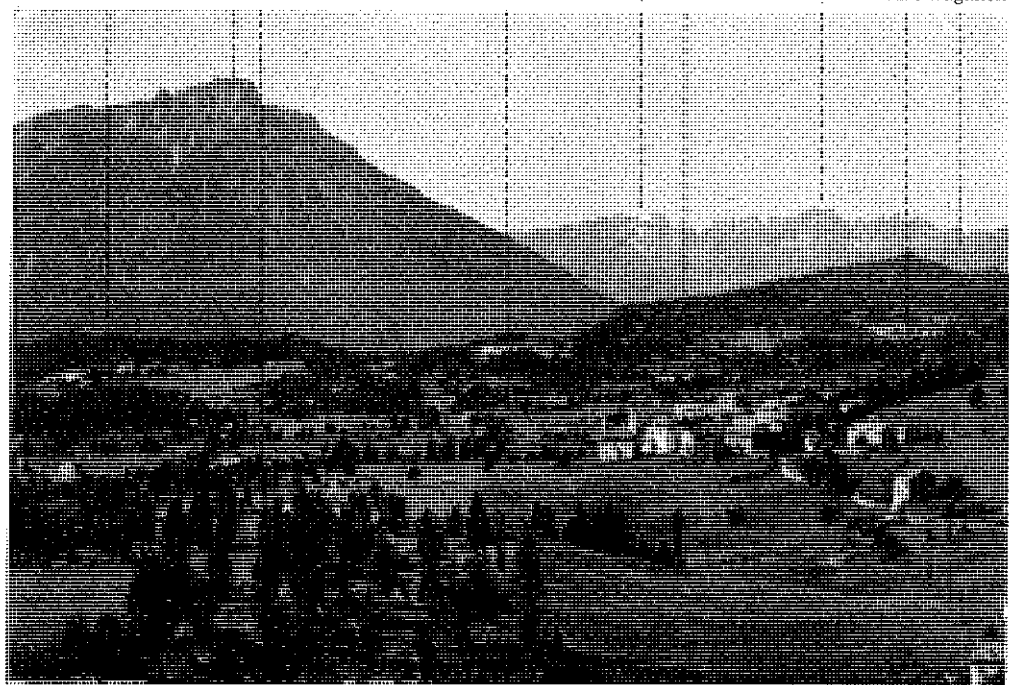


Foto Unterveger - Trento.

FIG. 2.

ECOLOGIA VEGETALE (*)

I CICLI DELLE MACCHIE SOLARI E L'ACCRESCEMENTO DELLE CONIFERE NELLE ALPI VENETE

DOTT. R. VEGHER

SVMMARIVM. — Cum Auctor perspexisset incrementa annorum circularum in arboribus Venetae regionis, eaque contulit cum pluvia quae per hos ducentos annos Patavii cecidit, eadem ratione se habere invenit arbores in planitie atque in Athesis fluminis valle, editis loci. Arbitratur Auctor id evenire propter saepta Alpina, quae caeli statum summo opere moderantur.

È ormai noto, dalle ricerche del DOUGLAS, come la misura dell'accrescimento annuale dei cerchi legnosi degli alberi sia legato all'accumulo di riserve avvenuto nell'anno precedente e come tale accumulo sia a sua volta legato all'andamento pluviometrico dell'annata; l'andamento pluviometrico presenta poi dei ritmi i quali corrispondono al ritmo dei cicli delle macchie solari. Il DOUGLAS esaminò in un primo tempo delle sezioni di tronchi di conifere della Germania centrale, dove da oltre 200 anni si tenevano, a Berlino, esatte osservazioni pluviometriche.

Le strette relazioni da lui rilevate tra le condizioni climatologiche degli ultimi 200 anni in Germania e lo sviluppo degli alberi nelle stesse regioni: il parallelismo di sviluppo tra le conifere cresciute in Germania e nella pianura nord-americana, lo autorizzarono ad estendere, per estrapolazione, il metodo escogitato anche agli alberi di età assai maggiore.

Si ha così un metodo per determinare l'andamento del clima sulla Terra nel periodo postglaciale.

Sulle orme del DOUGLAS sone state eseguite altre ricerche su questo argomento nell'America settentrionale, nella Germania centrale e me-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. G. Gola nella riunione privata del 13 gennaio 1947.

ridionale e anche in Norvegia. Nulla a questo riguardo è stato fatto in Italia. A Padova si hanno le più antiche osservazioni meteorologiche eseguite in Italia, iniziate nel 1713, da GIOVANNI POLENI, professore di questa Università. Le osservazioni del POLENI sono poi state rivedute presso l'Osservatorio Astronomico di Padova da CRESTANI, RAMPONI, VENTURELLI (Roma, 1935). Si hanno quindi a Padova tutte le condizioni per uno studio su tale argomento.

Il presente lavoro, eseguito nell'Istituto Botanico di Padova, è dedicato all'esame dello sviluppo dei cerchi annuali del legno di alcuni alberi in relazione alle variazioni del regime pluviometrico riscontrate a Padova dalle osservazioni meteorologiche.

Oltre ad una collezione di tronchi di conifere di diverse specie dell'Orto Botanico di Padova, ho studiato un grosso tronco di larice da me raccolto nella alta Val di Non, di oltre trecento anni, altri tre abeti pure di Val di Non, nonchè una collezione di cembri raccolti nella Val di Fassa e per interessamento del Prof. LINO BONOMI di Trento. Infine ho tentato di analizzare dei campioni provenienti dal villaggio palafitticolo del Lago di Ledro (Trentino meridionale).

L'esame era eseguito sopra sezioni trasversali dei tronchi, state opportunamente lisciate e sulle quali erano state scelte tre linee radiali; un episcopio scorrente sopra queste tre linee proiettava sopra una striscia di carta le immagini dei singoli cerchi annuali; si potevano così avere tre misure di ciascun cerchio annuale la cui media serviva di base per i calcoli. Come già è stato dimostrato, la semplice misura dello spessore di ogni cerchio non dà risultati attendibili, ma occorre una misura dell'area di ogni cerchio. I diagrammi da me tracciati lo erano sulla base dell'area di ogni cerchio risultante dalla media delle misurazioni dei tre raggi.

Riporto le caratteristiche dei campioni studiati:

A) Campioni dell'Orto Botanico di Padova:

- | | | | | |
|----|-------------------------------|-------------|---------------------|-------------|
| 1) | <i>Picea excelsa</i> : | età anni 50 | parte utilizzata a. | 1849-1898 |
| 2) | " | " " 50 | " | " 1850-1897 |
| 3) | " | " " 80 | " | " 1859-1923 |
| 4) | <i>Pinus Laricio</i> : | " " 80 | " | " 1859-1923 |
| 5) | <i>Cryptomeria japonica</i> : | " 70 | " | " 1875-1922 |
| 6) | <i>Cupressus fastigiata</i> : | " 50 | " | " 1844-1927 |

B) Campioni del Trentino:

1)	<i>Picea excelsa</i> :	da Rumo in Val di Non	1941	età a. 50	parte utilizz.	1897-1937
2)	"	"	"	"	"	1853-1934
3)	"	"	"	"	"	1878-1935
4)	<i>Larix decidua</i> :	da M. Peller in Val di Non	alt. m. 1900	età	"	1595-1814
5)	<i>Pinus Cembra</i> :	da Val di Fassa	1943	"	"	1826-1902
6)	"	"	1943	"	"	1806-1932
7)	"	"	1943	"	"	1896-1935

I diagrammi da me eseguiti sulla base di tali esami erano accompagnati da quelli relativi all'andamento pluviometrico di Padova dall'anno 1715, come risulta dalle osservazioni del POLENI sopra citate. Vi aggiunti le indicazioni relative alle macchie solari tratte dal recente volume di ABETTI: « Il sole ».

Le maggiori frequenze delle macchie solari che ho considerato sono quelle degli anni: 1750, 1761, 1787, 1804, 1816, 1830, 1837, 1848, 1860, 1870, 1883, 1893, 1905, 1917, 1928.

Riferisco ora sopra i risultati ottenuti.

ORTO BOTANICO DI PADOVA

A) *Picea excelsa*: esemplari n. 1, 2, 3. - Il n. 1 presenta massimi di accrescimento a intervalli di 12, 11 e 12 anni; il n. 2 li ha rispettivamente di 11, 12, 11 anni; il n. 3 li presenta a distanza di 13 anni ciascuno.

Poichè le misure ricavate dai tronchi riguardano l'attivo del bilancio di una annata intera e i cicli annuali sono di 11 anni e frazione d'anno, i numeri interi sopraricordati riguardano sempre qualche valore in eccesso o in difetto; ne risulta che l'andamento nei tre esemplari si può considerare eguale o tutt'al più le lievi differenze si possono riferire ad un tempo di reazione diverso nei singoli individui rispetto alla caduta della pioggia. Tutti i massimi sono legati ad una pregressa caduta di grandi piogge.

B) *Cupressus fastigiata*, *Pinus Laricio*, *Cryptomeria japonica*. - I tre campioni, pure così differenti, si comportano con una evidente

uniformità. Le punte di accrescimento si verificano con una generale regolarità un anno o due anni, dopo una punta di piogge; poichè, come accennai, non è possibile valutare i periodi altrimenti che ad anni interi, i periodi di 11 anni non appaiono ben chiari, e per lo più sono meglio evidenti i periodi di 33 anni.

C) Regione trentina:

Picea excelsa: esemplari n. 1, 2, 3. - I tre campioni presentano una certa uniformità nelle curve di accrescimento e pressochè tutti i massimi pluviometrici di Padova sono seguiti da un massimo di accrescimento; nell'esemplare n. 2 si possono osservare periodi di 22, 33, e 45 anni ed anche corrispondenze colle massime di macchie solari del 1883, 1917 e 1928.

Lo stesso si può dire per il campione n. 3 quantunque con minore evidenza; il campione 1 è assai più affine al n. 2.

D) *Pinus Cembra* di Val di Fassa: esemplari n. 1, 2, 3. - In questi tre sono notevoli le coincidenze nell'andamento delle curve tra i tre esemplari, ma non appaiono molto chiare coincidenze nè con i periodi di pioggia a Padova nè con i massimi di macchie solari.

E) *Larix europaea* di Valle di Non. - Il lungo periodo di vita mostra l'andamento delle curve nel quale non si conoscono regolari rapporti nè colla caduta di pioggia a Padova, nè coi cicli delle macchie solari.

In tali diagrammi i cicli climatici di undici anni non sempre si presentano evidenti a causa di interferenze con cicli minori, e gli studiosi delle macchie solari tendono a considerare prevalentemente dei cicli di ventidue anni. Inoltre si deve tener conto che la media dei cicli non corrisponde a undici anni esatti, ma a undici e un decimo, e quindi anche quelli di ventidue anni non sono considerati esatti, ma addizionati di una frazione di anni.

I risultati da me ottenuti fanno rilevare con una certa evidenza, ancora più che quello di ventidue anni, multipli di questi periodi.

Altri autori, specialmente in Norvegia, hanno anch'essi osservato il ciclo dei ventidue anni; MOSELEY nel Canada ha osservato un ciclo intorno ai ventidue anni; ma è da rilevare che il mio studio è fatto

prevalentemente su periodi troppo brevi perchè si possano avere risultati corrispondenti.

Vorrei dai dati raccolti trarre alcune conclusioni.

Riguardo agli alberi cresciuti a Padova, dove si dispongono di dati pluviometrici abbastanza precisi si può dire confermato quello che è stato osservato da altri relativamente agli stretti rapporti tra regime pluviometrico e curve di misura dell'accrescimento dei cerchi annuali.

I saggi sui legni raccolti nelle montagne trentine dimostrano senza dubbio, come già a Padova, che la misura dell'accrescimento annuale non è in dipendenza di un fattore individuale, ma è comune ai tre individui esaminati e cioè di natura esteriore. Ma essi indicano anche che il regime pluviometrico è ben distinto da quello che contemporaneamente si è verificato a Padova; nè i rapporti tra i massimi di macchie solari e curve di accrescimento appaiono, per i legni della grande vallata alpina, così legati fra loro, nè così periodici (come è ben noto per le macchie solari), così da poter avvicinare questi risultati con quelli ottenuti altrove.

È noto come la catena alpina costituisca un singolare fattore di modificazione del clima sudeuropeo. Le osservazioni già fatte con tanto successo nel Nord-America, nella pianura germanica, sulla costa atlantica della Norvegia, riguardano regioni soggette ad un comune regime climatico, e così ben noto nei suoi sviluppi, da permettere persino, con una notevole approssimazione, una buona previsione del tempo.

Pure è noto come la Valle del Po costituisca un ambiente climatico a sè, nel quale l'andamento dei fenomeni meteorologici è influenzato non solo da quanto si verifica nel campo che interessa la regione nord-americana e nord-europea, ma anche nell'Africa settentrionale; il diverso comportamento pluviometrico nei diversi punti delle diverse vallate della catena alpina, sia in relazione alla vicinanza col mare, sia colla configurazione della catena stessa e colla direzione delle singole vallate, determina una localizzazione climatica della quale risente certamente lo sviluppo dei cerchi annuali del legno.

È a ritenere che una regolare indagine sul problema che ho studiato estesa a tutta la catena alpina, e specialmente un confronto tra i dati che si possono raccogliere sui versanti sud e nord della catena stessa, potrebbero illuminarci molto su questo importante problema di climatologia.

Nuovi elementi di giudizio potrebbero essere forniti per esempio dall'esame del millenario Cipresso di Somma Lombarda, del quale credo una sezione sia stata conservata in un Museo di Milano, e dall'esame dei tronchi d'albero che è dato incontrare qua e là nel fondo di alti laghi alpini, i quali testimoniano di una più elevata estensione della vegetazione arborea alcuni secoli fa. Essi ci permetterebbero di far risalire molto addietro l'indagine degli elementi climatici del postglaciale, con un metodo che si dimostra sensibile e sufficientemente esatto.

Ho accennato in principio di aver avuto a disposizione dei legni delle Palafitte del Lago di Ledro.

Le sezioni di tali legni non sono, a dire il vero, molto ampie; ciò probabilmente è dovuto al fatto che i tronchi usati dalle tribù palafitticole dovevano essere scelti di dimensioni non molto notevoli, date le difficoltà di trasporto. In secondo luogo la parte esterna di questi pali si presentava fortemente corrosa per il lungo soggiorno nel lago, così da non poterla usare nelle ricerche. Il ciclo di anni utilizzato è stato quindi assai breve, ma mi ha colpito il fatto della estrema omogeneità dei cerchi di questi campioni.

Nonchè un ritmo, non era apprezzabile quasi alcuna differenza di spessore tra cerchio e cerchio; verrebbe fatto di pensare che questi legni sono stati sottratti all'influenza pur così generale, da quei fondamentali fattori climatici sulla Terra, che sono le precipitazioni atmosferiche e le macchie solari.

Io penso piuttosto, deducendolo da altri elementi di studio in mio possesso, che tali alberi dovevano far parte di una foresta talmente fitta da costituire un complesso di condizioni così stabile per tali giovani alberi da sottrarli, almeno per il periodo che poteva essere valutato nel materiale d'esame, ad ogni influenza inerente all'umidità del bosco.

SU UN POSSIBILE EFFETTO OTTICO DEL MOVIMENTO TERRESTRE (*)

(Con tre figure)

MARIO GALLI

SYMMARIUM. — Quaerit Auctor num, adhibita formula quae exprimit Fresnelianum coëfficiens tractionis, experimentum fieri possit, quo, aequae ac simili experimento a MICHELSON et MORLEY facto, ostendi queat non dubia repugnantia inter classici electromagnetismi leges et res atque eventus.

I. — Tra i fondamenti sperimentali della teoria delle relatività eccelle, come è ben noto, l'esperienza di MICHELSON e MORLEY. Sebbene siano numerosi gli esperimenti che al pari di questo mostrino un contrasto incontrovertibile con l'elettrodinamica classica, nessuno gli è superiore in valore dimostrativo. Come giustamente osserva il LAUE⁽¹⁾ in tutti questi esperimenti si tratta di fenomeni piuttosto complicati, dove si fa appello a principi non sempre chiari, di validità universale alquanto dubbia; così che non è facile escludere che l'elettrodinamica classica, mediante modificazioni non sostanziali, si potrebbe adattare ad essi.

Consentendo pienamente con LAUE circa l'incontestabile preminenza dell'esperimento di MICHELSON, osserviamo però che l'efficacia dimostrativa di esso è condizionata all'ammissione di certe proposizioni che non si possono riguardare come chiarissime, come provano le numerose contestazioni cui sono andate soggette. Queste proposizioni sono in sostanza quelle che affermano l'immobilità dell'etere e l'indipendenza della velocità della luce dal moto della sorgente.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 4 gennaio 1947.

(¹) « Handbuch der experimental Physik », XVIII, pag. 67.

Ma, indipendentemente da questi che sono i presupposti interpretativi dell'esperienza di MICHELSON, il dispositivo stesso è stato sottoposto ad una critica severa e si è tentato di infirmarne il valore dimostrativo. In genere tali critiche sono basate sulla legge della riflessione della luce su uno specchio in moto, stabilita diversamente da quanto hanno fatto MICHELSON e MORLEY ⁽¹⁾.

Secondo RIGHI, la cui critica è certo una delle più serie, quando un raggio luminoso incide su uno specchio in moto con velocità v , essendo lo specchio normale al piano definito dalla direzione del raggio luminoso e dalla direzione del movimento, l'angolo di riflessione non sarà uguale all'angolo d'incidenza, ma sarà uguale a quello aumentato o diminuito del doppio di un certo angolo ω dato dalla formola:

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{\rho \cos \beta \operatorname{sen} (\alpha - \beta)}{1 - \rho \cos \beta \cos (\alpha - \beta)}$$

dove α e β sono gli angoli che con la direzione del moto formano rispettivamente il raggio luminoso e la normale allo specchio, e ρ indica il rapporto v/c .

Tenendo conto di questa legge, ottenuta mediante la rigida applicazione del principio di HUYGHENS, RIGHI dimostra che, per una rotazione di 90° dell'apparecchio, non è lecito aspettarsi alcuno spostamento di frange, contro quanto si ritiene comunemente. Questo nell'ipotesi che i due specchi in cui si riflettono rispettivamente i due raggi nei quali si divide il raggio primario incidente sullo specchio a 45° fornito esattamente un angolo di 90° . Se tale non è il caso dovrebbe verificarsi qualche spostamento di frange. Ora, poichè l'esperienza si suole condurre proprio secondo questo modo, per avere frange più nitide, ed ha dato sempre risultato negativo, la teoria della relatività rimane impregiudicata.

Nonostante questa importante attenuazione, i procedimenti e le conclusioni del RIGHI lasciano alquanto perplessi. Egli applica il prin-

⁽¹⁾ SUTHERLAND W., « Phil. Magazine », XLV, pag. 23 (1898); « Hicks. Phil. Mag. », III, pag. 9 (1902); « Nature », February 13 (1902); MORLEY e MILLER, « Phil. Mag. », IX, pag. 680; KOHL, « Annalen der Physik », XXVIII, pag. 259 e 662 (1909); LAUE M., « Annalen der Physik », XXXIII, pag. 186.

cipio di HUYGHENS, ma chi ci assicura della sua universale validità? Chi ci assicura che esso sia applicabile anche ai corpi in movimento? Questi dubbi suggeriscono il desiderio di concepire ed attuare nuove esperienze che non si basino su alcuna proposizione contestabile.

II. — Un principio che, almeno a prima vista, sembra offrire qualche possibilità di ottenere lo stesso scopo di quello di MICHELSON e MORLEY è la celebre formola di FRESNEL relativa alla velocità della luce in un mezzo in moto. È precisamente questa possibilità che vogliamo discutere. Riferiremo anche il risultato negativo di una esperienza personale.

Secondo FRESNEL⁽¹⁾, se, con riferimento ad una piattaforma solidale con l'etere, c/n è la velocità della luce in un mezzo avente indice di rifrazione n ed in quiete rispetto all'etere, nell'ipotesi che tale mezzo si sposti rispetto all'etere con velocità uniforme v , tale velocità V si modifica secondo la formola:

$$V = \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v.$$

Da cui consegue che, con riferimento ad una piattaforma solidale con il corpo mobile, la velocità della luce è data dalla formola:

$$V' = \frac{c}{n} \mp \frac{v}{n^2}.$$

Il LORENTZ riuscì nel 1895⁽²⁾ a giustificare quella formola mediante la sua celebre teoria dei fenomeni magnetici dei corpi in movimento. Egli ritiene, contrariamente a FRESNEL, che l'etere non partecipa in alcun modo al movimento dei corpi.

La formola è stata sottoposta a verifica sperimentale da FIZEAU⁽³⁾, da MICHELSON e MORLEY⁽⁴⁾, da ZEEMANN⁽⁵⁾ ed è risultata esatta entro

(1) FRESNEL, « Ann. de Chimie et de Phys. », IX, 57 (1818).

(2) LORENTZ, *Optischen Erscheinungen in bewegten Körper*. « Collected Papers », V, pag. 95; *The Theory of electrons*. Leipzig, Teubner 1909.

(3) FIZEAU, « C. R. », XXIII, pag. 351 (1851); « Ann. de Chim. et de Phys. », LVII, 385 (1859).

(4) MICHELSON e MORLEY, « Amer. Journ. of Science », XXXI, 377 (1886).

(5) ZEEMANN P., « Verslagen Akad. d. Wiss. Amsterdam, Naturkundige Afdceelin », XXIII, pag. 245 (1914) XXIV pag. 18 e pag. 1336 (1914-1916), XXV, 184 (1916); « Arch. Neerland. », X, 132 (1927).

i limiti degli errori sperimentali. Anzi ZEEMANN ha controllato l'esattezza di una correzione introdotta dal LORENTZ. Secondo questo Autore, la costante n che compare nella formola deve identificarsi con l'indice di refrazione relativo, quello cioè che misurerebbe un osservatore solidale col sistema mobile, non già l'indice di refrazione assoluto, ovvero quello che misurerebbe un osservatore solidale con la sorgente luminosa. Per capire questa distinzione si pensi che in genere l'indice di refrazione è funzione della frequenza nei mezzi dispersivi, e questa si altera per effetto DOPPLER. Se allora si indica con n l'indice di refrazione assoluto, la formola si modifica come segue:

$$V = \frac{c}{n} \pm \left[1 - \frac{1}{n^2} + \frac{v}{n} \frac{dn}{dv} \right] v.$$

Prescindendo per ora da questa e da altre eventuali correzioni, vediamo come la formola originaria di FRESNEL potrebbe servire a provare il moto della terra rispetto all'etere.

Un semplice apparecchio potrebbe consistere nel fare interferire due raggi che abbiano percorso, l'uno parallelamente all'altro, due cammini geometricamente uguali, ma in mezzi di diverso indice di refrazione.

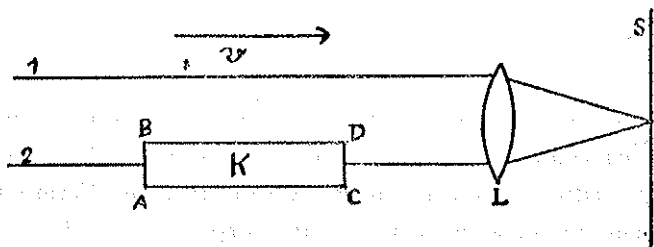


FIG. 1.

Supponiamo che un'onda piana monocromatica investa parzialmente la superficie AB della lastra di vetro K di lunghezza l . La lente L fa interferire sullo schermo S i raggi che hanno attraversato il vetro con quelli che hanno attraversato la regione superiore, dove l'indice di refrazione è uguale all'unità. La differenza di cammino ottico, come è ben noto, è data dall'espressione $l(n - 1)$. Ma supponiamo che la lastra K, insieme alla lente L ed allo schermo S, si sposti nella direzione per-

pendicolare ad AB e CD, con velocità v rispetto all'etere. In tale caso, il raggio 2 impiegherà a percorrere la lunghezza l (spessore della lastra) un tempo dato dall'espressione:

$$\frac{l}{\frac{c}{n} - \frac{v}{n^2}}.$$

Nello stesso tempo il raggio 1 percorre una distanza data da

$$\frac{l}{\frac{c}{n} - \frac{v}{n}} (c - v).$$

La differenza di cammino ottico fra i due raggi sarà quindi:

$$\Delta = \frac{l}{\frac{c}{n} - \frac{v}{n^2}} (c - v) - l$$

ovvero anche:

$$\Delta = \frac{nl(1 - \beta)}{1 - \frac{\beta}{n}} - l$$

indicando con β il rapporto v/c .

Sviluppando il denominatore in serie di potenze e limitandoci a prendere i primi due termini dello sviluppo otteniamo:

$$\Delta = (n - 1)l(1 - \beta) - \frac{l\beta^2}{n}$$

e trascurando il termine di second'ordine:

$$\Delta = (n - 1)l(1 - \beta).$$

Come si vede la differenza di cammino ottico dipende da β e cambia di segno con esso. Per conseguenza, ruotando di 180° tutto l'apparecchio, si dovrebbe avere uno spostamento di frange, molto cospicuo per velocità di traslazione dell'ordine di grandezza di quella di traslazione terrestre.

Ma in realtà, tale aspettazione non è legittima. Come già segnalò RAYLEIGH⁽¹⁾, per calcolare lo spostamento di frange in numeri d'onda, come sempre si deve fare, bisogna dividere l'espressione di sopra per la lunghezza d'onda dalla radiazione adoperata. Tenendo presente che, per effetto DOPPLER, la lunghezza d'onda, quella che si misurerebbe se il sistema fosse in quiete rispetto all'etere, deve essere moltiplicata per $(1 - \beta)$ si vede bene che l'influenza del movimento sparisce. Si ha cioè semplicemente: $\Delta = (n - 1) \frac{l}{\lambda_0}$.

Del resto LORENTZ ha dimostrato in generale⁽²⁾ che i fenomeni interferenziali, prescindendo da termini di second'ordine in β , non sono influenzati dal moto uniforme del sistema.

Per conseguenza ogni esperienza del genere di quella descritta, fatta allo scopo di rivelare il moto di traslazione della terra deve dare ed ha sempre dato risultato negativo⁽³⁾.

III. - C'è un'esperienza piuttosto recente di TOMASCHEK (1926)⁽⁴⁾ fondata sull'uso della formola di FRESNEL che merita di essere esaminata.

Questo sperimentatore asserisce di avere invano tentato di scoprire un effetto di prim'ordine. Poichè però il LORENTZ, come già abbiamo ricordato⁽⁵⁾, ha dimostrato che, in generale, effetti di prim'ordine, qualunque sia l'apparecchio interferenziale adoperato, non sono da attendersi, viene il dubbio che l'aspettativa di TOMASCHEK sia fondata su un equivoco.

Il dispositivo è quello schematizzato in figura, affatto simile a quello adoperato da MICHELSON e MORLEY per giustificare la formola di FRESNEL.

Se l'apparecchio si muove di moto traslatorio con velocità v nella direzione AC, si dovrebbe per questo semplice fatto osservare uno spostamento di frange corrispondente ad un effetto di prim'ordine, secondo l'Autore.

(1) R. W. WOOD, « Optique Physique », II, pag. 422.

(2) LORENTZ, *The theory of electrons. Optical phenomena in moving bodies*, pag. 178, Leipzig, Teubner (1909).

(3) RESPIGHI, « Mem. di Bologna », II, pag. 279; HOOK, « Astr. Nachr. », LXXVII, pag. 198; KETTLER, « Astr. Undulationtheorie », pag. 66 (1873), « Pogg. ann. », CXLIV, pag. 370, 1872; MASCART, « Ann. de l'école normale », III, pag. 376, 1874.

(4) « Ann. der Phys. », LXXX, 509 (1926).

(5) Luogo citato.

Eseguendo i calcoli della differenza di fase tra i due raggi interferenti si trova, applicando la formola di FRESNEL nella sua forma originale che sparisce anche il termine di second'ordine. E ciò l'Autore lo riconosce. Ma egli fa assegnamento sulla correzione di LORENTZ e vuole sostenere che, tenendo conto di questa, si dovrebbe avere un effetto di prim'ordine, che l'esperienza non ha rivelato. Stando a questo

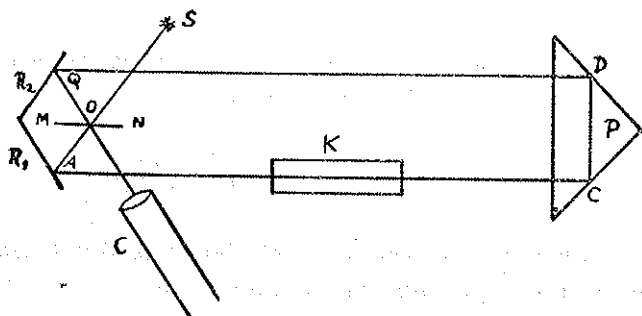


FIG. 2.

risultato bisognerebbe concludere che la correzione di LORENTZ non perfeziona la formola di FRESNEL, contro i risultati sperimentali di ZEEMANN ⁽¹⁾. È vero che, tenendo conto della correzione di LORENTZ si avrebbe un effetto di prim'ordine, ma non si può tenerne conto nel caso attuale. Qui infatti bisogna osservare che tanto il mezzo in cui si propaga il raggio quanto la sorgente luminosa si spostano con la stessa velocità, e non è quindi giustificato distinguere fra la frequenza assoluta e relativa. La correzione di LORENTZ si riferisce al caso in cui il mezzo mobile attraversato dal raggio luminoso si sposti rispetto alla sorgente. Crediamo che qui risieda l'equivoco in cui è caduto il TOMASCHEK.

IV. - Le considerazioni precedenti ed i risultati negativi di esperienze apposite ci obbligano ad ammettere che è vano utilizzare la formola di FRESNEL allo scopo di costruire apparecchi capaci di rivelare il moto di traslazione della terra, qualora si attendano effetti di prim'ordine. Ma non è escluso che si possano attendere legittimamente

⁽¹⁾ Luogo citato.

effetti di second'ordine e che questi effetti siano in qualche modo rivelabili.

Questo appunto ci proponiamo di esaminare.

Riprendiamo in esame la formula:

$$\Delta = \frac{n(l)(1-\beta)}{1-\frac{\beta}{n}} - l$$

Sviluppiamo il denominatore in serie di potenze ed arrestiamoci ai termini di second'ordine. Abbiamo allora:

$$\Delta = l(n-1)(1-\beta) + l\beta^2\left(\frac{1}{n}-1\right).$$

In questo caso si vede bene che calcolando la differenza di cammino ottico in lunghezze d'onda, il dovere tener conto dell'effetto DOPPLER non implica un'esatta compensazione. Dividendo infatti per $\lambda_0(1-\beta)$ invece che per λ_0 semplicemente otteniamo:

$$\Delta = \frac{l}{\lambda_0}(n-1) + \frac{l\beta^2(1-n)}{n\lambda_0(1-\beta)}.$$

Da qui vediamo che il termine esprime il contributo del moto traslatorio di tutto l'apparecchio è dell'ordine di grandezza di $\frac{l\beta^2}{\lambda_0}$. Si tratta, come è facile rilevare, di un effetto piccolissimo, quindi difficilmente rivelabile. Per velocità di grandezza di quella orbitale della terra l dovrebbe essere di alcuni metri.

Si può costruire un apparecchio di lunghezza così rilevante? Ed anche una volta costruito sarebbe agevole farlo rotare di 90° senza perturbare notevolmente il fenomeno che si vuole osservare? Queste difficoltà sono gravi, per quanto non assolutamente insuperabili.

Però ci sarebbe il vantaggio rilevante che qui la nostra ignoranza delle leggi della riflessione e della refrazione non porterebbe pregiudizio al valore dimostrativo dell'esperienza, come nell'esperienza di MICHELSON. È questo vantaggio che ci è parso degno di considerazione e ci ha indotti al presente studio.

Purtroppo però si presenta una grave difficoltà. Bisogna abbandonare il semplice dispositivo di fig. (1) poichè in tal caso la diffe-

renza di cammino ottico sarebbe troppo grande e per conseguenza le frange sparirebbero. Bisognerà in qualche modo prolungare il cammino del raggio 2. Ciò si potrebbe ottenere in vari modi, ma in ogni caso bisognerà evitare che si verifichino riflessioni su specchi ovvero su prismi in modo da incorrere nella stessa incertezza segnalata a proposito dell'esperienza di MICHELSON. L'unico caso in cui l'incertezza è esclusa ci sembra essere quello in cui l'angolo d'incidenza è nullo.

Ciò posto l'unico modo adatto ci sembra quello schematizzato in figura od altri analoghi.

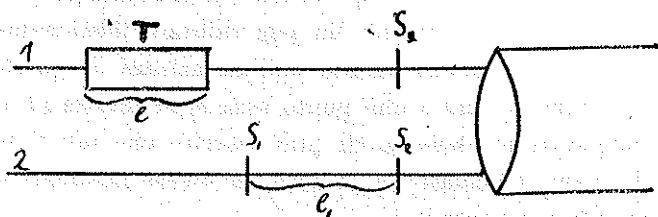


FIG. 3.

S_1 ed S_2 sono due lastre semiargentate. Il raggio 2 in parte viene riflesso ed in parte trasmesso in S_1 , quindi si riflette parzialmente in S_2 ed S_1 per poi attraversare S_2 e quindi penetrare nello strumento di osservazione. Ammettendo che lo spessore dell'argentatura delle lastre S_1 ed S_2 sia tale che il raggio riflesso e trasmesso abbiano la stessa intensità, è facile vedere che con ciò l'intensità del raggio 2 è ridotta ad un sedicesimo del valore iniziale. Bisognerà allora far sì che anche l'intensità del raggio 1 si riduca ad un sedicesimo del valore primitivo, ed a ciò provvede appunto la lastra S_3 la cui argentatura ha uno spessore tale da permettere il conseguimento dello scopo, tenuto conto pure dell'assorbimento della sostanza T. In questo modo se ammettiamo che tutto l'apparecchio si sposti con velocità v nella direzione dei due raggi 1 e 2, la differenza di fase fra il raggio 1 ed il raggio 2 si calcola agevolmente. Indicando con τ_1 e τ_2 rispettivamente il tempo impiegato dal raggio 1 per percorrere la distanza l nella sostanza T e la lunghezza l_1 nel vuoto ed il tempo impiegato

dal raggio 2 per percorrere la distanza l nel vuoto e la distanza $3l$ parimenti nel vuoto, abbiamo:

$$\tau_1 - \tau_2 = \frac{l}{c} (n-1) - \frac{2l_1}{c} - \frac{l\beta^2}{c} \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{2l_1}{c} \beta^2.$$

la lunghezza l_1 sarà determinata dalla condizione che il contributo dei due primi termini sia pressochè nullo.

Ma nonostante il vantaggio di cui abbiamo detto sopra, l'utilità di questa ed altre analoghe esperienze rimane problematica. Supponiamo che il risultato sia negativo. Quali conseguenze teoricamente importanti se ne potrebbero dedurre? Bisognerebbe certo concludere che la formola di FRESNEL non è corretta. Ma per valutare pienamente l'importanza del necessario riconoscimento dell'inesattezza di questa formola bisognerebbe stabilire fino a che punto essa si connetta ai fondamenti dell'elettromagnetismo classico. Si può asserire che tali fondamenti e tale formola siano vincolati fra di loro da essere destinati a perire o a restare simultaneamente?

Esaminando bene la dimostrazione di LORENTZ, quella che a noi interessa, vediamo che in realtà, la formola di FRESNEL consegue dalle formole fondamentali dell'elettromagnetismo classico ma solo in prima approssimazione. Il teorema degli stati corrispondenti è vero solo quando sia permesso di trascurare termini di second'ordine in β . Si potrebbe pensare di applicare il procedimento di LORENTZ fino a conseguire una formola più precisa, esatta almeno fino ai termini di second'ordine, e confrontare questa con l'esperienza.

Ma neppure così facendo si conseguirebbe lo scopo. Infatti nel procedimento di LORENTZ ed in altri simili la formola di FRESNEL non è deducibile semplicemente dalle equazioni di MAXWELL. Bisogna inoltre aggiungere qualche supposizione circa la struttura dell'elettricità, supposizione che potrebbe anche essere molto naturale, ma che potrebbe essere anche modificata senza contraddire alcun fatto fisico.

Possiamo quindi concludere che la formola di FRESNEL non può essere utilizzata per il raggiungimento di quegli scopi cui, nonostante qualche critica più o meno fondata, serve egregiamente l'esperienza di MICHELSON; almeno non potrebbe competere con essa in efficacia dimostrativa.